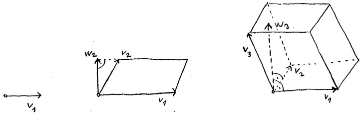
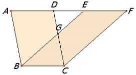
Objemy, determinanty apod.

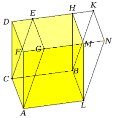
- obsahy rovnoběžníků, objemy rovnovnoběžnostěnů
- vymezení elementárně, vektorově
- determinanty, vnější a vektorové součiny
- poznámky a souvislosti



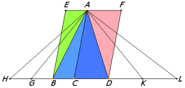
Opakování

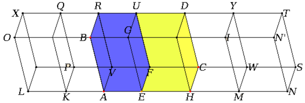
- Rovnoběžníky(-ostěny) se stejnými základnami a stejnými výškami mají stejný obsah.





- Poměr obsahů(-jemů) rovnoběžníků(-ostěnů) se stejnou výškou je stejný jako poměr délek(obsahů) jejich základen.

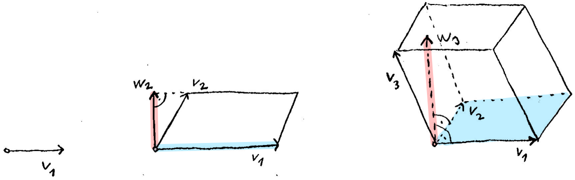




- Odtud poučka

$$„\textit{obsah(objem)} = \textit{základna} \times \textit{výška}“.$$

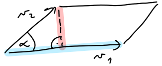
Obecně pomocí vektorů



Objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$ je nezáporné reálné číslo, ozn. $\mathrm{V}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots)$, takové, že

- $\mathrm{V}(\mathbf{v}_1) := \|\mathbf{v}_1\|$,
- $\mathrm{V}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) := \mathrm{V}(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2) = \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{w}_2\|$,
  kde $\mathbf{w}_2$ = kolmý průmět vektoru $\mathbf{v}_2$ do $\mathbf{v}_1^\perp$,
- $\mathrm{V}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) := \mathrm{V}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_3) = \mathrm{V}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \cdot \|\mathbf{w}_3\|$,
  kde $\mathbf{w}_3$ = kolmý průmět vektoru $\mathbf{v}_3$ do $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle^\perp$,
- atd...

Počítání



- Pro $k = 2$ např.:

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\| \cdot \sin\alpha,$$

kde $\alpha = \measuredangle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, ... (umíme)

- Pro obecné k např.: soustavy lin. rovnic

– podle definice, tj. pomocí kolmého průmětu, (umíme)

– podle vlastností, tj. pomocí determinantu, vektorového součinu, apod.

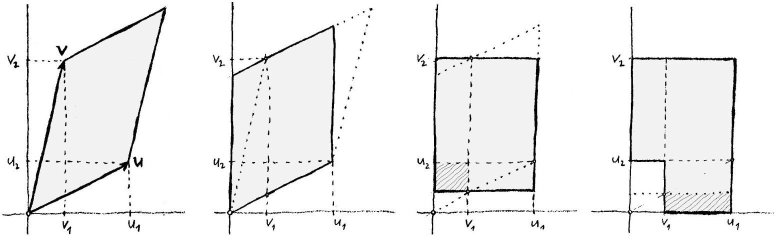
(~~na~~učíme)

při-

"vzorečky"

Úvod (naivně)

<u>Obsah</u> rovnoběžníku určeného vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ ...



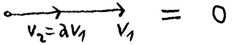
... je roven absolutní hodnotě <u>determinantu</u> $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1 v_2 - v_1 u_2$.

$\det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$

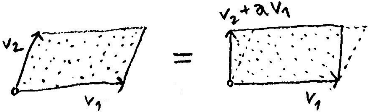
Úvod (koncepčně)

$V \times V \times \dots \to \mathbb{R}_+$ $\qquad\qquad$ $V \times V \times \dots \to \mathbb{R}$

