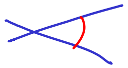
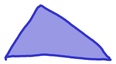
EUKLEIDOVSKÁ GEOMETRIE

TYPICKÉ EUKL. POJMY . . .

- SHODNOST, podobnost
- vzdálenost 
- odchylka 
- obsah / objem 

TYPICKÉ PROVEDENÍ

- obecné eukl. prostory, shodná zobrazení

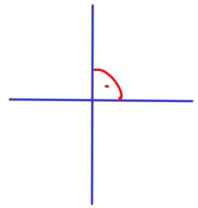
$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \ \text{vzdálenost}\\ \bullet\ \ \text{odchylka}\end{array}\right\}\ \text{ob. podprostorů}$$

- objemy rovnoběžnostěnů, simplexů
- algebraické konstrukce a souvislosti

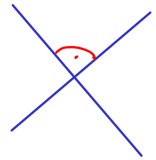
OPAKOVÁNÍ

SHODNOST POMOCÍ ...

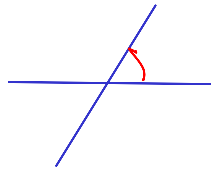
- AXIÓMŮ



$\cong$



- MĚŘENÍ

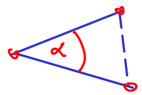


$\longrightarrow \mathbb{R}$

MĚŘENÍ POMOCÍ ...

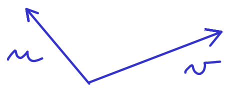
- (správné) METRIKY

$\longrightarrow |AB| \in \mathbb{R}$



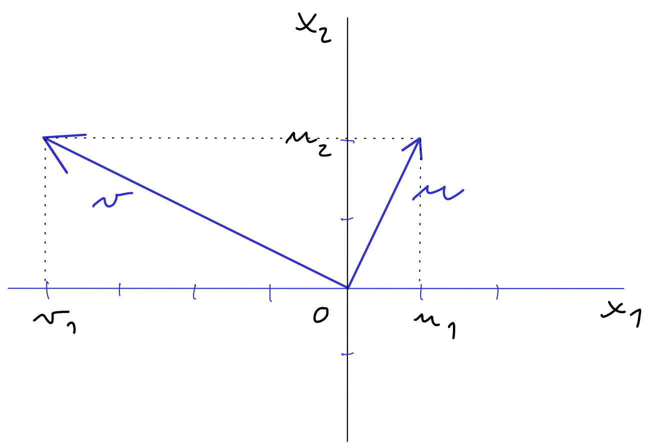
$\longrightarrow \cos\alpha \in \mathbb{R}$

- SKALÁRNÍHO SOUČINU



$\longrightarrow u \cdot v \in \mathbb{R}$

SKALÁRNÍ SOUČIN konzumně



- skalární součin vektorů

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots \in \mathbb{R}$$

pythagorova věta

- NORMA (velikost)

$$\| u \| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots} = \sqrt{u \cdot u}$$

- KOLMOST

$$u \perp v \iff u \cdot v = 0 \longleftrightarrow \text{podobné } \triangle$$

- ODCHYLKA

$$\sphericalangle(u, v) = \arccos \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} \longleftrightarrow \text{kosinová věta}$$

SKALÁRNÍ SOUČIN pořádně

... na vektorovém prostoru V

= přiřazení $V \times V \to \mathbb{R}$, které je

- SYMETRICKÉ tj. $u \cdot v = v \cdot u$
- BI-LINEÁRNÍ tj. lineární v OBOU složkách
- POZITIVNĚ DEFINITNÍ tj. $u \neq 0 \implies u \cdot u > 0$

- Předchozí souř. vyjádření $\iff$ báze ORTO-NORMÁLNÍ!

tj. $e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1 & \dots i = j \\ 0 & \dots i \neq j \end{cases}$

- souř. vyjádření OBECNĚ:

$u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \dots, \quad v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots$

$$u \cdot v = u_1 v_1 (e_1 \cdot e_1) + u_1 v_2 (e_1 \cdot e_2) + \dots$$
$$+ u_2 v_1 (e_2 \cdot e_1) + u_2 v_2 (e_2 \cdot e_2) + \dots = (u_1, u_2, \dots) \cdot \begin{pmatrix} e_1 \cdot e_1 & e_1 \cdot e_2 & \dots \\ e_2 \cdot e_1 & e_2 \cdot e_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

ZÁKLADNÍ NEROVNOSTI

- POZ. DEFINITNOST

$\boxed{u \cdot u \geq 0}$ přičemž $\boxed{=}$, právě když $\boxed{u = 0}$

$$\Downarrow$$

- CAUCHYHO - SCHWARTZOVA NEROVNOST

$\boxed{|u \cdot v| \leq \|u\| \cdot \|v\|}$ přičemž $\boxed{=}$, právě když $\boxed{u \propto v}$

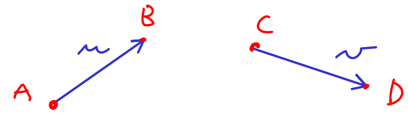
$$\Downarrow$$

- TROJÚHELNÍKOVÁ NEROVNOST

$\boxed{\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|}$ přičemž $\boxed{=}$, pouze když $\boxed{u \propto v}$

SHODNOST ÚSEČEK

• $AB \cong CD$, pokud $|AB| = |CD|$, přičemž ...



