

Geometrie 2

Obsah

Úvodní přehled	1
Afinní geometrie	9
Afinní struktura	10
Typické příklady	16
Afinní souřadnice	25
Afinní zobrazení	31
Vyjádření podprostorů	40
Vzájemné polohy	45
Příčky	56
Uspořádání apod.	59
Těžiště apod.	64
Shrnutí kapitoly	75
Eukleidovská geometrie	76
Eukleidovská struktura	77
Vzdálenosti	85
Kolmé rozklady apod.	90
Objemy, determinanty apod.	96
Odchytky	111
Shodná, podobná a ekviafinní zobrazení	116
Shrnutí kapitoly	122

Poslední aktualizace 23. listopadu 2021

<https://is.muni.cz/auth/el/ped/podzim2021/MA0009/index.qwarp>

CÍLE (STAĽE STEJNÉ)

- něco UDĚLAT, něco nového ..
- všechno VYSVĚTLOVAT, srozumitelně.

PROCES (STAĽE STEJNÝ)

- ↑ přetvářet a vytvářet
- | rozlišovat a vysvětlovat
- | pochopit a použít
- | zapamatovat a zopakovat

KULISY (GEOMETRIE ...)

- vloni konstrukční / elementární
- nyní počítač / vektorová

ROZLOŽENÍ

- Afinní geom.
 - Eukleidovská geom.
 - Projektivní rozšíření
 - zobrazení blížeji
- } podzim '21
- } jaro '22


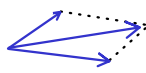

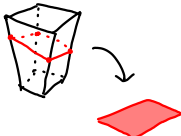
VÝUKA

- předseznámení doma
- vyjasnění přednáška
- užití cvičení

ZAKONČENÍ

- samost. práce dva + dva
- písemka aspoň 50%
- ústní zkouška nad VLASTNÍMI výevory

SHODY & ROZDÍLY

	MINULÝ SEMESTR	TENTO SEMESTR
PŘEDMĚT	geometrie	totež
CÍLE	opakování, rozšíření a organizace poznatků	totež
NAŠTROUĚ	pravítko a kružítko 	lineární algebra  (::: ::)
PŘEDPOKLADY	zvědavost	totež + lineární algebra!
VÝHODY	jednoduchost, představitelnost apod.	jednotný popis, žádná představitelnost apod.
TYPICKÉ CÍLE	sestrojte ... <ul style="list-style-type: none">- dotykové úrohy- kvadratura - obecný průmět hranolu- řez hranolu- řez ve skutečné velikosti 	spočítejte ... X - } - } totéž - } (resp. něco velmi podobného) -

SHODY & ROZDÍLY

	MINULÝ SEMESTR	TENTO SEMESTR
ZÁKLADNÍ POJMY	bod, přímka, rovina	vektor
ZÁKLADNÍ VZTAHY	incidentnost, spojitost, rovnoběžnost, uspořádaní, shodnost	lineární (ne)závislost, (multi) lineárnost a pod.
ZÁKLADNÍ ÚLOHY	sestrojitelné veličiny průniky přímek, rovin vzdálenosti bodů obsahy, kvadratury a pod.	X soustavy lin. rovnic velikosti vektorů determinanty a pod.

VZPOMÍNKY (NA MATURITU)

Př. 13

Dokaž, že přímky $p \leftrightarrow AB$ a $q \leftrightarrow CD$, kde $A[1, 2, 0]$, $B[4, 3, -2]$, $C[2, 0, 1]$, $D[5, 3, -2]$, jsou mimoběžné, a urči jejich odchylku φ .

$$\overline{AB}(3, 1, -2); \overline{CD}(3, 3, -3) \parallel \vec{v}(1, 1, -1)$$

$$\frac{3}{3} \neq \frac{1}{3} \Rightarrow \overline{AB} \not\parallel \overline{CD} \Rightarrow p \not\parallel q.$$

$$p: \begin{cases} x=1+3t \\ y=2+t \\ z=-2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad q: \begin{cases} x=2+r \\ y=r \\ z=1-r \end{cases}, r \in \mathbb{R}$$

$$p \cap q: \begin{cases} 1+3t=2+r \\ 2+t=r \\ -2t=1-r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3t-r=1 \\ t-r=-2 \\ 2t-r=-1 \end{cases} \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \textcircled{1} - \textcircled{2} \\ \textcircled{3} - \textcircled{2} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 2t=3 \\ t-r=-2 \\ 2t-r=-1 \end{cases} \begin{array}{l} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \textcircled{1} \cdot 2 \\ \textcircled{2} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 4t=6 \\ t-r=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=1.5 \\ r=3.5 \end{cases}$$

