CÍLE (STÁLE STEJNÉ)

- NĚCO UDĚLAT, něco nového..
- Všechno VYSVĚTLOVAT, srozumitelně.

PROCES (STÁLE STEJNÝ)

přetvářet a vytvářet

rozlišovat a vysvětlovat

pochopit a použít

zapamatovat a zopakovat

KULISY (GEOMETRIE ...)

- vloni konstrukční/elementární
- nyní počítací/vektorová

ROZLOŽENÍ

- Afinní geom.
- Eukleidovská geom.
- Projektivní rozšíření
- Zobrazení blíže ji

podzim '21

jaro '22

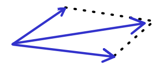
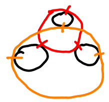
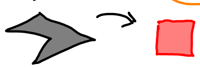
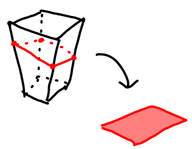
VÝUKA

- předseznámení .... doma
- vyjasnění .... přednáška
- užití .... cvičení

ZAKONČENÍ

- samost. práce .... dva + dva
- písemka .... aspoň 50%
- ústní zkouška .... nad VLASTNÍMI výtvory

SHODY & ROZDÍLY

	MINULÝ SEMESTR	TENTO SEMESTR
PŘEDMĚT	geometrie	totéž
CÍLE	opakování, rozšíření a **organizace** poznatků	totéž
NÁSTROJE	pravítko a kružítko 	lineární algebra 
PŘEDPOKLADY	zvídavost	totéž + **lineární algebra**!
VÝHODY	jednoduchost, představitelnost apod.	jednotný popis, žádná představivost apod.
TYPICKÉ ÚLOHY	sestrojte ... - dotykové úlohy  - kvadratura  - obecný průmět hranolu - řez hranolu - řez ve skutečné velikosti 	spočítejte ... - - - - } totéž (resp. něco velmi podobného)

SHODY & ROZDÍLY

	MINULÝ SEMESTR	TENTO SEMESTR
ZÁKLADNÍ POJMY	bod, přímka, rovina	vektor
ZÁKLADNÍ VZTAHY	incidentnost, spojitost, rovnoběžnost, uspořádání, shodnost	lineární (ne)závislost, (multi)linearnost apod.
ZÁKLADNÍ ÚLOHY	sestrojitelné veličiny průniky přímek, rovin vzdálenosti bodů obsahy, kvadratury apod.	× soustavy lin. rovnic velikosti vektorů determinanty apod.

VZPOMÍNKY (NA MATURITU)

Př. 13

Dokaž, že přímky $p = \leftrightarrow AB$ a $q = \leftrightarrow CD$, kde $A[1, 2, 0]$, $B[4, 3, -2]$, $C[2, 0, 1]$, $D[5, 3, -2]$, jsou mimoběžné, a urči jejich odchylku φ.

$\overrightarrow{AB}(3, 1, -2)$; $\overrightarrow{CD}(3, 3, -3) \parallel \vec{v}(1, 1, -1)$

$\frac{3}{3} \neq \frac{1}{3} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{CD} \Rightarrow p \nparallel q.$

Určíme směrové vektory přímek p, q a ověříme, že $p \nparallel q$. (Vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ mají stejnou první souřadnici; kdyby platilo $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, muselo by být $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.)

$$p: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + t \\ z = \;\; -2t \end{cases}, t \in \mathbf{R} \quad q: \begin{cases} x = 2 + r \\ y = \quad r \\ z = 1 - r \end{cases}, r \in \mathbf{R}$$

Napíšeme parametrické rovnice přímek p a q.

$$p \cap q: \left.\begin{aligned} 1 + 3t &= 2 + r \\ 2 + t &= \quad r \\ -2t &= 1 - r \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} 3t - r &= 1 & &① \\ t - r &= -2 & &② \\ 2t - r &= -1 \quad |\cdot(-1) & &③ \end{aligned}$$

$$t = 2$$

$$t - r = -2 \Rightarrow r = 4$$

Připustíme, že přímky p, q mají společný bod.

Sečtením rovnic ① a ③ vychází $t = 2$, z rovnice ② pak $r = 4$.

③: $2 \cdot 2 - 4 \neq -1$; $p \cap q = \emptyset \wedge p \nparallel q \Rightarrow$ přímky p a q jsou mimoběžné.

Hodnoty $t = 2$ a $r = 4$ nevyhovují rovnici ③.

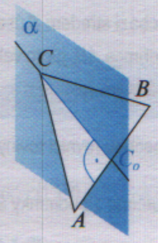
$$\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1)|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{42}}{7}$$

$\varphi \doteq 22° 12'$

Odchylku přímek p, q určíme pomocí jejich směrových vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\vec{v}$.

