MA0005 Algebra 2, 11. seminář

14. 12. 2021

Náplň cvičení

1. Matice přechodu
   - Matice přechodu od jedné báze k druhé bázi
   - Změna matice lineárního zobrazení při změně báze
   - Změna matice lineární transformace při změně báze
2. Vlastní čísla a vlastní vektory

Literatura a zdroje

- Horák, P.: *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I*. 2. vydání. Masarykova univerzita v Brně, 2002. ISBN 80-210-1853-4.
- Isibalo.com: *Matematika – Lineární algebra*. Dostupné z: `https://isibalo.com/matematika/linearni-algebra`.
- Fiala, J. a kol. Sbírka úloh z matematiky. Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy, 2008. Dostupné z: `https://kam.mff.cuni.cz/~sbirka`.

Motivace: Ve vektorovém prostoru V dimenze n jsou dány dvě různé báze

$$\alpha = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots \vec{e_n}), \quad \beta = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \ldots \vec{f_n})$$

Matice přechodu – motivace

Motivace: Ve vektorovém prostoru V dimenze n jsou dány dvě různé báze

$$\alpha = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots \vec{e_n}), \quad \beta = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \dots \vec{f_n})$$

Chceme-li vektor $\vec{u}_\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ zadaný v souřadnicích báze α převést do souřadnic báze β, hledáme lineární kombinaci $\vec{u}_\alpha$ pomocí vektorů báze β,

Matice přechodu – motivace

Motivace: Ve vektorovém prostoru V dimenze n jsou dány dvě různé báze

$$\alpha = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots \vec{e_n}), \quad \beta = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \dots \vec{f_n})$$

Chceme-li vektor $\vec{u}_\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ zadaný v souřadnicích báze α převést do souřadnic báze β, hledáme lineární kombinaci $\vec{u}_\alpha$ pomocí vektorů báze β, tedy hledáme $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) = \vec{f_1} \cdot x_1 + \vec{f_2} \cdot x_2 + \dots + \vec{f_n} \cdot x_n,$$

Matice přechodu – motivace

Motivace: Ve vektorovém prostoru V dimenze n jsou dány dvě různé báze

$$\alpha = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots \vec{e_n}), \quad \beta = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \dots \vec{f_n})$$

Chceme-li vektor $\vec{u}_\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ zadaný v souřadnicích báze α převést do souřadnic báze β, hledáme lineární kombinaci $\vec{u}_\alpha$ pomocí vektorů báze β, tedy hledáme $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) = \vec{f_1} \cdot x_1 + \vec{f_2} \cdot x_2 + \dots + \vec{f_n} \cdot x_n,$$

což vede na řešení systému $\vec{u} = \beta \cdot \vec{x}$, tedy řešení soustavy

$$\beta | \vec{u} = \left(\begin{array}{cccc|c} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} & u_1 \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} & u_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} & u_n \end{array} \right)$$

Matice přechodu – motivace

Motivace: Ve vektorovém prostoru V dimenze n jsou dány dvě různé báze

$$\alpha = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots \vec{e_n}), \quad \beta = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \dots \vec{f_n})$$

Chceme-li vektor $\vec{u}_\alpha = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ zadaný v souřadnicích báze α převést do souřadnic báze β, hledáme lineární kombinaci $\vec{u}_\alpha$ pomocí vektorů báze β, tedy hledáme $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tak, aby

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) = \vec{f_1} \cdot x_1 + \vec{f_2} \cdot x_2 + \dots + \vec{f_n} \cdot x_n,$$

což vede na řešení systému $\vec{u} = \beta \cdot \vec{x}$, tedy řešení soustavy

$$\beta | \vec{u} = \left(\begin{array}{cccc|c} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} & u_1 \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} & u_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} & u_n \end{array} \right)$$

Budeme takovou soustavu řešit pro každý vektor zvlášť?