Určíme směrové vektory přímek p, q a ověříme, že $p \not\parallel q$. (Vektory \overline{AB} a \overline{CD} mají stejnou první souřadnici; kdyby platilo $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, muselo by být $\overline{AB} = \overline{CD}$.)

Napišeme parametrické rovnice přímek p a q .

Připustíme, že přímky p, q mají společný bod.

Sečtením rovnic $\textcircled{1}$ a $\textcircled{3}$ vychází $t=2$, z rovnice $\textcircled{2}$ pak $r=4$.

Hodnoty $t=2$ a $r=4$ nevyhovují rovnici $\textcircled{3}$.

Odchylku přímek p, q určíme pomocí jejich směrových vektorů \overline{AB} a \vec{v} .

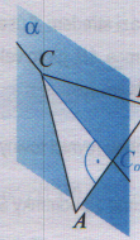
$\textcircled{3}: 2 \cdot 2 - 4 \neq -1; p \cap q = \emptyset \wedge p \not\parallel q \Rightarrow$ přímky p a q jsou mimoběžné.

$$\cos \varphi = \frac{|\overline{AB} \cdot \vec{v}|}{|\overline{AB}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1)|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{42}}{7}$$

$$\varphi \doteq 22^\circ 12'$$

Př. 19

Vypočítej obsah trojúhelníku ABC , kde $A[-3, -4, 1]$, $B[3, -1, -2]$, $C[2, -2, 1]$.



$$S = \frac{1}{2} \cdot z \cdot v;$$

$$\text{kde } z = |\overline{AB}|, v = |C, \leftrightarrow AB|$$

$$\overline{AB} = B - A = (6, 3, -3)$$

Obsah ΔABC určíme např. pomocí délky strany AB a výšky v z vrcholu C .

Vypočítáme délku strany AB .

Bod C_0 určíme jako průsečík roviny α , kolmé k přímce AB jdoucí bodem C , a přímky AB .

Najdeme obecnou rovnici roviny α .

Napišeme parametrické rovnice přímky AB .

Určíme průsečík roviny α a přímky AB .

Určíme vzdálenost bodů C a C_0 .

$$|\overline{AB}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{54} = 3 \cdot \sqrt{6} \text{ j}$$

$$|C, \leftrightarrow AB| = |CC_0|, \text{ kde } C_0 \text{ je pravouhlý průmět bodu } C \text{ na } \leftrightarrow AB$$

$$\vec{n}_\alpha \parallel \overline{AB} \Rightarrow \vec{n}_\alpha(2, 1, -1)$$

$$\alpha: 2x + y - z + d = 0; d = ?$$

$$C \in \alpha: 2 \cdot 2 + (-2) - 1 + d = 0 \Rightarrow d = -1$$

$$\alpha: 2x + y - z - 1 = 0$$

$$\leftrightarrow AB: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -4 + t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$C_0 \in \alpha \cap \leftrightarrow AB: 2 \cdot (-3 + 2t) + (-4 + t) - (1 - t) - 1 = 0$$

$$6t - 12 = 0 \Rightarrow t = 2$$

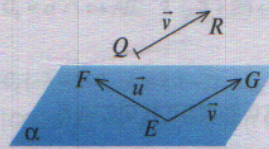
$$C_0[-3 + 2 \cdot 2, -4 + 2, 1 - 2] \Rightarrow C_0[1, -2, -1]$$

$$|CC_0| = \sqrt{(2-1)^2 + (-2+2)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5} \text{ j}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot z \cdot v = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{5} \text{ j}^2 = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{30} \text{ j}^2$$

Př. 16

Napiš obecnou rovnici roviny α , v níž leží body $E[3, 1, 1]$, $F[1, 2, -1]$ a která je rovnoběžná s přímkou QR , kde $Q[-1, 4, -2]$ a $R[2, -2, 3]$.



