

MA0005 Algebra 2, 8. seminář

16. 11. 2021

1 Vektorový prostor a jeho podprostory

- Podprostor vektorového prostoru
- Lineární obal množiny vektorů
- Dimenze a báze vektorového prostoru
- Vyjádření vektoru v jiné bázi
- Součet a průnik vektorových podprostorů

Literatura

- Horák, P.: *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I*. 2. vydání. Masarykova univerzita v Brně, 2002. ISBN 80-210-1853-4.

Axiomy pro vektorový prostor

V nazveme vektorovým (lineárním) prostorem nad tělesem T s operacemi $+$, \cdot , jestliže

1 $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V : \vec{u} + \vec{v} \in V$ (uzavřenost na operaci $+$)

2 $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V : (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (asociativita operace $+$)

3 $\exists \vec{o}. \forall \vec{v} \in V : \vec{u} + \vec{o} = \vec{u} = \vec{o} + \vec{u}$ (neutrální prvek pro operaci $+$)

4 $\forall \vec{u} \in V. \exists (-\vec{u}) \in V : \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}$ (inverze vzhledem k operaci $+$)

5 $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V : \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (komutativita operace $+$)

"1" $\forall \vec{u} \in V, \forall t \in T : t \cdot \vec{u} \in V$ (uzavřenost na součin skaláru a vektoru)

"2" $\forall \vec{u} \in V, \forall s, t \in T : s \cdot (t \cdot \vec{u}) = (s \cdot t) \cdot \vec{u}$ (asociativita operace \cdot)

"3" $\exists 1 \in T. \forall \vec{u} \in V : 1 \cdot \vec{u} = \vec{u} = \vec{u} \cdot 1$ (neutrální prvek pro operaci \cdot)

"6a" $\forall \vec{u} \in V, \forall s, t \in T : (s + t) \cdot \vec{u} = s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{u}$ (distributivita operací)

"6b" $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \forall s \in T : s \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = s \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ (distributivita operací)

Definice vektorového podprostoru

Vektorový podprostor prostoru $(V, +, \cdot)$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$ je taková podmnožina W prostoru V , která je uzavřená vzhledem k operaci $+$ (sčítání vektorů) a \cdot (násobení vektoru skalárem):

$$\mathbf{1} \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in W : \vec{u} + \vec{v} \in W$$

$$\mathbf{"1"} \quad \forall \vec{u} \in W, \forall t \in T : t \cdot \vec{u} \in W$$

Poznámka: Vektorový podprostor je tedy uzavřený na lineární kombinaci svých vektorů.

Příklad 3.2.B3: Rozhodněte, zda podmnožina $W \subseteq \mathbb{Q}^4$ je podprostorem vektorového prostoru \mathbb{Q}^4 , je-li:

(a) $W = \{(0, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1), (-1, -1, -1, -1)\}$

(b) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 0\}$

(c) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_2 = x_3 = x_4\}$

(d) $W = \{(2s + t, s - t, t, s) \mid t, s \in \mathbb{Q} \text{ libovolné}\}$

Příklad 3.2.B3: Rozhodněte, zda podmnožina $W \subseteq \mathbb{Q}^4$ je podprostorem vektorového prostoru \mathbb{Q}^4 , je-li:

(a) $W = \{(0, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1), (-1, -1, -1, -1)\}$

(b) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 0\}$

(c) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_2 = x_3 = x_4\}$

(d) $W = \{(2s + t, s - t, t, s) \mid t, s \in \mathbb{Q} \text{ libovolné}\}$

Příklad z písemky: Rozhodněte, zda rovina ρ je vektorovým podprostorem aritmetického vektorového prostoru \mathbb{R}^3 , je-li:

(a) $\rho : 2x + y - 3z + 6 = 0$

(b) $\rho : 2x + y - z = 0$

(c) $\rho : x - 2y + 3z - 6 = 0$

(d) $\rho : x + 4y - 2z = 0$

Podprostor vektorového prostoru

Příklad 3.2.B3: Rozhodněte, zda podmnožina $W \subseteq \mathbb{Q}^4$ je podprostorem vektorového prostoru \mathbb{Q}^4 , je-li:

