Cvičení 10 – Úloha 10.6

Úloha 10.6. Pro lineární zobrazení $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ je

$$\operatorname{Ker}\psi = \langle (2;2;1)^T, (1;0;1)^T \rangle, \quad \operatorname{Im}\psi = \langle (1;0;1;1)^T \rangle.$$

Sestrojte matici zobrazení ψ.

Řešení

Ze zadání můžeme odvodit typ matice A lineárního zobrazení: 4×3. Vektor generující obor hodnot může být zároveň prvním sloupcem matice. Dostáváme tedy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \\ 1 & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}.$$

Zbývající prvky matice dopočítáme díky vektorům $\operatorname{Ker}\psi$. Pro ně totiž platí $A \cdot (2;2;1)^T = (0;0;0;0)^T$ a $A \cdot (1;0;1)^T = (0;0;0;0)^T$. Z toho vycházejí čtyři systémy dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + a_{12} \cdot 2 + a_{13} \cdot 1 &= 0 \\ 1 \cdot 1 + a_{12} \cdot 0 + a_{13} \cdot 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 \cdot 2 + a_{22} \cdot 2 + a_{23} \cdot 1 &= 0 \\ 0 \cdot 1 + a_{22} \cdot 0 + a_{23} \cdot 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + a_{32} \cdot 2 + a_{33} \cdot 1 &= 0 \\ 1 \cdot 1 + a_{32} \cdot 0 + a_{33} \cdot 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + a_{42} \cdot 2 + a_{43} \cdot 1 &= 0 \\ 1 \cdot 1 + a_{42} \cdot 0 + a_{43} \cdot 1 &= 0 \end{aligned}$$

Vyřešením těchto systémů, z nichž první, třetí a čtvrtý jsou v podstatě stejné, dostáváme kýženou matici A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$