$$\leftrightarrow QR \parallel \alpha \Leftrightarrow \vec{v} = \overline{QR} \parallel \alpha$$

$$\vec{u} = \overline{EF} = F - E = (-2, 1, -2)$$

$$\vec{v} = \overline{QR} = R - Q = (3, -6, 5)$$

$$u \parallel v \left(\frac{2}{3} \neq \frac{-1}{6} \right)$$

$\vec{n}(a, b, c)$... normálový vektor α ; $\vec{n} \perp \vec{u}$; $\vec{n} \perp \vec{v}$

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow -2a + b - 2c = 0 \quad | \cdot 3 \quad \textcircled{1}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow 3a - 6b + 5c = 0 \quad | \cdot 2 \quad \textcircled{2}$$

$$-9b + 4c = 0, b = 4 \Rightarrow c = 9$$

$$2a = b - 2c = 4 - 18 = -14 \Rightarrow a = -7$$

$$\alpha: -7x + 4y + 9z + d = 0; d = ?$$

$$E \in \alpha: -7 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 9 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow -8 + d = 0 \Rightarrow d = 8$$

$$\alpha: -7x + 4y + 9z + 8 = 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$\alpha: 7x - 4y - 9z - 8 = 0$$

Rovin

bod E a vektory $\vec{u} = \overline{EF}$ a $\vec{v} = \overline{QR}$.

Určíme vektory \vec{u} a \vec{v} a přesvědčíme se, že $u \not\parallel v$.


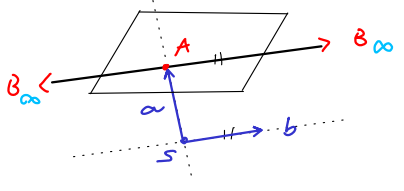
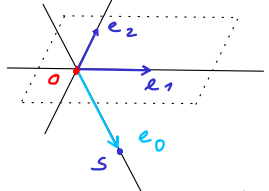

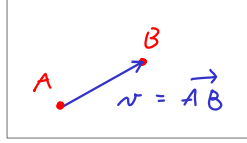
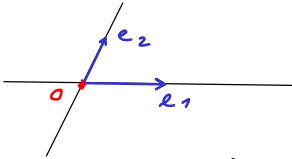



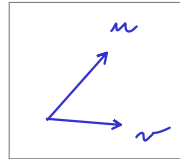
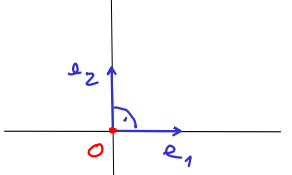
Najdeme normálový vektor \vec{n} roviny α , který je kolmý k vektorům \vec{u} a \vec{v} , tzn. $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ a $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$.

Dostaneme soustavu 2 rovnic o 3 neznámých. Najdeme její libovolné nenulové řešení. Zvolíme např. $b = 4$.

Souřadnice normálového vektoru \vec{n} jsou koeficienty a, b, c v obecné rovnici $ax + by + cz + d = 0$ roviny α . Koeficient d určíme z podmínky $E \in \alpha$.

Rovnici roviny zapisujeme zpravidla tak, že koeficient a není záporný.


PŘEHLED / VÝHLED

ZOBRAZENÍ	ÚLOHY	PROSTORY	ALG. VYMEZENÍ	POČÍTÁNÍ
 <p>projektivní</p>	<p>polohové</p>	<p>projektivní</p>	<p>$P = a \cup \{\infty\}$</p>  <p>pomocí $W \supset V$</p>	<p>homogenní souř.</p>  <p>= rozšířené</p>
 <p>afinní</p>		<p>afinní</p>	<p>$a \times a \rightarrow V$</p>  <p>body vektor</p>	<p>afinní souř.</p>  <p>= libovolné</p>
 <p>ekvi-afinní</p>  <p>podobná</p>  <p>shodná</p>	<p>měřicové</p>	<p>eukleidovské</p>	<p>$\mathcal{E} = a + \text{skalární součin}$</p>  <p>..... $n \cdot m$</p> <p>vektory číslo</p>	<p>kartézské souř.</p>  <p>= orto-normální</p>

TRÍDĚNÍ

EUKLEIDOVSKÁ G.