(a) $W = \{(0, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1), (-1, -1, -1, -1)\}$

(b) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 0\}$

(c) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_2 = x_3 = x_4\}$

(d) $W = \{(2s + t, s - t, t, s) \mid t, s \in \mathbb{Q} \text{ libovolné}\}$

Příklad z písemky: Rozhodněte, zda rovina ρ je vektorovým podprostorem aritmetického vektorového prostoru \mathbb{R}^3 , je-li:

(a) $\rho : 2x + y - 3z + 6 = 0$

(b) $\rho : 2x + y - z = 0$

(c) $\rho : x - 2y + 3z - 6 = 0$

(d) $\rho : x + 4y - 2z = 0$

Výsledky: 3.2.B3.(a) ne, (b) ne, (c) ano, (d) ano.

Podprostor vektorového prostoru

Příklad 3.2.B3: Rozhodněte, zda podmnožina $W \subseteq \mathbb{Q}^4$ je podprostorem vektorového prostoru \mathbb{Q}^4 , je-li:

(a) $W = \{(0, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1), (-1, -1, -1, -1)\}$

(b) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 0\}$

(c) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_2 = x_3 = x_4\}$

(d) $W = \{(2s + t, s - t, t, s) \mid t, s \in \mathbb{Q} \text{ libovolné}\}$

Příklad z písemky: Rozhodněte, zda rovina ρ je vektorovým podprostorem aritmetického vektorového prostoru \mathbb{R}^3 , je-li:

(a) $\rho : 2x + y - 3z + 6 = 0$

(b) $\rho : 2x + y - z = 0$

(c) $\rho : x - 2y + 3z - 6 = 0$

(d) $\rho : x + 4y - 2z = 0$

Výsledky: 3.2.B3.(a) ne, (b) ne, (c) ano, (d) ano.

Příklad z písemky: (a) ne, (b) ano, (c) ne, (d) ano.

Lineární obal množiny vektorů

Lineárním obalem množiny (ne nutně nezávislých) vektorů $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ z vektorového prostoru V nad tělesem $(T, +, \cdot)$ rozumíme množinu $\{\alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \alpha_k \cdot \vec{v}_k \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in T\}$ vzniklou jakoukoli lineární kombinací vektorů $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$.

Značíme jej $L(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k)$ nebo $\langle \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\} \rangle$.

Alternativně říkáme, že $L(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k)$ je podprostor generovaný vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$.

Báze a dimenze vektorového prostoru

Posloupnost vektorů $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k)$ nazveme **bází** (množinou generátorů) vektorového prostoru V nad tělesem $(T, +, \cdot)$, jestliže

- 1 je lineárně nezávislá,
- 2 každý vektor $\vec{u} \in V$ lze vyjádřit lineární kombinací $\vec{u} = \alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + \alpha_k \cdot \vec{v}_k$ pro nějaké $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in T$ (tj. vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ generují celý prostor V).

Dimenzí vektorového prostoru V rozumíme počet vektorů nějaké jeho báze. Značíme $\dim V$.

Čísla $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ z vyjádření vektoru \vec{u} nazýváme **souřadnicemi vektoru \vec{u} v bázi $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k)$** .

Příklad 16: Ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^3 jsou dány vektory:

$$\vec{u}_1 = (1; -2; 3), \quad \vec{u}_2 = (2; -1; 0), \quad \vec{u}_3 = (1; 1; -3), \quad \vec{u}_4 = (1; 0; -1).$$

Rozhodněte, zda tyto vektory generují vektorový prostor \mathbb{R}^3 .

Příklad 16: Ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^3 jsou dány vektory:

$$\vec{u}_1 = (1; -2; 3), \quad \vec{u}_2 = (2; -1; 0), \quad \vec{u}_3 = (1; 1; -3), \quad \vec{u}_4 = (1; 0; -1).$$

Rozhodněte, zda tyto vektory generují vektorový prostor \mathbb{R}^3 .

