MA0005 Algebra 2, 3. seminář

12. 10. 2021

Náplň cvičení

1. Analytická geometrie v prostoru I
   - Přímka v prostoru
   - Vzájemná poloha přímek v prostoru
   - Rovina – parametrické rovnice
   - Rovina – obecná rovnice

Literatura

- Petáková, J.: *Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Prometheus, 1998. ISBN 978-80-7196-099-7.

Přímka v prostoru

Příklad 15.1.2: Napište parametrické rovnice přímky p, která je dána body $A[1; -1; 3]$, $B[2; 3; 0]$. Potom přímku p nakreslete v soustavě souřadnic, vyznačte viditelnost. Vypočítejte souřadnice bodů, ve kterých přímka p protíná souřadnicové roviny. Ověřte, zda výpočet souhlasí s obrázkem.

Příklad 15.1.2: Napište parametrické rovnice přímky p, která je dána body $A[1; -1; 3]$, $B[2; 3; 0]$. Potom přímku p nakreslete v soustavě souřadnic, vyznačte viditelnost. Vypočítejte souřadnice bodů, ve kterých přímka p protíná souřadnicové roviny. Ověřte, zda výpočet souhlasí s obrázkem.

Příklad 15.1.3: Je dána přímka $p = \{[1 - 2k; 2 + 3k; 1 + k], k \in \mathbb{R}\}$.

a) Rozhodněte, zda body $C[5; 8; 3], D[3; -1; 0]$ leží na přímce p.

b) Určete $y, z \in \mathbb{R}$ tak, aby bod $E[9; y; z]$ ležel na přímce p.

Přímka v prostoru

Příklad 15.1.2: Napište parametrické rovnice přímky p, která je dána body $A[1; -1; 3]$, $B[2; 3; 0]$. Potom přímku p nakreslete v soustavě souřadnic, vyznačte viditelnost. Vypočítejte souřadnice bodů, ve kterých přímka p protíná souřadnicové roviny. Ověřte, zda výpočet souhlasí s obrázkem.

Příklad 15.1.3: Je dána přímka $p = \{[1 - 2k; 2 + 3k; 1 + k], k \in \mathbb{R}\}$.

a) Rozhodněte, zda body $C[5; 8; 3], D[3; -1; 0]$ leží na přímce p.

b) Určete $y, z \in \mathbb{R}$ tak, aby bod $E[9; y; z]$ ležel na přímce p.

Výsledky:
2. $p : x = 1 + t, y = -1 + 4t, z = 3 - 3t, t \in \mathbb{R}$,
$P_{xy}[2; 3; 0], P_{xz}[\frac{5}{4}; 0; \frac{9}{4}], P_{yz}[0; -5; 6]$.
3.a) $C \notin p, D \in p$; b) $E[9; -10; -3]$.

Přímka v prostoru

Příklad 15.1.4: Jsou dány body $A[2;3;-1]$, $B[4;3;-2]$.

a) Rozhodněte, zda body $K[0;4;2]$, $L[2\sqrt{3};3;-\sqrt{3}]$ leží na přímce AB.

b) Určete $r, s \in \mathbb{R}$ tak, aby bod $M[r;2r;s]$ ležel na přímce AB.

Přímka v prostoru

Příklad 15.1.4: Jsou dány body $A[2; 3; -1]$, $B[4; 3; -2]$.

a) Rozhodněte, zda body $K[0; 4; 2]$, $L[2\sqrt{3}; 3; -\sqrt{3}]$ leží na přímce AB.

b) Určete $r, s \in \mathbb{R}$ tak, aby bod $M[r; 2r; s]$ ležel na přímce AB.

Příklad 15.1.5: Vypočítejte souřadnice bodů, ve kterých přímka $p = \{[2; 1 - t; 4t], t \in \mathbb{R}\}$ protíná souřadnicové roviny.

Přímka v prostoru

Příklad 15.1.4: Jsou dány body $A[2; 3; -1]$, $B[4; 3; -2]$.

a) Rozhodněte, zda body $K[0; 4; 2]$, $L[2\sqrt{3}; 3; -\sqrt{3}]$ leží na přímce AB.

b) Určete $r, s \in \mathbb{R}$ tak, aby bod $M[r; 2r; s]$ ležel na přímce AB.