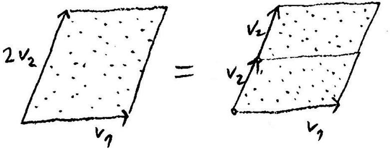
Vlastnosti obsahu/objemu se nápadně podobají vlastnostem determinantu:



$$V(\mathbf{v}_1, a\mathbf{v}_1) = 0$$



$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_1)$$



$$V(\mathbf{v}_1, b\mathbf{v}_2) = |b| \cdot V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$$

abs. hodnota

Determinant

Determinant chápeme

+ znaménka odp. paritě výběru

- buď jako $\mathrm{Mat}(n \times n) \to \mathbb{R}$,
  $=$ součet součinů prvků typu „jeden z každého řádku/sloupce“$\dots$,
- nebo jako $\underbrace{V \times \cdots \times V}_{n} \to \mathbb{R}$, kde $V = \mathbb{R}^n$, které je
  a) **anti-symetrické**
  $$\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots) = -\det(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \dots),$$
  b) **multi-lineární**

tj. ve všech složkách

$$\det(\mathbf{v}_1, b\mathbf{v}_2, \dots) = b \cdot \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots),$$
$$\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + \mathbf{w}_2, \dots) = \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots) + \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \dots).$$

Důležité (odvozené) vlastnosti:

$$\boxed{\begin{gathered}\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_1, \dots) = \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots),\\ \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots) = 0 \iff \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots \text{ jsou lineárně závislé.}\end{gathered}}$$

Vnější součin

Uvažme dim $V = \boldsymbol{n}$ a přiřazení $\underbrace{V \times \cdots \times V}_{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}$:

$$(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) \longmapsto \text{souřadnice} \longmapsto \text{determinant.}$$

Závisí na volbě báze...[1]

Vnější součin = předchozí přiřazení vzhledem k nějaké ortonormální bázi; ozn.

$$[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n] := \det(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n).$$

Vnější součin je anti-symetrické $\boldsymbol{n}$-lineární zobrazení, které až na znaménko souhlasí objemem...

Mezishrnutí:

$$\mathrm{V}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \begin{cases} 0 & \text{pro } k > n \\ \pm[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k] & \text{pro } k = n \\ ? & \text{pro } k < n \end{cases}$$

viz dále...

[1] ... viz přechodové matice a Cauchyovu větu o součinu determinantů.

Kouzlo ($k = 2$)

Víme, že

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\| \cdot \sin\alpha,$$

přičemž

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}, \qquad \cos\alpha = \frac{\mathbf{v}_1 \mathbin{\boldsymbol{.}} \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\|}.$$

Odtud

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \cdots = \sqrt{\|\mathbf{v}_1\|^2 \|\mathbf{v}_2\|^2 - (\mathbf{v}_1 \mathbin{\boldsymbol{.}} \mathbf{v}_2)^2} = \sqrt{\begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \mathbin{\boldsymbol{.}} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \mathbin{\boldsymbol{.}} \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_2 \mathbin{\boldsymbol{.}} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \mathbin{\boldsymbol{.}} \mathbf{v}_2 \end{vmatrix}},$$

zase jakýsi determinant, ...

Kouzlo (obecně)

... tzv. *Gramův determinant*, ozn.

$$G(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) := \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \ldots & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_1 & \ldots & \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k \end{vmatrix}.$$

Věta

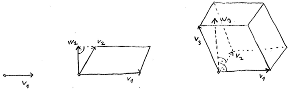
Pro libovolnou k-tici vektorů v eukleidovském prostoru platí

$$V(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \sqrt{G(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)}.$$

Důkaz.

Plyne z vlastností determinantu a skalárního součinu... / □

Detaily k důkazu



1) Pro navzájem kolmé vektory (kvádr):

$$G(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{w}_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \|\mathbf{v}_1\|^2 \cdot \|\mathbf{w}_2\|^2 \cdot \|\mathbf{w}_3\|^2 = V(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)^2. \leftarrow \text{(zejména vždy} \geq 0)$$

2) Pro lib. našikmené vektory $\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_2 + a\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{w}_3 + b\mathbf{v}_1 + c\mathbf{v}_2$:

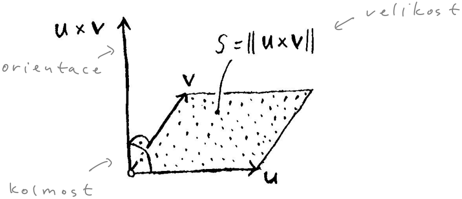
$$G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3 \end{vmatrix} \stackrel{!}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{v}_3 \end{vmatrix} \stackrel{!}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_2 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_3 \\ \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_3 \\ \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{w}_3 \end{vmatrix} = G(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3). \quad \square$$