Příklad 3.3.B2: Rozhodněte, zda vektory $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_5$ generují vektorový prostor \mathbb{Q}^4 , je-li:

(a) $\vec{u}_1 = (1; 2; 1; 2), \quad \vec{u}_2 = (2; 1; 2; 1), \quad \vec{u}_3 = (1; 1; 1; 1),$
 $\vec{u}_4 = (-2; 0; -1; -3), \quad \vec{u}_5 = (-1; 1; 0; -2)$

(b) $\vec{u}_1 = (-1; 1; 0; -1), \quad \vec{u}_2 = (2; 0; 1; 3), \quad \vec{u}_3 = (1; 2; 3; 4),$
 $\vec{u}_4 = (2; 3; 4; 6), \quad \vec{u}_5 = (1; -3; 5; -7)$

Vektory generující vektorový prostor

Příklad 16: Ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^3 jsou dány vektory:

$$\vec{u}_1 = (1; -2; 3), \quad \vec{u}_2 = (2; -1; 0), \quad \vec{u}_3 = (1; 1; -3), \quad \vec{u}_4 = (1; 0; -1).$$

Rozhodněte, zda tyto vektory generují vektorový prostor \mathbb{R}^3 .

Příklad 3.3.B2: Rozhodněte, zda vektory $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_5$ generují vektorový prostor \mathbb{Q}^4 , je-li:

(a) $\vec{u}_1 = (1; 2; 1; 2), \quad \vec{u}_2 = (2; 1; 2; 1), \quad \vec{u}_3 = (1; 1; 1; 1),$
 $\vec{u}_4 = (-2; 0; -1; -3), \quad \vec{u}_5 = (-1; 1; 0; -2)$

(b) $\vec{u}_1 = (-1; 1; 0; -1), \quad \vec{u}_2 = (2; 0; 1; 3), \quad \vec{u}_3 = (1; 2; 3; 4),$
 $\vec{u}_4 = (2; 3; 4; 6), \quad \vec{u}_5 = (1; -3; 5; -7)$

Výsledky: 16. ne,

Příklad 16: Ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^3 jsou dány vektory:

$$\vec{u}_1 = (1; -2; 3), \quad \vec{u}_2 = (2; -1; 0), \quad \vec{u}_3 = (1; 1; -3), \quad \vec{u}_4 = (1; 0; -1).$$

Rozhodněte, zda tyto vektory generují vektorový prostor \mathbb{R}^3 .

Příklad 3.3.B2: Rozhodněte, zda vektory $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_5$ generují vektorový prostor \mathbb{Q}^4 , je-li:

(a) $\vec{u}_1 = (1; 2; 1; 2), \quad \vec{u}_2 = (2; 1; 2; 1), \quad \vec{u}_3 = (1; 1; 1; 1),$
 $\vec{u}_4 = (-2; 0; -1; -3), \quad \vec{u}_5 = (-1; 1; 0; -2)$

(b) $\vec{u}_1 = (-1; 1; 0; -1), \quad \vec{u}_2 = (2; 0; 1; 3), \quad \vec{u}_3 = (1; 2; 3; 4),$
 $\vec{u}_4 = (2; 3; 4; 6), \quad \vec{u}_5 = (1; -3; 5; -7)$

Výsledky: 16. ne,
3.3.B2.(a) ne, (b) ano.

Vektor příslušející vektorovému podprostoru

Ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^3 jsou dány vektory $\vec{u} = (0; 2; 5)$, $\vec{v} = (1; 2; 1)$. Zjistěte, zda vektory \vec{u} , \vec{v} leží ve vektorovém podprostoru W generovaném následující skupinou vektorů.

(a) $\vec{x} = (1; -1; 3)$, $\vec{y} = (-2; 4; -1)$, $\vec{z} = (-1; 3; 2)$;

(b) $\vec{x} = (2; -3; 0)$, $\vec{y} = (-1; 5; -2)$, $\vec{z} = (0; -4; 1)$;

(c) $\vec{x} = (3; 5; -2)$, $\vec{y} = (2; 3; -3)$.

