MA0005 Algebra 2, 4. seminář

19. 10. 2021

Náplň cvičení

1. Analytická geometrie v prostoru II
   - Rovina v prostoru
   - Vzájemná poloha přímky a roviny
   - Vzájemná poloha dvou rovin
   - Vzájemná poloha tří rovin

Literatura

- Petáková, J.: *Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Prometheus, 1998. ISBN 978-80-7196-099-7.

Způsoby zadání roviny ϱ

Rovina v prostoru

Způsoby zadání roviny ϱ

1. pomocí obecné rovnice: $ax + by + cz + d = 0$, kde $\vec{n} = (a, b, c)$ je **normálový vektor** roviny ϱ kolmý na všechny směrové vektory ležící v zadané rovině.

Rovina v prostoru

Způsoby zadání roviny ϱ

1. pomocí obecné rovnice: $ax + by + cz + d = 0$, kde $\vec{n} = (a, b, c)$ je **normálový vektor** roviny ϱ kolmý na všechny směrové vektory ležící v zadané rovině.
2. pomocí parametrických rovnic, k čemuž potřebujeme bod $A[a_1, a_2, a_3] \in \varrho$ a dva lineárně nezávislé **směrové vektory** roviny $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + t \cdot u_1 + s \cdot v_1, \\ y &= a_2 + t \cdot u_2 + s \cdot v_2, \\ z &= a_3 + t \cdot u_3 + s \cdot v_3, \end{aligned}$$

kde $t, s \in \mathbb{R}$.

Rovina v prostoru

Způsoby zadání roviny ϱ

1. pomocí obecné rovnice: $ax + by + cz + d = 0$, kde $\vec{n} = (a, b, c)$ je **normálový vektor** roviny ϱ kolmý na všechny směrové vektory ležící v zadané rovině.
2. pomocí parametrických rovnic, k čemuž potřebujeme bod $A[a_1, a_2, a_3] \in \varrho$ a dva lineárně nezávislé **směrové vektory** roviny $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$:

$$\begin{aligned} x &= a_1 + t \cdot u_1 + s \cdot v_1, \\ y &= a_2 + t \cdot u_2 + s \cdot v_2, \\ z &= a_3 + t \cdot u_3 + s \cdot v_3, \end{aligned}$$

kde $t, s \in \mathbb{R}$.

Poznámka: souřadnicové roviny mají tyto rovnice:
$\varrho_{xy} : z = 0, \ \varrho_{yz} : x = 0, \ \varrho_{xz} : y = 0.$

Vzájemná poloha přímky a roviny

Příklad 15.4.32: Vyšetřete vzájemnou polohu přímky p a roviny ϱ.

a) $p = \{[2 + t; 3 + 2t; 1 - t], t \in \mathbb{R}\}$, $\varrho : x - 2y + z - 5 = 0$

b) $p = \{[1 - 2k; 5 - k; -3 + 5k], k \in \mathbb{R}\}$, $\varrho : 3x - y + z - 11 = 0$

c) $p = \{[2s; 4 + s; -1], s \in \mathbb{R}\}$, $\varrho : x - 2y - 3z + 5 = 0$

Příklad 15.4.32: Vyšetřete vzájemnou polohu přímky p a roviny ϱ.

a) $p = \{[2+t; 3+2t; 1-t], t \in \mathbb{R}\}$, $\varrho: x - 2y + z - 5 = 0$

b) $p = \{[1-2k; 5-k; -3+5k], k \in \mathbb{R}\}$, $\varrho: 3x - y + z - 11 = 0$

c) $p = \{[2s; 4+s; -1], s \in \mathbb{R}\}$, $\varrho: x - 2y - 3z + 5 = 0$

Příklad 15.4.33: Vyšetřete vzájemnou polohu přímky AB, $A[-2; 0; -1]$, $B[2; 1; 4]$ a roviny ϱ, která je dána body $K[0; 0; 3]$, $L[-2; -1; 1]$, $M[0; 1; 4]$.

Příklad 15.4.32: Vyšetřete vzájemnou polohu přímky p a roviny ϱ.

a) $p = \{[2+t; 3+2t; 1-t], t \in \mathbb{R}\}$, $\varrho : x - 2y + z - 5 = 0$

b) $p = \{[1-2k; 5-k; -3+5k], k \in \mathbb{R}\}$, $\varrho : 3x - y + z - 11 = 0$

c) $p = \{[2s; 4+s; -1], s \in \mathbb{R}\}$, $\varrho : x - 2y - 3z + 5 = 0$

Příklad 15.4.33: Vyšetřete vzájemnou polohu přímky AB, $A[-2; 0; -1]$, $B[2; 1; 4]$ a roviny ϱ, která je dána body $K[0; 0; 3]$, $L[-2; -1; 1]$, $M[0; 1; 4]$.

Příklad 15.4.34: Vyšetřete vzájemnou polohu přímky q a roviny σ.

$$q = \{[2+t; 3t; 1-t], t \in \mathbb{R}\}, \sigma = \{[1+s+2r; 3s+3r; 1-s-3r], s, r \in \mathbb{R}\}$$

Výsledky: na dalším slajdu.

Výsledky příkladů

32.
a) přímka je různoběžná s rovinou, $P[0; -1; 3]$,
c) $p \parallel \varrho \wedge p \cap \varrho = \emptyset$,
d) přímka leží v rovině.

33. přímka je různoběžná s rovinou, $P[4; \frac{3}{2}; \frac{13}{2}]$.

34. $q \parallel \sigma \wedge q \cap \sigma = \emptyset$.