Matice přechodu od jedné báze k druhé bázi

Libovolný vektor $\vec{e_i}$ báze α lze vyjádřit v bázi β takto:

$$\vec{e_i} = \vec{f_1} \cdot p_{1i} + \vec{f_2} \cdot p_{2i} + \cdots + \vec{f_n} \cdot p_{ni} = \sum_{k=1}^{n} \vec{f_k} \cdot p_{ki},$$

kde $(p_{1i}, p_{2i}, \ldots, p_{ni})$ je vektor $\vec{e_i}$ vyjádřený v bázi β.

Matice přechodu od jedné báze k druhé bázi

Libovolný vektor $\vec{e_i}$ báze α lze vyjádřit v bázi β takto:

$$\vec{e_i} = \vec{f_1} \cdot p_{1i} + \vec{f_2} \cdot p_{2i} + \cdots + \vec{f_n} \cdot p_{ni} = \sum_{k=1}^{n} \vec{f_k} \cdot p_{ki},$$

kde $(p_{1i}, p_{2i}, \ldots, p_{ni})$ je vektor $\vec{e_i}$ vyjádřený v bázi β.

Matice přechodu

Maticí přechodu $P_{\beta,\alpha}$ od báze β k bázi α rozumíme matici, pro níž platí

$$\alpha = \beta \cdot P_{\beta,\alpha} \tag{1}$$

Matice přechodu od jedné báze k druhé bázi

Libovolný vektor $\vec{e_i}$ báze α lze vyjádřit v bázi β takto:

$$\vec{e_i} = \vec{f_1} \cdot p_{1i} + \vec{f_2} \cdot p_{2i} + \cdots + \vec{f_n} \cdot p_{ni} = \sum_{k=1}^{n} \vec{f_k} \cdot p_{ki},$$

kde $(p_{1i}, p_{2i}, \ldots, p_{ni})$ je vektor $\vec{e_i}$ vyjádřený v bázi β.

Matice přechodu

Maticí přechodu $P_{\beta,\alpha}$ od báze β k bázi α rozumíme matici, pro níž platí

$$\alpha = \beta \cdot P_{\beta,\alpha} \tag{1}$$

Poznámka:

- Vektory obou bází se ve vztahu (1) zapisují sloupcově.
- Matice přechodu $P_{\beta,\alpha}$ je regulární.
- Matice $(P_{\beta,\alpha})^{-1} = P_{\alpha,\beta}$ je maticí přechodu od báze α k bázi β a platí tento vztah:

$$\beta = \alpha \cdot P_{\alpha,\beta} \tag{2}$$

Matice přechodu – příklady

Převádění souřadnic vektorů při změně báze: Pro vektory $\vec{u}_\alpha, \vec{v}_\beta$ zadané v bázích α, resp. β používáme tyto matice přechodu:

- $\vec{u}_\beta = P_{\beta,\alpha} \cdot \vec{u}_\alpha$
- $\vec{v}_\alpha = P_{\alpha,\beta} \cdot \vec{v}_\beta$

Příklad 1

Jsou dány dvě různé báze α, β vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$. Najděte matice přechodu $P_{\beta,\alpha}, P_{\alpha,\beta}$ a určete souřadnice vektoru $\vec{u}_\alpha = (1, 2, 1)$ v bázi β a souřadnice vektoru $\vec{v}_\beta = (-1, 0, 3)$ v bázi α.

1. $\alpha = ((1, 0, 1); (2, 1, 1); (0, 0, 2))$,
   $\beta = ((0, 1, 1); (1, 0, 2); (2, 0, 2))$.
2. $\alpha = ((1, 0, 2); (2, 1, 1); (3, 2, 4))$,
   $\beta = ((3, 3, 0); (2, 2, 4); (0, 4, 3))$.
3. $\alpha = ((1, 2, 0); (2, 1, 1); (1, 0, 1))$,
   $\beta = ((2, 2, 1); (1, 2, 1); (0, 0, 2))$.

Výsledky: na dalším slajdu.