Vektor příslušející vektorovému podprostoru

Ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^3 jsou dány vektory $\vec{u} = (0; 2; 5)$, $\vec{v} = (1; 2; 1)$. Zjistěte, zda vektory \vec{u} , \vec{v} leží ve vektorovém podprostoru W generovaném následující skupinou vektorů.

(a) $\vec{x} = (1; -1; 3)$, $\vec{y} = (-2; 4; -1)$, $\vec{z} = (-1; 3; 2)$;

(b) $\vec{x} = (2; -3; 0)$, $\vec{y} = (-1; 5; -2)$, $\vec{z} = (0; -4; 1)$;

(c) $\vec{x} = (3; 5; -2)$, $\vec{y} = (2; 3; -3)$.

Výsledky:

(a). $\vec{u} \in W$, $\vec{v} \notin W$;

Vektor příslušející vektorovému podprostoru

Ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^3 jsou dány vektory $\vec{u} = (0; 2; 5)$, $\vec{v} = (1; 2; 1)$. Zjistěte, zda vektory \vec{u} , \vec{v} leží ve vektorovém podprostoru W generovaném následující skupinou vektorů.

(a) $\vec{x} = (1; -1; 3)$, $\vec{y} = (-2; 4; -1)$, $\vec{z} = (-1; 3; 2)$;

(b) $\vec{x} = (2; -3; 0)$, $\vec{y} = (-1; 5; -2)$, $\vec{z} = (0; -4; 1)$;

(c) $\vec{x} = (3; 5; -2)$, $\vec{y} = (2; 3; -3)$.

Výsledky:

(a). $\vec{u} \in W$, $\vec{v} \notin W$;

(b) $\vec{u} \in W$, $\vec{v} \in W$;

Vektor příslušející vektorovému podprostoru

Ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^3 jsou dány vektory $\vec{u} = (0; 2; 5)$, $\vec{v} = (1; 2; 1)$. Zjistěte, zda vektory \vec{u} , \vec{v} leží ve vektorovém podprostoru W generovaném následující skupinou vektorů.

(a) $\vec{x} = (1; -1; 3)$, $\vec{y} = (-2; 4; -1)$, $\vec{z} = (-1; 3; 2)$;

(b) $\vec{x} = (2; -3; 0)$, $\vec{y} = (-1; 5; -2)$, $\vec{z} = (0; -4; 1)$;

(c) $\vec{x} = (3; 5; -2)$, $\vec{y} = (2; 3; -3)$.

Výsledky:

(a). $\vec{u} \in W$, $\vec{v} \notin W$;

(b) $\vec{u} \in W$, $\vec{v} \in W$;

(c) $\vec{u} \notin W$, $\vec{v} \in W$.

Dimenze a báze podprostoru

Ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^4 je podprostor W zadán následující množinou generátorů. Určete dimenzi a bázi α_W podprostoru W .

(a) $\vec{u}_1 = (1; -1; 0; 2)$, $\vec{u}_2 = (2; 2; -1; 3)$, $\vec{u}_3 = (0; 1; 1; 0)$, $\vec{u}_4 = (3; 2; 0; 5)$;

(b) $\vec{u}_1 = (1; 2; 3; 4)$, $\vec{u}_2 = (-2; -3; -4; -5)$, $\vec{u}_3 = (3; 4; 5; 6)$,
 $\vec{u}_4 = (-4; -5; -6; -7)$, $\vec{u}_5 = (5; 6; 7; 8)$;

(c) $\vec{u}_1 = (1; 2; -1; 0)$, $\vec{u}_2 = (0; 1; -1; -7)$, $\vec{u}_3 = (-8; 0; 0; -5)$,
 $\vec{u}_4 = (3; -4; 1; -2)$, $\vec{u}_5 = (2; 1; 0; -3)$;

Dimenze a báze podprostoru

Ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^4 je podprostor W zadán následující množinou generátorů. Určete dimenzi a bázi α_W podprostoru W .

