MA0005 Algebra 2, 5. seminář

2. 11. 2021

Náplň cvičení

1. Soustavy lineárních rovnic
   - Maticový zápis SLR
   - Hodnost matice, elementární řádkové úpravy
   - Schodový tvar matice
   - Soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých
   - Vzájemná poloha tří rovin
   - Gaussova eliminační metoda, Frobeniova věta

Literatura

- Horák, P.: *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I*. 2. vydání. Masarykova univerzita v Brně, 2002. ISBN 80-210-1853-4.

Maticový zápis SLR

Mějme následující soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}y + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

kde $m, n \in \mathbb{N}$.

Maticový zápis SLR

Mějme následující soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}y + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

kde $m, n \in \mathbb{N}$.

Maticový zápis soustavy

Matici

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nazýváme maticí systému SLR.

Maticový zápis SLR

Mějme následující soustavu lineárních rovnic:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}y + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

kde $m, n \in \mathbb{N}$.

Rozšířená matice SLR

Matici

$$
A|b = \left(\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m
\end{array}\right)
$$

nazýváme rozšířenou maticí systému SLR.

Hodnost matice, elementární řádkové úpravy

Hodnost matice

Hodností matice A (typu $m \times n$) rozumíme počet lineárně nezávislých řádků matice A. Píšeme $h(A)$.

Hodnost matice, elementární řádkové úpravy

Hodnost matice

Hodností matice A (typu $m \times n$) rozumíme počet lineárně nezávislých řádků matice A. Píšeme $h(A)$.

Elementární řádkové úpravy

Elementárními řádkovými úpravami matice, resp. samotného SLR jsou:

1. vynásobení řádku (rovnice) nenulovým reálným číslem,
2. výměna pořadí dvou řádků (rovnic),
3. přičtení násobku jiného řádku (rovnice) k danému řádku (rovnici).

Hodnost matice, elementární řádkové úpravy

Hodnost matice

Hodností matice A (typu $m \times n$) rozumíme počet lineárně nezávislých řádků matice A. Píšeme $h(A)$.

Elementární řádkové úpravy

Elementárními řádkovými úpravami matice, resp. samotného SLR jsou:

1. vynásobení řádku (rovnice) nenulovým reálným číslem,
2. výměna pořadí dvou řádků (rovnic),
3. přičtení násobku jiného řádku (rovnice) k danému řádku (rovnici).

Důležitá poznámka: Elementární řádkové úpravy nezmění hodnot matice, resp. nezpůsobí změnu řešení SLR.

Schodový tvar matice

Schodový tvar matice

V každém dalším řádku je zleva více nul než v tom předchozím, případně je celý další řádek nulový.

Schodový tvar matice

Schodový tvar matice

V každém dalším řádku je zleva více nul než v tom předchozím, případně je celý další řádek nulový.

Poznámka: převodem na schodový tvar pomocí elementárních řádkových úprav zjistíme hodnost zadané matice. Hodnost matice je počet nenulových řádků ve schodovém tvaru, který vznikne ze zadané matice elementárními řádkovými úpravami.

Schodový tvar matice

Schodový tvar matice

V každém dalším řádku je zleva více nul než v tom předchozím, případně je celý další řádek nulový.

Poznámka: převodem na schodový tvar pomocí elementárních řádkových úprav zjistíme hodnost zadané matice. Hodnost matice je počet nenulových řádků ve schodovém tvaru, který vznikne ze zadané matice elementárními řádkovými úpravami.

Příklad 1: rozhodněte, zda jsou následující matice ve schodovém tvaru.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 7 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Příklad 4.4.B1

Určete hodnost matice A (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 & 0 & 4 \\ 3 & -6 & 1 & 4 & -3 \\ -4 & 2 & 5 & -1 & 7 \\ 5 & -4 & -12 & 5 & -14 \end{pmatrix}$$

Příklad 4.4.B1

Určete hodnost matice A (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 & 0 & 4 \\ 3 & -6 & 1 & 4 & -3 \\ -4 & 2 & 5 & -1 & 7 \\ 5 & -4 & -12 & 5 & -14 \end{pmatrix}$$

Výsledky: (a) $h(A) = 2$,

Příklad 4.4.B1

Určete hodnost matice A (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 & 0 & 4 \\ 3 & -6 & 1 & 4 & -3 \\ -4 & 2 & 5 & -1 & 7 \\ 5 & -4 & -12 & 5 & -14 \end{pmatrix}$$

Výsledky: (a) $h(A) = 2$, (b) $h(A) = 3$.