Příklad 15.1.5: Vypočítejte souřadnice bodů, ve kterých přímka $p = \{[2; 1 - t; 4t], t \in \mathbb{R}\}$ protíná souřadnicové roviny.

Příklad 15.1.6: Jsou dány body $A[1; 4; 6], B[4; 1; -3]$.

a) Napište parametrické rovnice přímky AB.

b) Napište parametrické rovnice úsečky AB.

c) Napište parametrické rovnice polopřímky BA.

d) Napište parametrické rovnice přímky p_1, která je pravoúhlým průmětem přímky AB do souřadnicové roviny určené osou x a osou y.

e) Přímku AB i přímku p_1 nakreslete.

Přímka v prostoru

Příklad 15.1.4: Jsou dány body $A[2; 3; -1]$, $B[4; 3; -2]$.

a) Rozhodněte, zda body $K[0; 4; 2]$, $L[2\sqrt{3}; 3; -\sqrt{3}]$ leží na přímce AB.

b) Určete $r, s \in \mathbb{R}$ tak, aby bod $M[r; 2r; s]$ ležel na přímce AB.

Příklad 15.1.5: Vypočítejte souřadnice bodů, ve kterých přímka $p = \{[2; 1 - t; 4t], t \in \mathbb{R}\}$ protíná souřadnicové roviny.

Příklad 15.1.6: Jsou dány body $A[1; 4; 6], B[4; 1; -3]$.

a) Napište parametrické rovnice přímky AB.

b) Napište parametrické rovnice úsečky AB.

c) Napište parametrické rovnice polopřímky BA.

d) Napište parametrické rovnice přímky p_1, která je pravoúhlým průmětem přímky AB do souřadnicové roviny určené osou x a osou y.

e) Přímku AB i přímku p_1 nakreslete.

Výsledky: viz následující slajd.

Výsledky předchozích příkladů

4.a) $K \notin \leftrightarrow AB, L \in \leftrightarrow AB$, b) $M[\frac{3}{2}; 3; -\frac{3}{4}]$.

5. $P_{xz}[2; 0; 4], P_{xy}[2; 1; 0], P_{yz}$ neexistuje.

6. $x = 1 + t, y = 4 - t, z = 6 - 3t$, a) $t \in \mathbb{R}$, b) $t \in \langle 0, 3 \rangle$,
c) $t \in (-\infty, 3\rangle$, d) $x = 1 + k, y = 4 - k, z = 0, k \in \mathbb{R}$.

Přímka v prostoru

Příklad 15.1.7: Napište parametrické rovnice přímky q, která prochází bodem $M[0;4;5]$ a je rovnoběžná s přímkou
$p = \{[2+t; 1-t; 3+5t], t \in \mathbb{R}\}$.

Přímka v prostoru

Příklad 15.1.7: Napište parametrické rovnice přímky q, která prochází bodem $M[0; 4; 5]$ a je rovnoběžná s přímkou $p = \{[2 + t; 1 - t; 3 + 5t], t \in \mathbb{R}\}$.

Příklad 15.1.8: Napište parametrické rovnice přímky q, která prochází bodem $K[2; 4; 1]$ a je rovnoběžná s osou z.

Přímka v prostoru

Příklad 15.1.7: Napište parametrické rovnice přímky q, která prochází bodem $M[0; 4; 5]$ a je rovnoběžná s přímkou $p = \{[2 + t; 1 - t; 3 + 5t], t \in \mathbb{R}\}$.

Příklad 15.1.8: Napište parametrické rovnice přímky q, která prochází bodem $K[2; 4; 1]$ a je rovnoběžná s osou z.

Příklad 15.1.9: Napište parametrické rovnice přímky q, která prochází bodem $N[1; -2; 3]$ rovnoběžně se souřadnicovou rovinou určenou osami y a z a je různoběžná s osou x.

Přímka v prostoru

Příklad 15.1.7: Napište parametrické rovnice přímky q, která prochází bodem $M[0;4;5]$ a je rovnoběžná s přímkou $p = \{[2+t; 1-t; 3+5t], t \in \mathbb{R}\}$.

Příklad 15.1.8: Napište parametrické rovnice přímky q, která prochází bodem $K[2;4;1]$ a je rovnoběžná s osou z.

Příklad 15.1.9: Napište parametrické rovnice přímky q, která prochází bodem $N[1;-2;3]$ rovnoběžně se souřadnicovou rovinou určenou osami y a z a je různoběžná s osou x.