(a) $\vec{u}_1 = (1; -1; 0; 2)$, $\vec{u}_2 = (2; 2; -1; 3)$, $\vec{u}_3 = (0; 1; 1; 0)$, $\vec{u}_4 = (3; 2; 0; 5)$;

(b) $\vec{u}_1 = (1; 2; 3; 4)$, $\vec{u}_2 = (-2; -3; -4; -5)$, $\vec{u}_3 = (3; 4; 5; 6)$,
 $\vec{u}_4 = (-4; -5; -6; -7)$, $\vec{u}_5 = (5; 6; 7; 8)$;

(c) $\vec{u}_1 = (1; 2; -1; 0)$, $\vec{u}_2 = (0; 1; -1; -7)$, $\vec{u}_3 = (-8; 0; 0; -5)$,
 $\vec{u}_4 = (3; -4; 1; -2)$, $\vec{u}_5 = (2; 1; 0; -3)$;

Výsledky:

(a). $\dim W = 3$, např. $\alpha_W = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$;

Dimenze a báze podprostoru

Ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^4 je podprostor W zadán následující množinou generátorů. Určete dimenzi a bázi α_W podprostoru W .

(a) $\vec{u}_1 = (1; -1; 0; 2)$, $\vec{u}_2 = (2; 2; -1; 3)$, $\vec{u}_3 = (0; 1; 1; 0)$, $\vec{u}_4 = (3; 2; 0; 5)$;

(b) $\vec{u}_1 = (1; 2; 3; 4)$, $\vec{u}_2 = (-2; -3; -4; -5)$, $\vec{u}_3 = (3; 4; 5; 6)$,
 $\vec{u}_4 = (-4; -5; -6; -7)$, $\vec{u}_5 = (5; 6; 7; 8)$;

(c) $\vec{u}_1 = (1; 2; -1; 0)$, $\vec{u}_2 = (0; 1; -1; -7)$, $\vec{u}_3 = (-8; 0; 0; -5)$,
 $\vec{u}_4 = (3; -4; 1; -2)$, $\vec{u}_5 = (2; 1; 0; -3)$;

Výsledky:

(a). $\dim W = 3$, např. $\alpha_W = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$;

(b) $\dim W = 2$, např. $\alpha_W = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$;

Dimenze a báze podprostoru

Ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^4 je podprostor W zadán následující množinou generátorů. Určete dimenzi a bázi α_W podprostoru W .

(a) $\vec{u}_1 = (1; -1; 0; 2)$, $\vec{u}_2 = (2; 2; -1; 3)$, $\vec{u}_3 = (0; 1; 1; 0)$, $\vec{u}_4 = (3; 2; 0; 5)$;

(b) $\vec{u}_1 = (1; 2; 3; 4)$, $\vec{u}_2 = (-2; -3; -4; -5)$, $\vec{u}_3 = (3; 4; 5; 6)$,
 $\vec{u}_4 = (-4; -5; -6; -7)$, $\vec{u}_5 = (5; 6; 7; 8)$;

(c) $\vec{u}_1 = (1; 2; -1; 0)$, $\vec{u}_2 = (0; 1; -1; -7)$, $\vec{u}_3 = (-8; 0; 0; -5)$,
 $\vec{u}_4 = (3; -4; 1; -2)$, $\vec{u}_5 = (2; 1; 0; -3)$;

Výsledky:

(a). $\dim W = 3$, např. $\alpha_W = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$;

(b) $\dim W = 2$, např. $\alpha_W = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$;

(c) $\dim W = 4$, např. $\alpha_W = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_5)$.

Příklad 3.3.B5: Ověřte, zda zadané vektory tvoří bázi α vekt. prostoru \mathbb{R}^3 . Pokud ano, najděte souřadnice vektoru $\vec{w} = (0; 1; 2)_S$ v bázi α .