Příklad 4.4.B1

Určete hodnost matice A (nad $\mathbb{R}$):

(c)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \\ 5 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

(d)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & -2 \\ 7 & 0 & 7 & 5 & 10 \\ -4 & 5 & 1 & 10 & 10 \\ 5 & -1 & 4 & 1 & 4 \\ 8 & -3 & 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Příklad 4.4.B1

Určete hodnost matice A (nad $\mathbb{R}$):

(c)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \\ 5 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

(d)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & -2 \\ 7 & 0 & 7 & 5 & 10 \\ -4 & 5 & 1 & 10 & 10 \\ 5 & -1 & 4 & 1 & 4 \\ 8 & -3 & 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Výsledky: (c) $h(A) = 2$,

Určete hodnost matice A (nad $\mathbb{R}$):

(c)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \\ 5 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

(d)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & -2 \\ 7 & 0 & 7 & 5 & 10 \\ -4 & 5 & 1 & 10 & 10 \\ 5 & -1 & 4 & 1 & 4 \\ 8 & -3 & 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Výsledky: (c) $h(A) = 2$,   (d) $h(A) = 2$.

Soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých

Mějme následující soustavu tří rovnic:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}$$

Rovnice definují tři roviny, u nichž řešením SLR určíme vzájemnou polohu.

Soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých

Mějme následující soustavu tří rovnic:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}$$

Rovnice definují tři roviny, u nichž řešením SLR určíme vzájemnou polohu.

Počet řešení soustavy

Soustava lineárních rovnic (SLR) o 3 neznámých

(a) má právě jedno řešení, je-li $h(A) = h(A|b) = 3$ (roviny se protínají v jednom bodu);

(b) má nekonečně mnoho řešení, je-li $h(A) = h(A|b) < 3$ (roviny se protínají buď v jedné přímce, když $h(A) = h(A|b) = 2$, nebo splývají v jednu rovinu, je-li $h(A) = h(A|b) = 1$);

(c) nemá řešení, je-li $h(A) \neq h(A|b)$ (geometricky to může vyjít různě).

Vzájemná poloha tří rovin

Vzájemná poloha tří rovin

1. všechny tři roviny jsou rovnoběžné a nemají průsečík, ani průsečnici
2. dvě roviny jsou rovnoběžné a třetí je protíná ve dvou rovnoběžných průsečnicích
3. všechny jsou různoběžné a protínají se v jedné průsečnici (svazek rovin)
4. všechny jsou různoběžné a po dvou se protínají v průsečnici (tyto tři průsečnice jsou rovnoběžné)
5. všechny jsou různoběžné a protínají se v jednom bodě (trs rovin)
6. všechny tři roviny splývají v jednu

Ilustrace prvních pěti případů jsou dostupné na [této stránce](#).

Vzájemná poloha tří rovin

Příklad 15.6.40: Vyšetřete vzájemnou polohu tří rovin.

a) $\varrho_1 : 2x - y + z - 5 = 0, \quad \sigma_1 : x + y + 3z - 6 = 0,$
$\tau_1 : 3x + 2y - 4z + 7 = 0$

b) $\varrho_2 : x + y + z - 3 = 0, \quad \sigma_2 : 3x - 2y + z - 8 = 0,$
$\tau_2 : 4x - y + 2z + 1 = 0$

c) $\varrho_3 : x - y + 2z - 1 = 0, \quad \sigma_3 : x + 2y - z + 2 = 0,$
$\tau_3 : x - 2y + 3z - 2 = 0$

d) $\varrho_4 : x + y - z - 1 = 0, \quad \sigma_4 : x + y + z + 2 = 0,$
$\tau_4 : 2x + 2y - 2z + 1 = 0$

Vzájemná poloha tří rovin

Příklad 15.6.40: Vyšetřete vzájemnou polohu tří rovin.

a) $\varrho_1 : 2x - y + z - 5 = 0, \quad \sigma_1 : x + y + 3z - 6 = 0,$
$\tau_1 : 3x + 2y - 4z + 7 = 0$

b) $\varrho_2 : x + y + z - 3 = 0, \quad \sigma_2 : 3x - 2y + z - 8 = 0,$
$\tau_2 : 4x - y + 2z + 1 = 0$

c) $\varrho_3 : x - y + 2z - 1 = 0, \quad \sigma_3 : x + 2y - z + 2 = 0,$
$\tau_3 : x - 2y + 3z - 2 = 0$

d) $\varrho_4 : x + y - z - 1 = 0, \quad \sigma_4 : x + y + z + 2 = 0,$
$\tau_4 : 2x + 2y - 2z + 1 = 0$

Výsledky:

a) tři různoběžné roviny, společný bod $P[1; -1; 2]$,
b) tři různoběžné roviny, žádný společný bod,
c) tři různoběžné roviny, společná přímka $p = \{[t; -1 - t; -t], \ t \in \mathbb{R}\}$,
d) dvě rovnoběžné roviny, třetí je s nimi různoběžná.