Vzájemná poloha dvou rovin

Příklad 15.5.37: Vyšetřete vzájemnou polohu rovin ϱ a σ. Ve všech případech též znázorněte roviny ϱ, σ v soustavě souřadnic. Jsou-li roviny různoběžné, napište parametrické rovnice jejich průsečnice a průsečnici zakreslete v obrázku.

a) $\varrho : 2x + 4y + z - 8 = 0, \quad \sigma : 2y + z - 6 = 0$

b) $\varrho : x + y - z - 2 = 0, \quad \sigma : 2x - y + z - 4 = 0$

c) $\varrho : x + y - 4 = 0, \quad \sigma : y + 2z - 6 = 0$

d) $\varrho : 2x + y - 3z + 6 = 0, \quad \sigma : 4x + 2y - 6z + 12 = 0$

e) $\varrho : 2x + y - 2z + 6 = 0, \quad \sigma : 4x + 2y - 4z + 6 = 0$

f) $\varrho : x - 4 = 0, \quad \sigma : y - 2 = 0$

Příklad 15.5.37: Vyšetřete vzájemnou polohu rovin ϱ a σ. Ve všech případech též znázorněte roviny ϱ, σ v soustavě souřadnic. Jsou-li roviny různoběžné, napište parametrické rovnice jejich průsečnice a průsečnici zakreslete v obrázku.

a) $\varrho : 2x + 4y + z - 8 = 0, \quad \sigma : 2y + z - 6 = 0$
b) $\varrho : x + y - z - 2 = 0, \quad \sigma : 2x - y + z - 4 = 0$
c) $\varrho : x + y - 4 = 0, \quad \sigma : y + 2z - 6 = 0$
d) $\varrho : 2x + y - 3z + 6 = 0, \quad \sigma : 4x + 2y - 6z + 12 = 0$
e) $\varrho : 2x + y - 2z + 6 = 0, \quad \sigma : 4x + 2y - 4z + 6 = 0$
f) $\varrho : x - 4 = 0, \quad \sigma : y - 2 = 0$

Příklad 15.5.38 Vyšetřete vzájemnou polohu rovin ϱ a σ:
$\varrho = \{[3 + t - k; 5 + t; -t + 2k],\ t, k \in \mathbb{R}\}$
$\sigma = \{[3 + s - 4p; 6 + 2s - 3p; 1 + 5p],\ s, p \in \mathbb{R}\}$

Výsledky: na dalším slajdu.

Výsledky příkladů

37.

a) různoběžné roviny, $p = \{[t; 1 - t; 4 + 2t],\ t \in \mathbb{R}\}$,
b) různoběžné roviny, $p = \{[2; t; t],\ t \in \mathbb{R}\}$,
c) různoběžné roviny, $p = \{[-2 + 2t; 6 - 2t; t],\ t \in \mathbb{R}\}$,
d) $\varrho = \sigma$,
e) různé rovnoběžné roviny,
f) různoběžné roviny, $p = \{[4; 2; t],\ t \in \mathbb{R}\}$.

38. Roviny jsou totožné.

Vzájemná poloha tří rovin

Vzájemná poloha tří rovin

1. všechny tři roviny jsou rovnoběžné a nemají průsečík, ani průsečnici
2. dvě roviny jsou rovnoběžné a třetí je protíná ve dvou rovnoběžných průsečnicích
3. všechny jsou různoběžné a protínají se v jedné průsečnici (svazek rovin)
4. všechny jsou různoběžné a po dvou se protínají v průsečnici (tyto tři průsečnice jsou rovnoběžné)
5. všechny jsou různoběžné a protínají se v jednom bodě (trs rovin)

Ilustrace všech pěti případů jsou dostupné na [této stránce].

Vzájemná poloha tří rovin

Příklad 15.6.40: Vyšetřete vzájemnou polohu tří rovin.

a) $\varrho_1 : 2x - y + z - 5 = 0, \quad \sigma_1 : x + y + 3z - 6 = 0,$
$\tau_1 : 3x + 2y - 4z + 7 = 0$

b) $\varrho_2 : x + y + z - 3 = 0, \quad \sigma_2 : 3x - 2y + z - 8 = 0,$
$\tau_2 : 4x - y + 2z + 1 = 0$

c) $\varrho_3 : x - y + 2z - 1 = 0, \quad \sigma_3 : x + 2y - z + 2 = 0,$
$\tau_3 : x - 2y + 3z - 2 = 0$

d) $\varrho_4 : x + y - z - 1 = 0, \quad \sigma_4 : x + y + z + 2 = 0,$
$\tau_4 : 2x + 2y - 2z + 1 = 0$

Příklad 15.6.40: Vyšetřete vzájemnou polohu tří rovin.

a) $\varrho_1 : 2x - y + z - 5 = 0, \quad \sigma_1 : x + y + 3z - 6 = 0,$
$\tau_1 : 3x + 2y - 4z + 7 = 0$

b) $\varrho_2 : x + y + z - 3 = 0, \quad \sigma_2 : 3x - 2y + z - 8 = 0,$
$\tau_2 : 4x - y + 2z + 1 = 0$

c) $\varrho_3 : x - y + 2z - 1 = 0, \quad \sigma_3 : x + 2y - z + 2 = 0,$
$\tau_3 : x - 2y + 3z - 2 = 0$

d) $\varrho_4 : x + y - z - 1 = 0, \quad \sigma_4 : x + y + z + 2 = 0,$
$\tau_4 : 2x + 2y - 2z + 1 = 0$

Výsledky:

a) tři různoběžné roviny, společný bod $P[1; -1; 2]$,
b) tři různoběžné roviny, žádný společný bod,
c) tři různoběžné roviny, společná přímka $p = \{[t; -1 - t; -t],\ t \in \mathbb{R}\}$,
d) dvě rovnoběžné roviny, třetí je s nimi různoběžná.