Výsledky Příkladu 1

1. $P_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $A_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$,

$(1,2,1)_\alpha = (2,-2,\frac{7}{2})_\beta, (-1,0,3)_\beta = (8,-1,-1)_\alpha$

2. $P_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{5}{24} \\ \frac{11}{16} & \frac{7}{16} & \frac{19}{16} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$, $P_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{17}{4} \\ \frac{3}{2} & -1 & -\frac{7}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & \frac{15}{4} \end{pmatrix}$,

$(1,2,1)_\alpha = (\frac{5}{6}, \frac{11}{4}, -1)_\beta, (-1,0,3)_\beta = (-\frac{21}{2}, -12, \frac{21}{2})_\alpha$

3. $P_{\beta,\alpha} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 6 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$,

$(1,2,1)_\alpha = (4,-2,\frac{1}{2})_\beta, (-1,0,3)_\beta = (5,-12,17)_\alpha$

Změna matice lineárního zobrazení při změně báze – příklady

Příklad 2

Lineární zobrazení $\varphi : U \to V$ je zadáno maticí A_S ve standardních bázích U, V. Pro zadané báze α prostoru U a β prostoru V určete matice $A_{S,\alpha}, A_{\beta,S}, A_{\beta,\alpha}$.

1. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $A_S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,
   $\alpha = ((1,2);(-2,1))$, $\beta = ((1,1,1);(1,1,0);(1,2,0))$.
2. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $A_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha = ((1,0,1);(1,1,1);(1,2,0))$,
   $\beta = ((1,2,-1,0);(0,1,-1,-2);(-1,0,0,-2);(2,1,0,-3))$.

Změna matice lineárního zobrazení při změně báze – příklady

Příklad 2

Lineární zobrazení $\varphi : U \to V$ je zadáno maticí A_S ve standardních bázích U, V. Pro zadané báze α prostoru U a β prostoru V určete matice $A_{S,\alpha}, A_{\beta,S}, A_{\beta,\alpha}$.

3. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $A_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha = ((1,1,1);(1,0,4);(1,4,0))$, $\beta = ((1,0);(4,1))$.

Výsledky: na dalším slajdu.

Výsledky Příkladu 2

1. $A_{S,\alpha} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $A_{\beta,S} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $A_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -10 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

2. $A_{S,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_{\beta,S} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & 12 \\ -11 & -5 & -19 \\ 3 & 2 & 16 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,

$A_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{16}{7} & 3 & 2 \\ -\frac{30}{7} & -5 & -3 \\ \frac{19}{7} & 3 & 1 \\ \frac{5}{7} & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $A_{S,\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$, $A_{\beta,S} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$A_{\beta,\alpha} = \begin{pmatrix} -6 & -15 & -11 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

Změna matice lineární transformace při změně báze – příklady

Příklad 3

Lineární transformace $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je zadána maticí A_S ve standardní bázi prostoru $\mathbb{R}^3$. Pro bázi

$$\alpha = ((1,1,1);(1,1,0);(1,2,0))$$

prostoru $\mathbb{R}^3$ určete matice $A_{S,\alpha}, A_{\alpha,S}, A_{\alpha,\alpha}$.

1. $A_S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$,
2. $A_S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 7 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,
3. $A_S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Výsledky Příkladu 3

1. $A_{S,\alpha} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 9 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $A_{\alpha,S} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ -4 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 6 \\ -4 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

2. $A_{S,\alpha} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 6 & 5 & 8 \\ 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}$, $A_{\alpha,S} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 \\ -7 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,
$A_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ -5 & -5 & -3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Výsledky Příkladu 3

3. $A_{S,\alpha} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$, $A_{\alpha,S} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -4 & -5 & 6 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$,
$A_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 8 \\ -3 & -9 & -14 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Vlastní čísla a vlastní vektory

Vlastním vektorem lineárního zobrazení $\varphi : V \to V$ s maticí A rozumíme takový nenulový vektor $\vec{u} \in V$, pro který platí

$$\varphi(\vec{u}) = A \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u}.$$

Reálné číslo λ z předchozího vztahu se nazývá vlastní číslo odpovídající vlastnímu vektoru $\vec{u}$.