Příklad 15.1.10: Napište parametrické rovnice osy x.

Přímka v prostoru

Příklad 15.1.7: Napište parametrické rovnice přímky q, která prochází bodem $M[0;4;5]$ a je rovnoběžná s přímkou $p = \{[2+t; 1-t; 3+5t], t \in \mathbb{R}\}$.

Příklad 15.1.8: Napište parametrické rovnice přímky q, která prochází bodem $K[2;4;1]$ a je rovnoběžná s osou z.

Příklad 15.1.9: Napište parametrické rovnice přímky q, která prochází bodem $N[1;-2;3]$ rovnoběžně se souřadnicovou rovinou určenou osami y a z a je různoběžná s osou x.

Příklad 15.1.10: Napište parametrické rovnice osy x.

Výsledky:

7. $x = k, y = 4 - k, z = 5 + 5k, k \in \mathbb{R}$.
8. $x = 2, y = 4, z = 1 + k, k \in \mathbb{R}$.
9. $x = 1, y = -2 - 2t, z = 3 + 3t, t \in \mathbb{R}$.
10. $x = k, y = 0, z = 0, k \in \mathbb{R}$.

Vzájemná poloha přímek p, q v prostoru

Vzájemná poloha přímek v prostoru

Vzájemná poloha přímek p, q v prostoru

1. p, q splývají v jednu přímku, tj. $p = q$.

Vzájemná poloha přímek v prostoru

Vzájemná poloha přímek p, q v prostoru

1. p, q splývají v jednu přímku, tj. $p = q$.
2. p, q jsou rovnoběžné, ale ne stejné, tj. $p \parallel q \wedge p \neq q$

Vzájemná poloha přímek v prostoru

Vzájemná poloha přímek p, q v prostoru

1. p, q splývají v jednu přímku, tj. $p = q$.
2. p, q jsou rovnoběžné, ale ne stejné, tj. $p \parallel q \wedge p \neq q$
3. p, q jsou různoběžné, tedy mají společný průnik, v němž se protínají

Vzájemná poloha přímek v prostoru

Vzájemná poloha přímek p, q v prostoru

1. p, q splývají v jednu přímku, tj. $p = q$.
2. p, q jsou rovnoběžné, ale ne stejné, tj. $p \parallel q \wedge p \neq q$
3. p, q jsou různoběžné, tedy mají společný průnik, v němž se protínají
4. p, q jsou mimoběžné: nemají průnik, nejsou rovnoběžné

Vzájemná poloha přímek v prostoru

Vzájemná poloha přímek p, q v prostoru

1. p, q splývají v jednu přímku, tj. $p = q$.
2. p, q jsou rovnoběžné, ale ne stejné, tj. $p \parallel q \wedge p \neq q$
3. p, q jsou různoběžné, tedy mají společný průnik, v němž se protínají
4. p, q jsou mimoběžné: nemají průnik, nejsou rovnoběžné

Poznámka k předchozímu

Jsou-li přímky zadány parametrickými rovnicemi,
$p : X = A + t \cdot \vec{u}$, $q : X = B + s \cdot \vec{v}$, pak řešením systému rovnic
$S : A + t \cdot \vec{u} = B + s \cdot \vec{v}$ zjistíme vzájemnou polohu přímek:

1. S má nekonečno mnoho řešení a $\vec{u}$ je násobkem $\vec{v}$: p, q splývají
2. S nemá řešení a $\vec{u}$ je násobkem $\vec{v}$: p, q jsou rovnoběžné různé
3. S má jedno řešení a $\vec{u}$ není násobkem $\vec{v}$: p, q jsou různoběžné
4. S nemá řešení a $\vec{u}$ není násobkem $\vec{v}$: p, q jsou mimoběžné

Vzájemná poloha přímek v prostoru

Příklad 15.2.11: Vyšetřete vzájemnou polohu přímek p, q. Jsou-li přímky různoběžné, určete souřadnice jejich průsečíku.