Př. 19

Vypočítej obsah trojúhelníku ABC, kde $A[-3, -4, 1]$, $B[3, -1, -2]$, $C[2, -2, 1]$.



$S = \frac{1}{2} \cdot z \cdot v;$

kde $z = |\overrightarrow{AB}|$, $v = |C, \leftrightarrow AB|$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (6, 3, -3)$

Obsah $\triangle ABC$ určíme např. pomocí délky strany AB a výšky v z vrcholu C.

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + (-3)^2}$ j $= \sqrt{54}$ j $= 3 \cdot \sqrt{6}$ j

Vypočítáme délku strany AB.

$|C, \leftrightarrow AB| = |CC_0|$, kde C_0 je pravoúhlý průmět bodu C na $\leftrightarrow AB$

Bod C_0 určíme jako průsečík roviny α, kolmé k přímce AB jdoucí bodem C, a přímky AB.

$\vec{n}_\alpha \parallel \overrightarrow{AB} \Rightarrow \vec{n}_\alpha(2, 1, -1)$

α: $2x + y - z + d = 0$; $d = ?$

$C \in \alpha$: $2 \cdot 2 + (-2) - 1 + d = 0 \Rightarrow d = -1$

α: $2x + y - z - 1 = 0$

Najdeme obecnou rovnici roviny α.

$$\leftrightarrow AB: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -4 + t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$$

Napíšeme parametrické rovnice přímky AB.

$C_0 \in \alpha \cap \leftrightarrow AB$: $2 \cdot (-3 + 2t) + (-4 + t) - (1 - t) - 1 = 0$

$6t - 12 = 0 \Rightarrow t = 2$

Určíme průsečík roviny α a přímky AB.

$C_0[-3 + 2 \cdot 2, -4 + 2, 1 - 2] \Rightarrow C_0[1, -2, -1]$

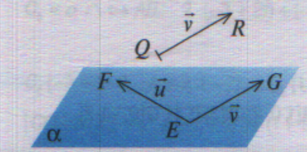
$|CC_0| = \sqrt{(2-1)^2 + (-2+2)^2 + (1+1)^2}$ j $= \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2}$ j $= \sqrt{5}$ j

Určíme vzdálenost bodů C a C_0.

$S = \frac{1}{2} \cdot z \cdot v = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{5}$ j² $= \frac{3}{2} \cdot \sqrt{30}$ j²

Př. 16

Napiš obecnou rovnici roviny α, v níž leží body $E[3, 1, 1]$, $F[1, 2, -1]$ a která je rovnoběžná s přímkou QR, kde $Q[-1, 4, -2]$ a $R[2, -2, 3]$.



$\leftrightarrow QR \parallel \alpha \Leftrightarrow \vec{v} = \overrightarrow{QR} \parallel \alpha$

Rovin…

bod E a vektory $\vec{u} = \overrightarrow{EF}$ a $\vec{v} = \overrightarrow{QR}$.

$\vec{u} = \overrightarrow{EF} = F - E = (-2, 1, -2)$

$\vec{v} = \overrightarrow{QR} = R - Q = (3, -6, 5)$

$u \nparallel v \quad \left(-\frac{2}{3} \neq -\frac{1}{6}\right)$

Určíme vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ a přesvědčíme se, že $u \nparallel v$.

$\vec{n}(a, b, c)$ … normálový vektor α; $\vec{n} \perp \vec{u}$; $\vec{n} \perp \vec{v}$

Najdeme normálový vektor $\vec{n}$ roviny α, který je kolmý k vektorům $\vec{u}$ a $\vec{v}$, tzn. $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ a $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$.

$$\left.\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 &\Rightarrow \quad -2a + b - 2c = 0 \quad |\cdot 3 \\ \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 &\Rightarrow \quad 3a - 6b + 5c = 0 \quad |\cdot 2 \end{aligned}\right\} \oplus$$

$$-9b + 4c = 0,\ b = 4 \Rightarrow c = 9$$

$$2a = b - 2c = 4 - 18 = -14 \Rightarrow a = -7$$

Dostaneme soustavu 2 rovnic o 3 neznámých. Najdeme její libovolné nenulové řešení. Zvolíme např. $b = 4$.