... $a \times a \longrightarrow V \longrightarrow \mathbb{R}$

$A, B \longmapsto u = \overrightarrow{AB} \longmapsto \boxed{|AB| = \|u\| = \sqrt{u \cdot u}}$ ... VZDÁLENOST A, B

• Toto přiřazení = EUKLEIDOVSKÁ METRIKA, přičemž ...

... (obecná) METRIKA:

a) $|AB| \geqq 0$

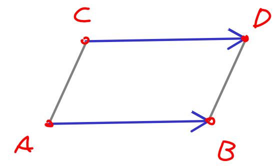
b) $|AB| = 0 \iff A = B$

c) $|AB| = |BA|$

d) $|AC| \leqq |AB| + |BC|$

... EUKLEIDOVSKÁ = kompatibilní s AFINNÍ strukturou, tj.

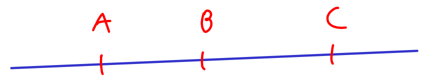
e) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \implies |AB| = |CD|$



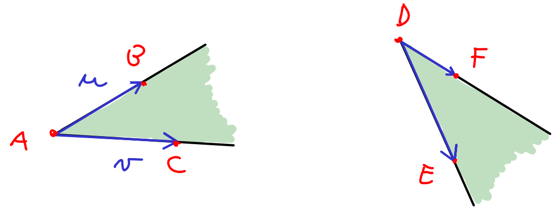
• KOLINEÁRNOST a USPOŘÁDÁNÍ bodů na přímce

pomocí METRIKY:

B mezi A a C $\iff |AC| = |AB| + |BC|$



SHODNOST ÚHLŮ



- $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle EDF$, pokud $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$, přičemž ...

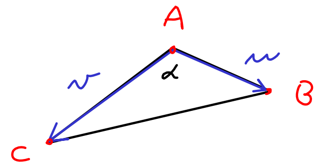
  ... $a \times a \times a \longrightarrow V \times V \longrightarrow [-1, 1] \longrightarrow [180°, 0°]$

  $B, A, C \longmapsto u = \overrightarrow{AB},\ v = \overrightarrow{AC} \longmapsto \dfrac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} \longmapsto \boxed{\arccos \dfrac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} = |\sphericalangle BAC|}$

  ... **ODCHYLKA** $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$

- Toto přiřazení je vskutku DOBŘE def!
- $\sphericalangle(u, v) = 90° \iff u \cdot v = 0$

- **ODCHYLKA** pomocí METRIKY a KOSINOVÉ VĚTY:



$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha}$$

$$\left.\begin{aligned} L &= \|u - v\|^2 = \dots = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\, u \cdot v \\ P &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\, \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad \boxed{u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\alpha}$$

SHRNUTÍ / PLÁN

- skalární součin stačí na VŠECHNO!

- EUKLEIDOVSKÝ PROSTOR $\mathcal{E}$

  = afinní prostor se skalárním součinem na zaměření $V = \vec{\mathcal{E}}$

- Eukleidovský podprostor $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{E}$

  = podmnožina, která je eukleidovským prostorem ...

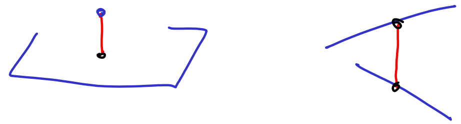
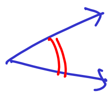
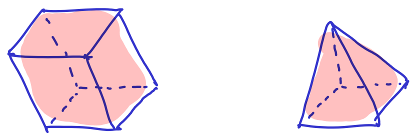
  = afinní podprostor se zúženým skal. součinem na $\vec{\mathcal{B}} \subseteq \vec{\mathcal{E}}$

- Relevantní zobrazení $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ v rámci AFINNÍCH:

f je SHODNÉ	$\iff$	$\vec{f}$ zachovává SKALÁRNÍ SOUČIN
f je PODOBNÉ	$\iff$	$\vec{f}$ — // — až na NÁSOBEK
f je EKVIafinní	$\iff$	... nějaké DETERMINANTY ...

detaily později

SHRNUTÍ / PLÁN

MÁME	CHCEME	POUŽIJEME
vzdálenost bodů 	vzdálenost podprostorů  . . .	kolmé příčky
odchylka vektorů 	odchylka podprostorů  . . .	kolmé průměty
vzdálenost bodů a odchylka vektorů	objem ob. mnohostěnu  . . .	DETERMINANTY a pod.