

Pracovní list 1

Jsou dány matice A, B, C :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Pro každou dvojici výše uvedených matic proveďte součin v obou směrech. Diskutujte situace, kdy to nelze.

$$B \cdot A \quad A \cdot C$$

2. Za jakých podmínek je možné součin dvou matic provést? Kdy to lze provést oběma směry?

3. Je-li možné provést součin matic $C = X \cdot Y$, stanovte výraz, kterému se obecně rovná prvek c_{ij} výsledné matice C . Jaký je typ výsledné matice C ?

4. Je násobení matic asociativní? Je komutativní? Zdůvodněte svou odpověď vlastními slovy či protipříkladem.

$X \cdot Y$ lze provést, je-li počet sloupců X stejný jako počet řádků Y

Oběma směry to lze, pokud X je řádku $k \times l$ a Y je řádku $l \times k$.

$$3. \quad X_{k \times l} \quad Y_{l \times m}$$

$$C_{ij} = x_{i1} \cdot y_{1j} + x_{i2} \cdot y_{2j} + \dots + x_{il} \cdot y_{lj}$$

Příklad na nalezení inverzní matice

K následujícím maticím nalezněte inverzní matice.

$$1 \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 13 & 10 & 8 \\ 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 13 & 10 & 8 & | & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 4 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-13r_1 \\ -6r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & | & -13 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & -6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & -6 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & | & -13 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ & \xrightarrow{-r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & -6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & -4 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & | & 4 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & | & 4 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \\ & \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pracovní list 2

$$\begin{array}{l}
 U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -13 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\
 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -13 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & -13 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 U_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad U_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad U_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -4 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 4 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & -3 \end{array} \right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Levá strana matice

$$U_6 \cdot U_5 \cdot U_4 \cdot U_3 \cdot U_2 \cdot U_1 \cdot A = E$$

$$\downarrow \\
 A^{-1}$$

Prává strana matice $U_6 \cdot U_5 \cdot U_4 \cdot U_3 \cdot U_2 \cdot U_1 \cdot E = A^{-1}$