α: $-7x + 4y + 9z + d = 0$; $d = ?$

$E \in \alpha$: $-7 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 9 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow -8 + d = 0 \Rightarrow d = 8$

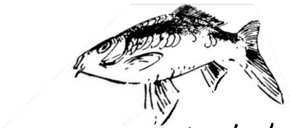
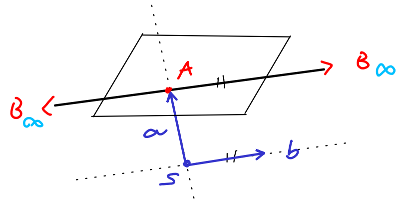
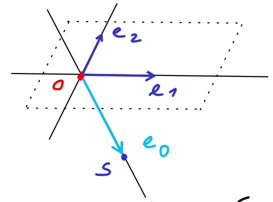
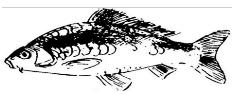
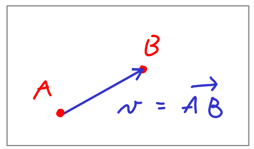
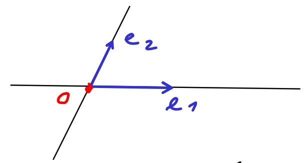
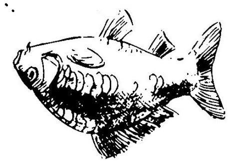
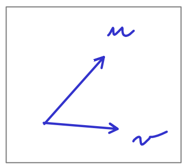
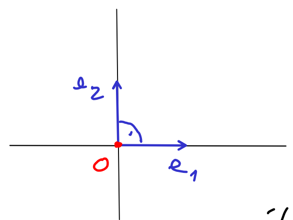
α: $-7x + 4y + 9z + 8 = 0 \quad |\cdot(-1)$

Souřadnice normálového vektoru $\vec{n}$ jsou koeficienty a, b, c v obecné rovnici $ax + by + cz + d = 0$ roviny α. Koeficient d určíme z podmínky $E \in \alpha$.

α: $7x - 4y - 9z - 8 = 0$

Rovnici roviny zapisujeme zpravidla tak, že koeficient a není záporný.

PŘEHLED / VÝHLED

ZOBRAZENÍ	ÚLOHY	PROSTORY	ALG. VYMEZENÍ	POČÍTÁNÍ
 projektivní	polohové	projektivní	$\mathcal{P} = \mathcal{A} \cup \{\infty\}$  pomocí $W \supset V$	homogenní souř.  = rozšířené
 afinní		afinní	$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$  body ...... vektor	afinní souř.  = libovolné
 ekvi-afinní  podobná  shodná	metrické	eukleidovské	$\mathcal{E} = \mathcal{A}$ + skalární součin  ...... $u \cdot v$ vektory ...... číslo	kartézské souř.  = orto-normální

TŘÍDĚNÍ

EUKLEIDOVSKÁ G.

AFINNÍ G.

PROJEKTIVNÍ G.