- a) $\alpha = ((1; 2; -1), (1; 1; 0), (2; -1; 3))$
- b) $\alpha = ((1; 2; -1), (2; -1; 1), (-1; 1; 2))$
- c) $\alpha = ((1; 2; -2), (1; 1; -1), (-2; -1; 2))$

Vyjádření vektoru v jiné bázi

Příklad 3.3.B5: Ověřte, zda zadané vektory tvoří bázi α vekt. prostoru \mathbb{R}^3 . Pokud ano, najděte souřadnice vektoru $\vec{w} = (0; 1; 2)_S$ v bázi α .

- a) $\alpha = ((1; 2; -1), (1; 1; 0), (2; -1; 3))$
- b) $\alpha = ((1; 2; -1), (2; -1; 1), (-1; 1; 2))$
- c) $\alpha = ((1; 2; -2), (1; 1; -1), (-2; -1; 2))$

Příklad 3.4.B23: Ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^4 jsou dány lineárně nezávislé vektory

$$\vec{u}_1 = (1; 1; 1; 1), \quad \vec{u}_2 = (0; 1; 1; 1), \quad \vec{u}_3 = (0; 0; 1; 1), \quad \vec{u}_4 = (0; 0; 0; 1).$$

Vyjádřete souřadnice vektoru $\vec{w} = (2; 1; 1; 4)$

- a) v bázi $\alpha = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$;
- b) v bázi $\beta = (\vec{u}_3, \vec{u}_2, \vec{u}_4, \vec{u}_1)$.

Výsledky: 3.3.B5.a) vektory netvoří bázi, b) $(\frac{3}{14}; \frac{5}{14}; \frac{13}{14})_\alpha$, c) $(-2; 8; 3)_\alpha$.

Vyjádření vektoru v jiné bázi

Příklad 3.3.B5: Ověřte, zda zadané vektory tvoří bázi α vekt. prostoru \mathbb{R}^3 . Pokud ano, najděte souřadnice vektoru $\vec{w} = (0; 1; 2)_S$ v bázi α .

- a) $\alpha = ((1; 2; -1), (1; 1; 0), (2; -1; 3))$
- b) $\alpha = ((1; 2; -1), (2; -1; 1), (-1; 1; 2))$
- c) $\alpha = ((1; 2; -2), (1; 1; -1), (-2; -1; 2))$

Příklad 3.4.B23: Ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^4 jsou dány lineárně nezávislé vektory

$$\vec{u}_1 = (1; 1; 1; 1), \quad \vec{u}_2 = (0; 1; 1; 1), \quad \vec{u}_3 = (0; 0; 1; 1), \quad \vec{u}_4 = (0; 0; 0; 1).$$

Vyjádřete souřadnice vektoru $\vec{w} = (2; 1; 1; 4)$

- a) v bázi $\alpha = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$;
- b) v bázi $\beta = (\vec{u}_3, \vec{u}_2, \vec{u}_4, \vec{u}_1)$.

Výsledky: 3.3.B5.a) vektory netvoří bázi, b) $(\frac{3}{14}; \frac{5}{14}; \frac{13}{14})_\alpha$, c) $(-2; 8; 3)_\alpha$.
3.4.B23.a) $(2; -1; 0; 3)_\alpha$, b) $(0; -1; 3; 2)_\beta$.

Součet a průnik vektorových podprostorů

Součtem $W_1 + W_2$ vektorových **podprostorů** W_1, W_2 prostoru V nad tělesem $(T, +, \cdot)$ rozumíme lineární obal jejich sjednocení, tj.

$$W_1 + W_2 = L(W_1 \cup W_2) = \{\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} \mid \alpha, \beta \in T, \vec{u} \in W_1, \vec{v} \in W_2\}$$

Průnikem $W_1 \cap W_2$ vektorových **podprostorů** W_1, W_2 prostoru V nad tělesem $(T, +, \cdot)$ rozumíme množinu vektorů, které leží ve W_1 i W_2 zároveň, tj.