Vlastní čísla a vlastní vektory

Vlastním vektorem lineárního zobrazení $\varphi : V \to V$ s maticí A rozumíme takový nenulový vektor $\vec{u} \in V$, pro který platí

$$\varphi(\vec{u}) = A \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u}.$$

Reálné číslo λ z předchozího vztahu se nazývá vlastní číslo odpovídající vlastnímu vektoru $\vec{u}$.

Poznámka:

- Vlastním vektorům se také říká "invariantní směry" či "invariantní vektory".
- Je-li $\vec{u}$ vlastní vektor, pak i vektor $\alpha \cdot \vec{u}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ je vlastní.
- Vlastní vektory odpovídající jedné vlastní hodnotě λ tvoří vektorový podprostor.

Vlastní čísla a vlastní vektory – postup nalezení

Upravíme vztah z definice vlastního vektoru:

$$
\begin{aligned}
A \cdot \vec{u} &= \lambda \cdot \vec{u} \\
A \cdot \vec{u} &= \lambda \cdot E \cdot \vec{u} \quad \text{(E: jednotková matice)} \\
(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{u} &= \vec{o}
\end{aligned}
$$

Vlastní čísla a vlastní vektory – postup nalezení

Upravíme vztah z definice vlastního vektoru:

$$\begin{aligned} A \cdot \vec{u} &= \lambda \cdot \vec{u} \\ A \cdot \vec{u} &= \lambda \cdot E \cdot \vec{u} \quad \text{(E: jednotková matice)} \\ (A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{u} &= \vec{o} \end{aligned}$$

Postup nalezení vlastních čísel a vektorů

1. Najdeme determinant matice $A - \lambda \cdot E$, z něhož nám vyjde rovnice s neznámou λ, kterou vyřešíme.
2. Do systému $(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{u} = \vec{o}$ dosadíme vypočítané hodnoty λ a nalezneme vlastní vektory jako množinu řešení systému.

Příklad 4

Lineární transformace φ vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ je dána maticí A ve standardní bázi. Nalezněte vlastní čísla a jim odpovídající vlastní vektory lineární transformace φ.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Výsledky příkladu 4

a) Pro $\lambda_1 = 6: \ \vec{n_1} = (3, 2)$, pro $\lambda_2 = -7: \ \vec{n_2} = (-2, 3)$;

b) pro $\lambda_1 = 6: \ \vec{n_1} = (1, 1)$, pro $\lambda_2 = -1: \ \vec{n_2} = (-5, 2)$;

c) pro $\lambda_1 = 9: \ \vec{n_1} = (5, 2)$, pro $\lambda_2 = -5: \ \vec{n_2} = (-1, 1)$;

d) pro $\lambda = 2: \ \vec{n} = (1, 0)$;

e) pro $\lambda_1 = 1: \ \vec{n_1} = (-1, 1)$, pro $\lambda_2 = -1: \ \vec{n_2} = (1, 1)$.

Vlastní čísla a vlastní vektory – příklady

Příklad 5

Lineární transformace φ vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ je dána maticí A ve standardní bázi. Nalezněte vlastní čísla a jim odpovídající vlastní vektory lineární transformace φ.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Vlastní čísla a vektory – pokračování příkladu 5

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Vlastní čísla a vektory – pokračování příkladu 5

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Výsledky:

a) Pro $\lambda_1 = 1: \ \vec{n_1} = (-1, 0, 1)$, pro $\lambda_2 = 2: \ \vec{n_2} = (-1, -1, 1)$, pro $\lambda_3 = 3: \ \vec{n_3} = (0, -1, 1)$;

b) pro $\lambda = -1: \ \vec{n} = (2, -1, 1)$;

c) pro $\lambda = -1: \ \vec{n} = (-1, -1, 1)$;

d) pro $\lambda_1 = 2: \ \vec{n_1} = (1, 0, 0)$, pro $\lambda_2 = -1: \ \vec{n_2} = (0, -1, 1)$, pro $\lambda_3 = 1: \ \vec{n_3} = (1, 0, 1)$;

e) pro $\lambda_1 = 0: \ \vec{n_1} = (4, 4, 1)$, pro $\lambda_2 = 3: \ \vec{n_2} = (1, -2, 1)$.