a) $p = \{[-6 + t; 7 - t; 2t],\ t \in \mathbb{R}\}$
$q = \{[-5 - k; 3 - 2k; 5 + k],\ k \in \mathbb{R}\}$

b) $p = \{[1 + t; 2 - 2t; t],\ t \in \mathbb{R}\}$
$q = \{[4 - 2k; 1 + 4k; 3 - 2k],\ k \in \mathbb{R}\}$

c) $p = \{[2 - 3t; 1 + t; 4 - t],\ t \in \mathbb{R}\}$
$q = \{[-4 + 3k; 3 - k; 2 + k],\ k \in \mathbb{R}\}$

d) $p = \{[2t; 3 - t; 4 - t],\ t \in \mathbb{R}\}$
$q = \{[2 - 2k; -1 + k; 6 + 2k],\ k \in \mathbb{R}\}$

e) $p = \{[2; 4 - t; 1 + 2t],\ t \in \mathbb{R}\}$
$q = \{[1 - k; 2 + 3k; -1 - 2k],\ k \in \mathbb{R}\}$

f) $p = \{[2; 1 + t; 3],\ t \in \mathbb{R}\}$
$q = \{[k; 4; 1 + k],\ k \in \mathbb{R}\}$

Výsledky: na dalším snímku.

Příklad 15.2.12: Nakreslete přímky p, q, odhadněte jejich vzájemnou polohu a potom svůj odhad ověřte výpočtem.

a) $p = \{[1; 0; t], t \in \mathbb{R}\},\ \ q = \{[0; 2 + 2k; -3k], k \in \mathbb{R}\}$

b) $p = \{[3; 3; 4 - t], t \in \mathbb{R}\},\ \ q = \{[1; 1; 2k], k \in \mathbb{R}\}$

Výsledky:

11a) p, q různoběžky, $P[-4; 5; 4]$,
11b) p, q různé rovnoběžky,
11c) $p = q$,
11d) p, q mimoběžky,
11e) p, q mimoběžky,
11f) p, q různoběžky, $P[2; 4; 3]$.

Příklad 15.2.12: Nakreslete přímky p, q, odhadněte jejich vzájemnou polohu a potom svůj odhad ověřte výpočtem.

a) $p = \{[1; 0; t], t \in \mathbb{R}\}, \ q = \{[0; 2 + 2k; -3k], k \in \mathbb{R}\}$

b) $p = \{[3; 3; 4 - t], t \in \mathbb{R}\}, \ q = \{[1; 1; 2k], k \in \mathbb{R}\}$

Výsledky:

11a) p, q různoběžky, $P[-4; 5; 4]$,
11b) p, q různé rovnoběžky,
11c) $p = q$,
11d) p, q mimoběžky,
11e) p, q mimoběžky,
11f) p, q různoběžky, $P[2; 4; 3]$.

12a) p, q mimoběžky, b) p, q různé rovnoběžky.

Rovina

Dvě možná zadání roviny v prostoru

1. parametrickými rovnicemi $X = A + t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$, kde $\vec{u}$ není násobkem $\vec{v}$.
2. obecnou rovnicí $ax + by + cz + d = 0$, přičemž $\vec{n} = (a, b, c)$ je normálový vektor.

Vektorový součin

Uvažujme prostor $\mathbb{R}^3$. Vektorový součin $\vec{u} \times \vec{v}$ dvou vektorů $\vec{u}, \vec{v}$, jejichž žádné umístění neleží na jedné přímce, je vektor $\vec{w}$ kolmý k oběma vektorům $\vec{u}, \vec{v}$, který s nimi tvoří pravotočivou bázi.

Poznámka

a) Platí $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin \alpha$, kde α je úhel svíraný vektory $\vec{u}, \vec{v}$.

b) Pro souřadnice vektorového součinu $\vec{w}$ vektorů $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ a $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$ platí:

$$w = u \times v = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

c) Velikost vektorového součinu $\vec{u} \times \vec{v}$ je rovna obsahu rovnoběžníku určeného vektory $\vec{u}, \vec{v}$.

d) Normálový vektor roviny je kolmý na všechny vektory v ní ležící.

Rovina – parametrické rovnice

Příklad 15.3.16: Dokažte, že body $A[2; 1; 6]$, $B[0; -1; -6]$, $C[-1; 2; 0]$ určují rovinu a napište její parametrické rovnice.

a) Vypočítejte souřadnice bodů, ve kterých rovina ABC protíná osu x, osu y a osu z.

b) Danou rovinu znázorněte ve zvolené soustavě souřadnic.

c) Rozhodněte, zda body $K[2; 4; 15]$, $L[-3; 2; 6]$ leží v rovině ABC.

d) Vypočítejte $z \in \mathbb{R}$ tak, aby bod $M[-2; 1; z]$ ležel v rovině ABC.