$$W_1 \cap W_2 = \{\vec{u} \in V \mid \vec{u} \in W_1 \wedge \vec{u} \in W_2\}$$

Věta: Jsou-li W_1, W_2 podprostory s konečnou dimenzí, pak platí

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Příklad 3.4.B17: Ve vektorovém prostoru V jsou zadány podprostory W_1, W_2 . Určete dimenzi a bázi podprostorů $W_1 + W_2, W_1 \cap W_2$, je-li:

(a) $V = \mathbb{R}^3, W_1 = L(\vec{u}_1, \vec{u}_2), W_2 = L(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3),$

$$\vec{u}_1 = (1; 1; -3), \vec{u}_2 = (1; 2; 2),$$

$$\vec{v}_1 = (1; 1; -1), \vec{v}_2 = (1; 2; 1), \vec{v}_3 = (1; 3; 3);$$

(b) $V = \mathbb{R}^4, W_1 = \langle \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} \rangle, W_2 = \langle \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} \rangle,$

$$\vec{u}_1 = (1; 2; 0; 2), \vec{u}_2 = (1; 2; 1; 2), \vec{u}_3 = (3; 1; 3; 1),$$

$$\vec{v}_1 = (1; 1; 1; 1), \vec{v}_2 = (1; -1; 1; -1), \vec{v}_3 = (1; 3; 1; 3);$$

(c) $V = \mathbb{R}^4, W_1 = L(\vec{u}_1, \vec{u}_2), W_2 = L(\vec{v}_1, \vec{v}_2),$

$$\vec{u}_1 = (1; 1; 1; 1), \vec{u}_2 = (1; 0; 1; 0), \vec{v}_1 = (1; 1; 1; 0), \vec{v}_2 = (1; 2; 0; 1).$$

Příklad 3.4.B17: Ve vektorovém prostoru V jsou zadány podprostory W_1, W_2 . Určete dimenzi a bázi podprostorů $W_1 + W_2, W_1 \cap W_2$, je-li:

(a) $V = \mathbb{R}^3, W_1 = L(\vec{u}_1, \vec{u}_2), W_2 = L(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3),$

$$\vec{u}_1 = (1; 1; -3), \vec{u}_2 = (1; 2; 2),$$

$$\vec{v}_1 = (1; 1; -1), \vec{v}_2 = (1; 2; 1), \vec{v}_3 = (1; 3; 3);$$

(b) $V = \mathbb{R}^4, W_1 = \langle \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} \rangle, W_2 = \langle \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} \rangle,$

$$\vec{u}_1 = (1; 2; 0; 2), \vec{u}_2 = (1; 2; 1; 2), \vec{u}_3 = (3; 1; 3; 1),$$

$$\vec{v}_1 = (1; 1; 1; 1), \vec{v}_2 = (1; -1; 1; -1), \vec{v}_3 = (1; 3; 1; 3);$$

(c) $V = \mathbb{R}^4, W_1 = L(\vec{u}_1, \vec{u}_2), W_2 = L(\vec{v}_1, \vec{v}_2),$

$$\vec{u}_1 = (1; 1; 1; 1), \vec{u}_2 = (1; 0; 1; 0), \vec{v}_1 = (1; 1; 1; 0), \vec{v}_2 = (1; 2; 0; 1).$$

Výsledky:

(a). $\dim(W_1 + W_2) = 3$, příklad báze: $\alpha_{W_1+W_2} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_1),$

$\dim(W_1 \cap W_2) = 1$, příklad báze: $\alpha_{W_1 \cap W_2} = ((3; 5; 1));$

Příklad 3.4.B17: Ve vektorovém prostoru V jsou zadány podprostory W_1, W_2 . Určete dimenzi a bázi podprostorů $W_1 + W_2, W_1 \cap W_2$, je-li:

(a) $V = \mathbb{R}^3, W_1 = L(\vec{u}_1, \vec{u}_2), W_2 = L(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3),$

$$\vec{u}_1 = (1; 1; -3), \vec{u}_2 = (1; 2; 2),$$

$$\vec{v}_1 = (1; 1; -1), \vec{v}_2 = (1; 2; 1), \vec{v}_3 = (1; 3; 3);$$

(b) $V = \mathbb{R}^4, W_1 = \langle \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} \rangle, W_2 = \langle \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} \rangle,$

$$\vec{u}_1 = (1; 2; 0; 2), \vec{u}_2 = (1; 2; 1; 2), \vec{u}_3 = (3; 1; 3; 1),$$

$$\vec{v}_1 = (1; 1; 1; 1), \vec{v}_2 = (1; -1; 1; -1), \vec{v}_3 = (1; 3; 1; 3);$$

(c) $V = \mathbb{R}^4, W_1 = L(\vec{u}_1, \vec{u}_2), W_2 = L(\vec{v}_1, \vec{v}_2),$

$$\vec{u}_1 = (1; 1; 1; 1), \vec{u}_2 = (1; 0; 1; 0), \vec{v}_1 = (1; 1; 1; 0), \vec{v}_2 = (1; 2; 0; 1).$$

Výsledky:

(a). $\dim(W_1 + W_2) = 3$, příklad báze: $\alpha_{W_1+W_2} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_1),$

$\dim(W_1 \cap W_2) = 1$, příklad báze: $\alpha_{W_1 \cap W_2} = ((3; 5; 1));$

(b). $\dim(W_1 + W_2) = 3$, příklad báze: $\alpha_{W_1+W_2} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_1),$

$\dim(W_1 \cap W_2) = 2$, příklad báze: $\alpha_{W_1 \cap W_2} = (\vec{u}_2; \vec{u}_3);$

Příklad 3.4.B17: Ve vektorovém prostoru V jsou zadány podprostory W_1, W_2 . Určete dimenzi a bázi podprostorů $W_1 + W_2, W_1 \cap W_2$, je-li:

(a) $V = \mathbb{R}^3, W_1 = L(\vec{u}_1, \vec{u}_2), W_2 = L(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3),$

$$\vec{u}_1 = (1; 1; -3), \vec{u}_2 = (1; 2; 2),$$

$$\vec{v}_1 = (1; 1; -1), \vec{v}_2 = (1; 2; 1), \vec{v}_3 = (1; 3; 3);$$

(b) $V = \mathbb{R}^4, W_1 = \langle \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} \rangle, W_2 = \langle \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} \rangle,$

$$\vec{u}_1 = (1; 2; 0; 2), \vec{u}_2 = (1; 2; 1; 2), \vec{u}_3 = (3; 1; 3; 1),$$

$$\vec{v}_1 = (1; 1; 1; 1), \vec{v}_2 = (1; -1; 1; -1), \vec{v}_3 = (1; 3; 1; 3);$$

(c) $V = \mathbb{R}^4, W_1 = L(\vec{u}_1, \vec{u}_2), W_2 = L(\vec{v}_1, \vec{v}_2),$

$$\vec{u}_1 = (1; 1; 1; 1), \vec{u}_2 = (1; 0; 1; 0), \vec{v}_1 = (1; 1; 1; 0), \vec{v}_2 = (1; 2; 0; 1).$$

Výsledky:

(a). $\dim(W_1 + W_2) = 3$, příklad báze: $\alpha_{W_1+W_2} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_1),$

$\dim(W_1 \cap W_2) = 1$, příklad báze: $\alpha_{W_1 \cap W_2} = ((3; 5; 1));$

(b). $\dim(W_1 + W_2) = 3$, příklad báze: $\alpha_{W_1+W_2} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_1),$

$\dim(W_1 \cap W_2) = 2$, příklad báze: $\alpha_{W_1 \cap W_2} = (\vec{u}_2; \vec{u}_3);$

(c). $\dim(W_1 + W_2) = 4$, příklad báze: $\alpha_{W_1+W_2} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2),$

$\dim(W_1 \cap W_2) = 0$, báze tedy neexistuje.