Gaussova eliminační metoda

Věta (Frobenius – Kronecker – Capelli): SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení $\iff h(A) = h(A|b)$.

Gaussova eliminační metoda

Při řešení SLR o m řádcích a n $(m, n \in \mathbb{N})$ neznámých postupujeme takto:

Věta (Frobenius – Kronecker – Capelli): SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení $\iff h(A) = h(A|b)$.

Gaussova eliminační metoda

Při řešení SLR o m řádcích a n ($m, n \in \mathbb{N}$) neznámých postupujeme takto:

1. Převedeme SLR na rozšířenou matici systému $A|b$.

Gaussova eliminační metoda

Věta (Frobenius – Kronecker – Capelli): SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení $\iff h(A) = h(A|b)$.

Gaussova eliminační metoda

Při řešení SLR o m řádcích a n ($m, n \in \mathbb{N}$) neznámých postupujeme takto:

1. Převedeme SLR na rozšířenou matici systému $A|b$.
2. Převedeme matici $A|b$ na schodový tvar.

Věta (Frobenius – Kronecker – Capelli): SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení $\iff h(A) = h(A|b)$.

Gaussova eliminační metoda

Při řešení SLR o m řádcích a n ($m, n \in \mathbb{N}$) neznámých postupujeme takto:

1. Převedeme SLR na rozšířenou matici systému $A|b$.
2. Převedeme matici $A|b$ na schodový tvar.
3. Je-li $h(A) \neq h(A|b)$, nemá SLR řešení.

Gaussova eliminační metoda

Věta (Frobenius – Kronecker – Capelli): SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení $\iff h(A) = h(A|b)$.

Gaussova eliminační metoda

Při řešení SLR o m řádcích a n ($m, n \in \mathbb{N}$) neznámých postupujeme takto:

1. Převedeme SLR na rozšířenou matici systému $A|b$.
2. Převedeme matici $A|b$ na schodový tvar.
3. Je-li $h(A) \neq h(A|b)$, nemá SLR řešení.
4. V opačném případě stanovíme počet parametrů jako $n - h(A|b)$.

Gaussova eliminační metoda

Věta (Frobenius – Kronecker – Capelli): SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení $\iff h(A) = h(A|b)$.

Gaussova eliminační metoda

Při řešení SLR o m řádcích a n ($m, n \in \mathbb{N}$) neznámých postupujeme takto:

1. Převedeme SLR na rozšířenou matici systému $A|b$.
2. Převedeme matici $A|b$ na schodový tvar.
3. Je-li $h(A) \neq h(A|b)$, nemá SLR řešení.
4. V opačném případě stanovíme počet parametrů jako $n - h(A|b)$.
   - Je-li $n - h(A|b) = 0$, pak má SLR právě jedno řešení.

Gaussova eliminační metoda

Věta (Frobenius – Kronecker – Capelli): SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení $\iff h(A) = h(A|b)$.

Gaussova eliminační metoda

Při řešení SLR o m řádcích a n ($m, n \in \mathbb{N}$) neznámých postupujeme takto:

1. Převedeme SLR na rozšířenou matici systému $A|b$.
2. Převedeme matici $A|b$ na schodový tvar.
3. Je-li $h(A) \neq h(A|b)$, nemá SLR řešení.
4. V opačném případě stanovíme počet parametrů jako $n - h(A|b)$.
   - Je-li $n - h(A|b) = 0$, pak má SLR právě jedno řešení.
   - Je-li $n - h(A|b) > 0$, pak $n - h(A|b)$ neznámým "uvážlivě" přiřadíme parametr, ostatní neznámé vyjádříme pomocí těchto parametrů ze zbývajících rovnic.

Věta (Frobenius – Kronecker – Capelli): SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení $\Longleftrightarrow h(A) = h(A|b)$.