AFINNÍ G.


uspořádaní 


PROJEKTIVNÍ G.


bod \cdot


přímka 


rovina 

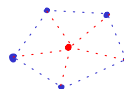
~~přímky~~ 


~~incidence~~ 


~~dvoj poměry~~ 

~~úsečky~~ 


~~poměry~~ 

~~tížiště~~ 

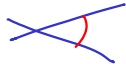
konvexní množiny 


~~rovnoběžnost~~ 

~~shodnost~~

~~vzdálenost~~ 

~~podobnost~~

~~odchylka~~ 

~~obsah / objem~~ 

U K A' z K A

Grafický náhled 3D

$D_r = (-8.95, -1.46, 9.52)$

$B_r = (-3.91, -4.03, 4.87)$



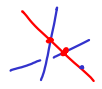




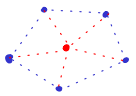
$A_r = (-6.38, -6.5, 2.47)$

Algebraické okno

- $k_D = 0$
- Mnohoúhelník
 - podstava = 21.04
 - rez = 34.25 obsah
 - rez' = 34.25
- Polopřímka
 - $AB_1: X = (-8.92, -9.05, 0) + \lambda (5.02, 5.02, 0)$
 - $AB_2: -2.47x + 2.54y = 22.03$
 - $AB_r: X = (-8.92, -9.05, 0) + \lambda (2.54, 2.54, 2.47)$
 - $AD_0: X = (-5.48, -8.27, 0) + \lambda (-0.9, 1.77, 2.47)$
 - $AD_1: X = (-5.48, -8.27, 0) + \lambda (-0.9, 1.77, 0)$
 - $AD_2: -2.47x - 0.9y = 13.53$
 - $AD_r: X = (-5.48, -8.27, 0) + \lambda (-0.9, 1.77, 2.47)$
 - $BD_0: X = (1.37, -6.72, 0) + \lambda (-5.28, 2.69, 4.87)$
 - $BD_1: X = (1.37, -6.72, 0) + \lambda (-5.28, 2.69, 0)$
 - $BD_2: X = (1.37, 0) + \lambda (-5.28, 4.87)$
 - $BD_r: X = (1.37, -6.72, 0) + \lambda (-5.28, 2.69, 4.87)$
- Pětúhelník
 - nadstava' = 21.04
 - podstava' = 21.04
- Přímka
 - stopa₁: $X = (1.51, -6.69, 0) + \lambda (23.58, 5.33, 0)$ $\rho \cap \Pi_1$
 - stopa₂: $X = (2.31, 0, 8.16) + \lambda (18.81, 0, -5.33)$
 - stopa₃: $-2.78x - 9.82y = -86.56$
- Rovina
 - $\Pi_1: z = 0$ rovina podstavu
 - $\Pi_2: y = 0$
 - $\kappa_A: 23.58x + 5.33y = -185.1$
 - $\kappa_B: 23.58x + 5.33y = -113.61$
 - $\kappa_D: 23.58x + 5.33y = -218.82$
 - $\rho: -5.33x + 23.58y - 18.81z = -165.87$ rovina ABD
 - $\rho': -5.33x + 23.58y - 18.81z = -165.87$
- Trojúhelník
 - mnohoúhelník1 = 11.79
 - trojuhelník = 15.32
 - trojuhelník' = 15.32
 - trojuhelník₁ = 9.41
- Úhel
 - alef = 127.89°
 - bet = 0°
 - max = 127.89°
- Úsečka
 - $U_{D2} = 9.52$
 - $U_{Dr} = 9.52$
 - $U_{oD0} = 12.06$
 - $U_{oD1} = 7.4$
 - $a = 3.5$
 - $a'_0 = 7.32$

AFINNÍ GEOMETRIE

TYPICKÉ AF. POJMY

- bod \cdot , přímka $/$, rovina 
- rovnoběžnost $//$, poměry 
- přímky  a přímkové plochy 
- uspořádání , úsečky , konvexní množiny 
- těžiště 

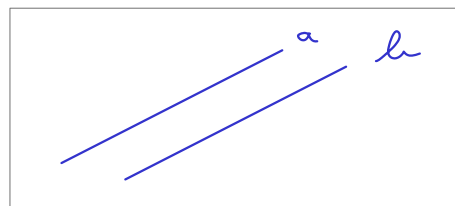
TYPICKÉ PŘEVODNÍ

- obecný af. prostor, pod-prostor
- obecní af. zobrazení, af. souřadnice, přechody
- rovnoběžnost a další polohy, přímky podpr.
- polo-prostory, barycentrické souř. a pod.