Příklad 15.3.17: Je dána rovina
$\varrho = \{[1 + t + k; 2 + 3t - k; 5t + k],\ k, t \in \mathbb{R}\}$.

a) Vypočítejte průsečíky roviny ϱ se souřadnicovými osami a rovinu ϱ nakreslete.

b) Napište rovnice přímek, ve kterých rovina ϱ protíná souřadnicové roviny.

Výsledky: na dalším slajdu.

Výsledky příkladů

16.
$x = 2 - t + k, y = 1 - t - 3k, z = 6 - 6t - 6k,\ \ k, t \in \mathbb{R};$
a) $P_x[1; 0; 0], P_y[0; 1; 0], P_z[0; 0; -3],$
c) $K \in ABC, L \notin ABC,$
d) $z = -6.$

17.
a) $P_x[2; 0; 0], P_y[0; 4; 0], P_z[0; 0; -4];$
b) $P_{xy} = \{[2 + t; -2t; 0], t \in \mathbb{R}\}, P_{xz} = \{[2 + k; 0; 2k], k \in \mathbb{R}\},$
$P_{yz} = \{[0; 4 + m; m], m \in \mathbb{R}\}.$

Rovina – obecná rovnice

Příklad 15.3.19: Dokažte, že dané tři body určují rovinu. V případě, že rovinu určují, napište její obecnou rovnici. Vypočítejte souřadnice průsečíků roviny s osami souřadnic a rovinu ve zvolené soustavě souřadnic znázorněte.

a) $A[1; 1; 1], B[5; 1; -3], C[2; 0; 2]$
b) $A[1; -3; -1], B[2; 2; 0], C[-4; 5; 5]$
c) $A[1; 2; -3], B[0; 1; 2], C[2; 3; -8]$
d) $A[0; 0; 0], B[1; 2; -2], C[-3; -6; -5]$

Příklad 15.3.20: Dokažte, že přímka p a bod A určují rovinu. Napište její obecnou rovnici.

a) $p = \{[3 - t; -2 + t; 4 + 2t], t \in \mathbb{R}\},\ A[0; -1; 5]$
b) $p = \{[2; 4; k], k \in \mathbb{R}\},\ A[0; 3; 0]$
c) $p = \{[1 + t; 2 - 2t; 0], t \in \mathbb{R}\},\ A[1; 0; 3]$

Výsledky: na dalším slajdu.

Výsledky příkladů

19.
a) $x + 2y + z - 4 = 0$,
b) $2x - y + 3z - 2 = 0$,
c) body A, B, C leží na přímce, rovinu neurčují,
d) $2x - y = 0$.

20.
a) $x + 5y - 2z + 15 = 0$,
b) $x - 2y + 6 = 0$,
c) $6x + 3y + 2z - 12 = 0$.

Rovina – obecná rovnice

Příklady 15.3.21-23: Dokažte, že přímky p, q určují rovinu. Napište její obecnou rovnici.

21. $p = \{[\frac{5}{2}; 2 + t; 0], t \in \mathbb{R}\}, \; q = \{[3; 1 + k; 2], k \in \mathbb{R}\}$
22. $p = \{[1 - t; 2 + t; 3 + 2t], t \in \mathbb{R}\}, \; q = \{[k; 1 - k; 1 - 2k], k \in \mathbb{R}\}$
23. $p = \{[2; t; 4 - t], t \in \mathbb{R}\}, \; q = \{[1 + k; 2 + k; k], k \in \mathbb{R}\}$

Příklady 15.3.21-23: Dokažte, že přímky p, q určují rovinu. Napište její obecnou rovnici.

21. $p = \{[\frac{5}{2}; 2+t; 0], t \in \mathbb{R}\}, \; q = \{[3; 1+k; 2], k \in \mathbb{R}\}$
22. $p = \{[1-t; 2+t; 3+2t], t \in \mathbb{R}\}, \; q = \{[k; 1-k; 1-2k], k \in \mathbb{R}\}$
23. $p = \{[2; t; 4-t], t \in \mathbb{R}\}, \; q = \{[1+k; 2+k; k], k \in \mathbb{R}\}$

Výsledky:

21. $4x - z - 10 = 0$, 22. $2y - z - 1 = 0$, 23. $2x - y - z = 0$.