Gaussova eliminační metoda

Při řešení SLR o m řádcích a n ($m, n \in \mathbb{N}$) neznámých postupujeme takto:

1. Převedeme SLR na rozšířenou matici systému $A|b$.
2. Převedeme matici $A|b$ na schodový tvar.
3. Je-li $h(A) \neq h(A|b)$, nemá SLR řešení.
4. V opačném případě stanovíme počet parametrů jako $n - h(A|b)$.
    - Je-li $n - h(A|b) = 0$, pak má SLR právě jedno řešení.
    - Je-li $n - h(A|b) > 0$, pak $n - h(A|b)$ neznámým "uvážlivě" přiřadíme parametr, ostatní neznámé vyjádříme pomocí těchto parametrů ze zbývajících rovnic.
    - V obou případech postupujeme tzv. zpětným chodem, tj. bereme rovnice zdola a volíme za parametry počet neznámých v dané rovnici MINUS jedna, abychom poslední neznámou v každé rovnici mohli dopočítat pomocí ostatních neznámých – parametrů.

Příklad 5.1.B1

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{ccccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 11 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{ccccccccc} 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & -4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -6 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -4 \end{array}$$

Příklad 5.1.B1

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{ccccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 11 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{ccccccccc} 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & -4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -6 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -4 \end{array}$$

Výsledky: (a) $(2, -2, 3)$,

Příklad 5.1.B1

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{ccccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 11 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{ccccccccc} 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & -4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -6 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -4 \end{array}$$

Výsledky: (a) $(2, -2, 3)$, (c) $(-1, -1, 0, 1)$.

Příklad 5.1.B2

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$
\begin{array}{rcrcrcl}
5x_1 & - & 9x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\
2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\
x_1 & + & 8x_2 & + & & = & 1 \\
x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0
\end{array}
$$

(c)

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
2x_1 & + & 9x_2 & + & 8x_3 & + & 3x_4 & = & 7 \\
2x_1 & + & 6x_2 & + & 8x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\
x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\
3x_1 & + & 7x_2 & + & 7x_3 & + & 2x_4 & = & 12 \\
5x_1 & + & 7x_2 & + & 9x_3 & + & 2x_4 & = & 20
\end{array}
$$

Příklad 5.1.B2

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & - & 9x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 8x_2 & + & & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 9x_2 & + & 8x_3 & + & 3x_4 & = & 7 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & 8x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 7x_2 & + & 7x_3 & + & 2x_4 & = & 12 \\ 5x_1 & + & 7x_2 & + & 9x_3 & + & 2x_4 & = & 20 \end{array}$$

Výsledky: (a) SLR nemá řešení,

Příklad 5.1.B2

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & - & 9x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 8x_2 & + & & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 9x_2 & + & 8x_3 & + & 3x_4 & = & 7 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & 8x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 7x_2 & + & 7x_3 & + & 2x_4 & = & 12 \\ 5x_1 & + & 7x_2 & + & 9x_3 & + & 2x_4 & = & 20 \end{array}$$

Výsledky: (a) SLR nemá řešení, (c) SLR nemá řešení.

Příklad 5.1.B3

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & - & 9x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -2 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & & & - & x_3 & & & = & 1 \end{array}$$

Příklad 5.1.B3

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & - & 9x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -2 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & & & - & x_3 & & & = & 1 \end{array}$$

Výsledky: (a) $\{(2-t, 1, t),\ t \in \mathbb{R}\}$,

Příklad 5.1.B3

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & - & 9x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -2 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & & & - & x_3 & & & = & 1 \end{array}$$

Výsledky: (a) $\{(2-t, 1, t),\ t \in \mathbb{R}\}$,
(c) $\{(1+t, \frac{3}{2}, t, -\frac{1}{2}),\ t \in \mathbb{R}\}$.

Dodatečný příklad

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

$$\begin{array}{rcrcrcrcr}
 & & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\
3x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -2 \\
x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\
3x_1 & + & 7x_2 & + & 7x_3 & + & 2x_4 & = & 12 \\
x_1 & & & - & x_3 & & & = & 1
\end{array}$$

Dodatečný příklad

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
 & & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\
3x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -2 \\
x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\
3x_1 & + & 7x_2 & + & 7x_3 & + & 2x_4 & = & 12 \\
x_1 & & & - & x_3 & & & = & 1
\end{array}
$$

Výsledek: $\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{20}; -\frac{1}{2}\right)$