OPAKOVÁNÍ / MOTIVACE

ROVNOBĚŽNOST POMOCÍ ...

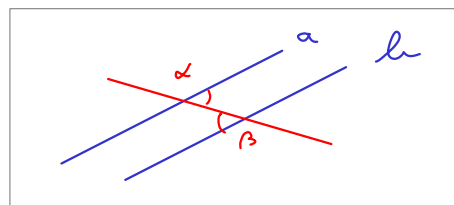
• INCIDENCE



← v jedné rovině

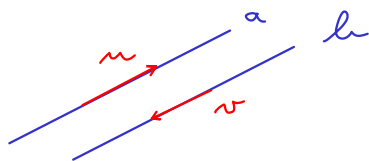
$$a \parallel b \iff a \cap b = \emptyset$$

• SHODNOSTI



$$a \parallel b \iff \alpha = \beta$$

• VEKTORŮ

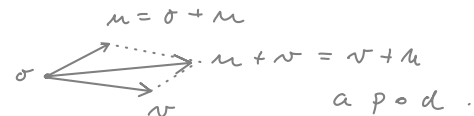


$$a \parallel b \iff u = k \cdot v$$

↙
lineárně
závislé

VEKTORY

$$+ : V \times V \rightarrow V$$

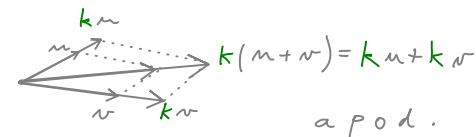


0

• VEKTOROVÝ PROSTOR V nad tělesem \mathbb{R}

= komutativní grupa, na níž působí \mathbb{R}

tj. akce $\cdot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$ je v souladu s



→ LINEÁRNÍ KOMBINACE $km + lv + \dots$

→ LIN. ZÁVISLOST $w = km + lv + \dots$

→ BÁZE, DIMENZE, ...

• Typické příklady:

- síly (šipky)

- řešení soustav HOMOG. LIN. rovnic

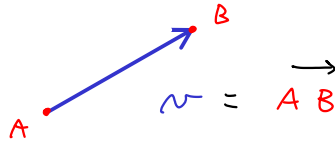
• Pozn:

- v algebře lze místo \mathbb{R} lib. těleso (např. \mathbb{Q})

- do geometrie potřebujeme \mathbb{R} kvůli SPOJITOSTI

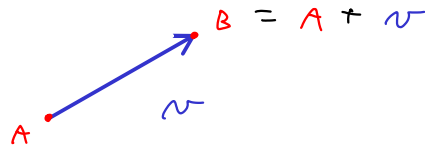
AFINNÍ STRUKTURA

- názorně



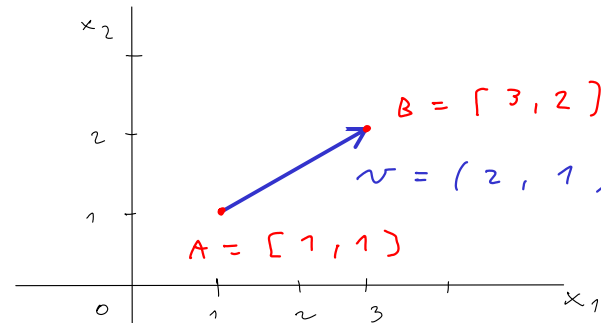
$(\text{bod}, \text{bod}) \mapsto \text{vektor}$

- Aktivně



$(\text{bod}, \text{vektor}) \mapsto \text{bod}$

- početně



$$v = B - A$$

$$B = A + v$$

$$A = B - v$$

AFINNÍ STRUKTURA pořádně

- AFINNÍ PROSTOR a nad vekt. prostorem V

= množina a , na níž působí V

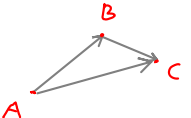
jakožto "grupa posouvání", tj. $V \times a \rightarrow a$:

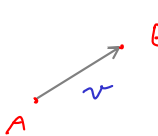
1) $\bullet A = A + 0$ pro lib. $A \in a$

2)  $(A+u)+v = A+(u+v)$ pro lib. $A \in a$ a $u, v \in V$

3)  ... et! tak, že $B = A + v$ pro lib. $A, B \in a$

= množina a s přiřazením $a \times a \rightarrow V$,
které je v souladu s vekt. strukturou V :

1)  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ pro lib. $A, B, C \in a$

2)  ... et! tak, že $\vec{AB} = v$ pro lib. $A \in a, v \in V$

SOUVISEJÍCÍ POJMY

- vekt. prostor V ... zaměření a , ozn. $V = \vec{a}$
- dimenze $a = \text{dimenze } V$
- afinní podprostor $B \subseteq a$
= podmnožina, která je afinním prostorem
tj. zúžení $B \times B \rightarrow U \subseteq V$
↖ vekt. podprostor ve V
- $\text{dim } B = \text{dim } U$:

0	·	·	·	·	bod
1	·	·	·	·	přímka
2	·	·	·	·	rovina
$\text{dim } V - 1$	·	·	·	·	<u>nad-rovina</u>
- Typické příklady:
 - vekt. prostor se ZAPOMENUTÝM neutrálním prvkem
 - řešení soustav (NEHOMOG.) LIN. rovnic

MEZISHRNUTÍ

- ROVNOBĚŽNOST 3x jinak
- opakování VĚKTOROVÉ PROSTORY
- obecné AFINNÍ (pod-) PROSTORY
- TYPICKÉ příklady ...

TYPICKÉ PŘÍKLADY

- názorný (geometrický) model
- standardní (aritmetický) model
- kanonický (vektorový) model

- řešení lineárních algebr. rovnic
- řešení lineárních dif. rovnic

- a pod.

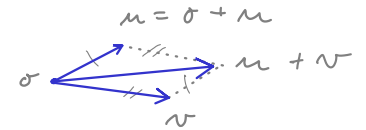
NÁZORNÝ AF. PROSTOR

axiomy I, U, R, Sh, Sp

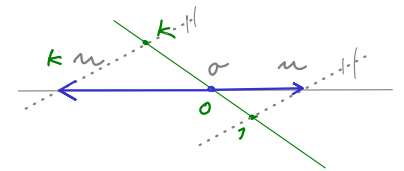
• body a . . . klasický eukleidovský prostor

• vektory V . . . { orientované úsečky }

- sčítání . . . doplnění rovnoběžníku,
resp. skládání na přímce

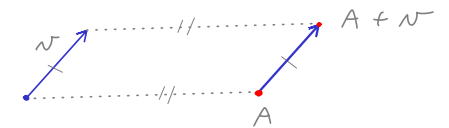


- natahování . . . doplnění rovnoběžek,
resp. skládání na přímce



• akce $V \times a \rightarrow a$

. . . doplnění rovnoběžníku,
resp. skládání na přímce



• požadavky 1) - 3) . . . ✓

Pozn . . . stačí axiomy I, U, R, ~~Sh~~, Sp

STANDARDNÍ AF. PROSTOR . . . "ARITMETICKÝ" MODEL¹⁵

- body a . . . \mathbb{R}^n
 - vektory v . . . \mathbb{R}^n
- ↙ ↘
n-tice reálných čísel

- sčítání . . . po složkách

- násobení . . . po složkách

- akce $v \times a \rightarrow a$
. . . po složkách

- pořadavky 1) - 3) . . . ✓

Pozn . . . stačí vlastnosti $+ a \cdot v \in \mathbb{R}$

KANONICKÝ AF. PROSTOR SE ZAMĚŘENÍM ✓

- vektory $V \dots$ lib. vektorový prostor
- body $a \dots V$
- akce $V \times a \rightarrow a$
 $\dots (v, m) \mapsto m + v$
- pořadavky 1) - 3) \dots ✓

Pozn \dots stačí vlastnosti $+ ve V$

\dots zobecnění předchozího příkladu

LINEÁRNÍ DIF. ROVNICE I.