Vektorový součin ($n = 3$)

Od maturity známe jako operaci $V \times V \to V$ s několika užitečnými vlastnostmi:



U maturity zpravidla nevíme proč, ale pro $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ počítáme takto:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

souř. vzhledem k ON bázi

Vektorový součin (obecně)

Návod k předchozímu souř. vyjádření — Laplaceův rozvoj determinantu:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x_1 \\ u_2 & v_2 & x_2 \\ u_3 & v_3 & x_3 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} x_1 - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} x_3 .$$

☞ Důležitá (bezsouřadnicová) interpretace:

vektorový s.

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}] = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \,.\, \mathbf{x},$$

vnější součin   skalární s.

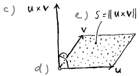
Obecná definice:

Vektorovým součinem ($\boldsymbol{n} - \mathbf{1}$)-tice vektorů $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1})$ v $\boldsymbol{n}$-rozměrném eukleidovském prostoru je vektor $\mathbf{w} := \mathbf{v}_1 \times \cdots \times \mathbf{v}_{n-1}$ splňující

$$[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{x}] = \mathbf{w} \,.\, \mathbf{x} \qquad (*)$$

pro všechna $\mathbf{x} \in V$.

Vektorový součin (vlastnosti)



105

Věta

Ozn. $\mathbf{w} := \mathbf{v}_1 \times \cdots \times \mathbf{v}_{n-1}$, $n = \dim V$.

a) *Toto je anti-symetrické multi-lineární zobrazení* $\underbrace{V \times \cdots \times V}_{n-1} \to V$.

b) $\mathbf{w} = \mathbf{o} \iff \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ *jsou lineárně závislé.*

c) $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ *jsou lineárně nezávislé* $\Longrightarrow (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{w})$ *je kladná báze.*

d) $\mathbf{w}$ *je kolmý ke všem vektorům* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$.

e) $\|\mathbf{w}\| = \mathrm{V}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1})$.

Důkaz.

a) Viz def. rovnost (*) a vlastnosti vnějšího (v) a skalárního (s) součinu.

b) $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{x}] = 0 \;\forall \mathbf{x} \in V \overset{(v)}{\iff} \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ lin. závislé;
$\mathbf{w} \,.\, \mathbf{x} = 0 \;\forall \mathbf{x} \in V \overset{(s)}{\iff} \mathbf{w} = \mathbf{o}$.

c) $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ lin. nezávislé $\overset{(b)}{\Longrightarrow} \mathbf{w} \neq \mathbf{o} \Longrightarrow [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{w}] \overset{(*)}{=} \mathbf{w} \,.\, \mathbf{w} \overset{(s)}{>} 0$.

d) $\mathbf{w} \,.\, \mathbf{v}_i \overset{(*)}{=} [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_i] \overset{(v)}{=} 0$.

e) $\|\mathbf{w}\|^2 = \mathbf{w} \,.\, \mathbf{w} \overset{(*)}{=} [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{w}] \overset{(v)}{=} \mathrm{V}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{w}) \overset{(d)}{=} \mathrm{V}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}) \cdot \|\mathbf{w}\|$. $\square$

Poznámky

K vektorovému součinu pro $n = 3$:

- Binární operace $V \times V \to V$, která **není** asociativní (přesto užitečná).
- Pro velikost platí

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha, \quad \text{kde } \alpha = \measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

K aplikacím:

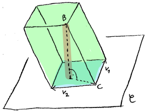
- Orientace a kolmosti vektorů.
- Objemy rovnoběžnostěnů, simplexů atd., přičemž:

indukce (+ limitní úvahy)

$$\text{Objem } \boldsymbol{k}\text{-dim simplexu} = \frac{1}{\boldsymbol{k}!} \text{ objemu opsaného rovnoběžnostěnu.}$$

- Vzdálenosti podprostorů **bez** řešení soustav rovnic:

$$v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \frac{\mathrm{V}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \overrightarrow{BC})}{\mathrm{V}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots)},$$



kde $B \in \mathcal{B}$, $C \in \mathcal{C}$ a $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots)$ je báze $\overrightarrow{\mathcal{B}} + \overrightarrow{\mathcal{C}}$.