rovnoběžnost

konvexní množiny

shodnost

úsečky

příčky

vzdálenost

incidence

dvojpoměry

podobnost

obsah / objem

těžiště

přímka

uspořádání

A<B<C

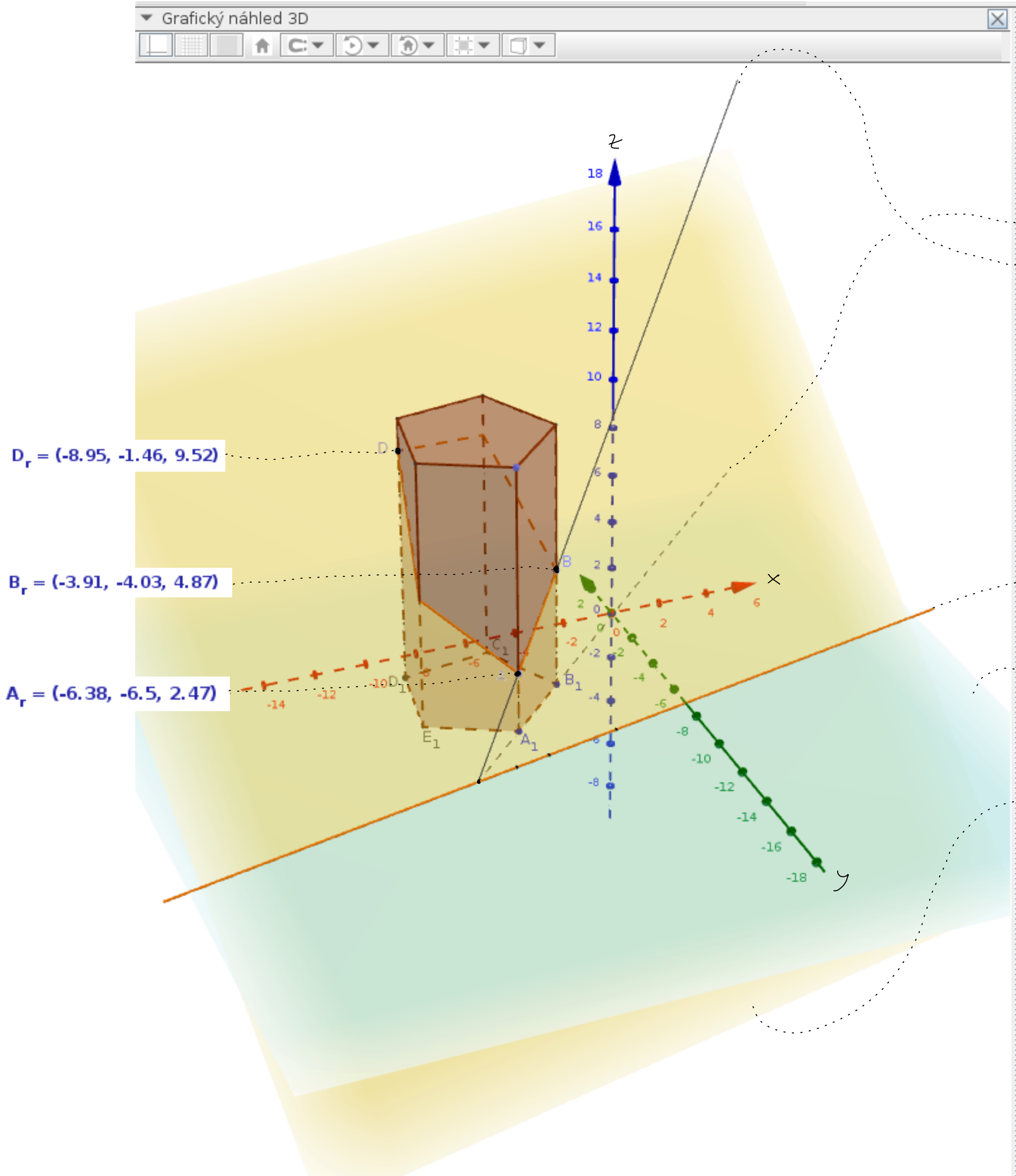
odchylka

rovina

poměry

bod

UKÁZKA



Algebraické okno

$k_D = 0$

Mnohoúhelník

- podstava = 21.04
- rez = 34.25 ········ obsah
- rez' = 34.25

Polopřímka

- AB_1: X = (-8.92, -9.05, 0) + λ (5.02, 5.02, 0)
- AB_2: -2.47x + 2.54y = 22.03
- AB_r: X = (-8.92, -9.05, 0) + λ (2.54, 2.54, 2.47)
- AD_0: X = (-5.48, -8.27, 0) + λ (-0.9, 1.77, 2.47)
- AD_1: X = (-5.48, -8.27, 0) + λ (-0.9, 1.77, 0)
- AD_2: -2.47x - 0.9y = 13.53
- AD_r: X = (-5.48, -8.27, 0) + λ (-0.9, 1.77, 2.47)
- BD_0: X = (1.37, -6.72, 0) + λ (-5.28, 2.69, 4.87)
- BD_1: X = (1.37, -6.72, 0) + λ (-5.28, 2.69, 0)
- BD_2: X = (1.37, 0) + λ (-5.28, 4.87)
- BD_r: X = (1.37, -6.72, 0) + λ (-5.28, 2.69, 4.87)

Pětiúhelník

- nadstava' = 21.04
- podstava' = 21.04

Přímka

- $stopa_1$: X = (1.51, -6.69, 0) + λ (23.58, 5.33, 0) ········ $\rho \cap \Pi_1$
- $stopa_2$: X = (2.31, 0, 8.16) + λ (18.81, 0, -5.33)
- $stpa_2$: -2.78x - 9.82y = -86.56

Rovina

- Π_1: z = 0 ········ rovina podstavy
- Π_2: y = 0
- κ_A: 23.58x + 5.33y = -185.1
- κ_B: 23.58x + 5.33y = -113.61
- κ_D: 23.58x + 5.33y = -218.82
- ρ: -5.33x + 23.58y - 18.81z = -165.87 ········ rovina ABD
- ρ': -5.33x + 23.58y - 18.81z = -165.87

Trojúhelník

- mnohoúhelník1 = 11.79
- trojuhelnik = 15.32
- trojuhelnik' = 15.32
- $trojuhelnik_1$ = 9.41

Úhel

- alef = 127.89°
- bet = 0°
- max = 127.89°

Úsečka

- U_{D2} = 9.52
- U_{Dr} = 9.52
- U_{OD0} = 12.06
- U_{OD1} = 7.4
- a = 3.5
- a'_0 = 7.32