- body a . . . $\{ \text{primitivní funkce k funkci } \frac{1}{x} \} =$
 $= \{ \text{řešení dif. rovnice } \boxed{y' = \frac{1}{x}} \} =$
 $= \{ y = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C \mid C \in \mathbb{R} \}$
- vektory V . . . $\{ \text{řešení dif. rovnice } \boxed{y' = 0} \} =$
 $= \{ y = C \mid C \in \mathbb{R} \}$
 - sčítání a násobování . . . funkcí
- akce $V \times a \rightarrow a$. . . sčítání funkcí
- pořadavky 1) - 3) . . . \checkmark

Pozn . . . stačí vlastnosti $+ a \cdot v \in \mathbb{R}$

. . . podprostor v PROSTORU funkcí . . .
 $\dim 1$

LINEÁRNÍ DIF. ROVNICE II.

• body a . . . $\{$ řešení dif. rovnice $y'' - 4y' + 5y = 10$ $\} =$
 $= \{ y = 2 + C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R} \}$

• vektory V . . . $\{$ řešení dif. rovnice $y'' - 4y' + 5y = 0$ $\} =$
 $= \{ y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R} \}$

- sčítání a násobování . . . funkcí

• akce $V \times a \rightarrow a$. . . sčítání funkcí

• pořadavky 1) - 3) . . . \checkmark

Pozn . . . stačí vlastnosti $+ a \cdot v$ v \mathbb{R}

. . . podprostor v PROSTORU funkcí . . .
 $\dim 2$

UMĚLÝ PŘÍKLAD

- $a := \{ [x, \sin x] \mid x \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{R}^2$

- $a \times a \rightarrow \mathbb{R}^2$:

a) zúžení stand. přiřazení

$$A = [a, \sin a], B = [b, \sin b] \rightsquigarrow \vec{AB} := [b-a, \sin b - \sin a]$$

... **NĚNÍ** af. prostor ("a" = $\mathbb{R} \times \langle -2, 2 \rangle$ **NĚNÍ** vekt. prostor)

b) rozdíl na první složce

$$A = [a, \sin a], B = [b, \sin b] \rightsquigarrow \vec{AB} := [b-a, 0]$$

... **JĚ** af. prostor se zaměřením $\vec{a} \cong \mathbb{R}$

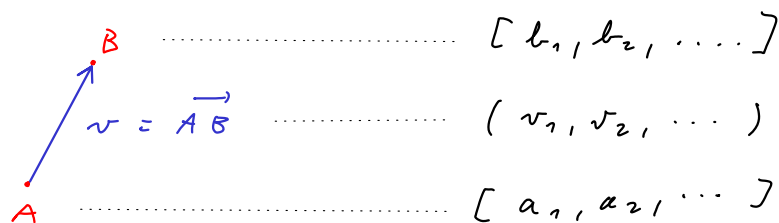
c) rozdíl na druhé složce

$$A = [a, \sin a], B = [b, \sin b] \rightsquigarrow \vec{AB} := [0, \sin b - \sin a]$$

... **NĚNÍ** af. prostor ("a" $\cong \langle -2, 2 \rangle$ **NĚNÍ** vekt. prostor)

SHRNUTÍ

- několik MODELŮ



- několik důležitých PŘÍKLADŮ

řešení
LINEÁRNÍCH
ROVNIC

- af. prostor a dim k je

\cong stand. af. prostorem \mathbb{R}^k

... dáno volbou souř. soustavy ...

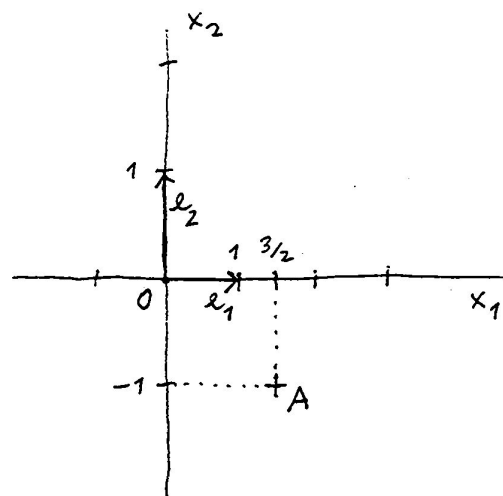
\subseteq stand. af. prostoru \mathbb{R}^n

... n lin. NEZÁVISLÝCH rovnic
 n neznámých

$$k = n - n$$

AFINNÍ SOUŘADNICE

- příklady
- obecně
- přechody



NAPŘ.

- $V = \{ \text{řešení dif. rovnice } \boxed{y'' - 4y' + 5y = 0} \} =$
 $= \{ y = c_1 \underline{e^{2x} \cos x} + c_2 \underline{e^{2x} \sin x} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \}$
 \cong
 $\{ (c_1, c_2) \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \} =$
 $= \text{stand. vekt. prostor } \mathbb{R}^2$
- $a = \{ \text{řešení dif. rovnice } \boxed{y'' - 4y' + 5y = 10} \} =$
 $= \{ y = \underline{2} + c_1 \underline{e^{2x} \cos x} + c_2 \underline{e^{2x} \sin x} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \}$
 \cong
 $\{ [c_1, c_2] \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \} =$
 $= \text{stand. af. prostor } \mathbb{R}^2$
- v obou případech " \cong "
- znamená BIJEKTIVNÍ přiřazení zachovávající strukturu
- je dáno VOLBOU báze
resp. báze a "počátek"
 \uparrow \uparrow
fund. řešení homogenní rovnice part. řešení nehomogenní rovnice
IZOMORFISMUS

OBECNĚ

- prvky obecného vekt. prostoru V
... lineární kombinace $v = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots$
- prvky obecného af. prostoru \mathcal{A}
... "něco + lineární kombinace" $A = P + c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots$

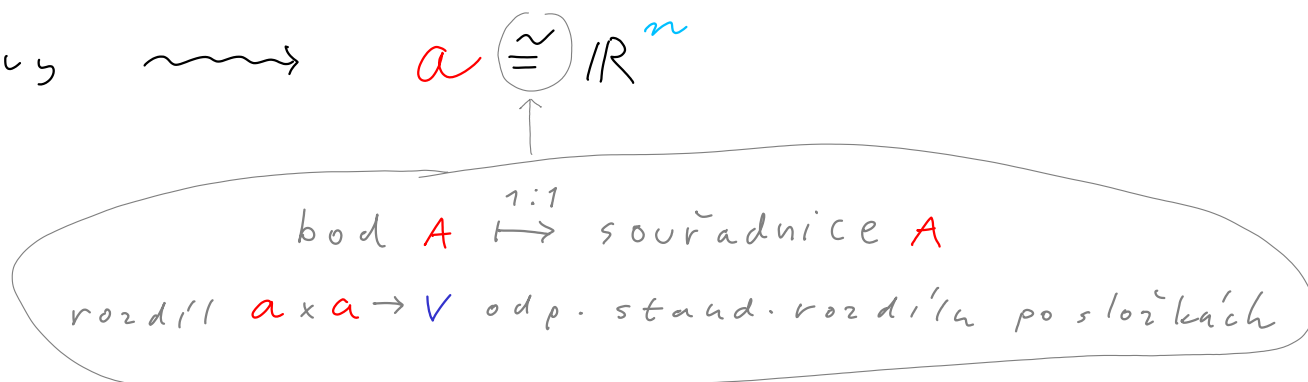
- (e_1, e_2, \dots) je BÁZE ve $V \iff$
 $\iff n$ -tice čísel (c_1, c_2, \dots) určena JEDNOZNAČNĚ!

- AFINNÍ SOUŘ. SOUSTAVA \leftarrow repér
= bod $P \in \mathcal{A}$ + báze (e_1, e_2, \dots) ve V
 \uparrow
počátek

- SOUŘADNICE bodu A vzhledem k repéru $(P; e_1, e_2, \dots)$
= souřadnice vektoru \vec{PA} vzhledem k bázi (e_1, e_2, \dots) .

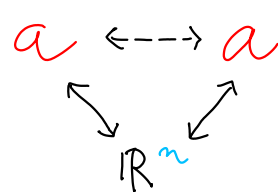
ZÁVĚRY

- VOUBA souř. soustavy $\rightsquigarrow a \cong \mathbb{R}^n$



- ZEMĚNA:

všechy af. prostory STEJNĚ DIM. jsou navzájem izomorfní!



- OVŠEM:

Jiné souř. soustavy \rightsquigarrow jiná ztotožnění...

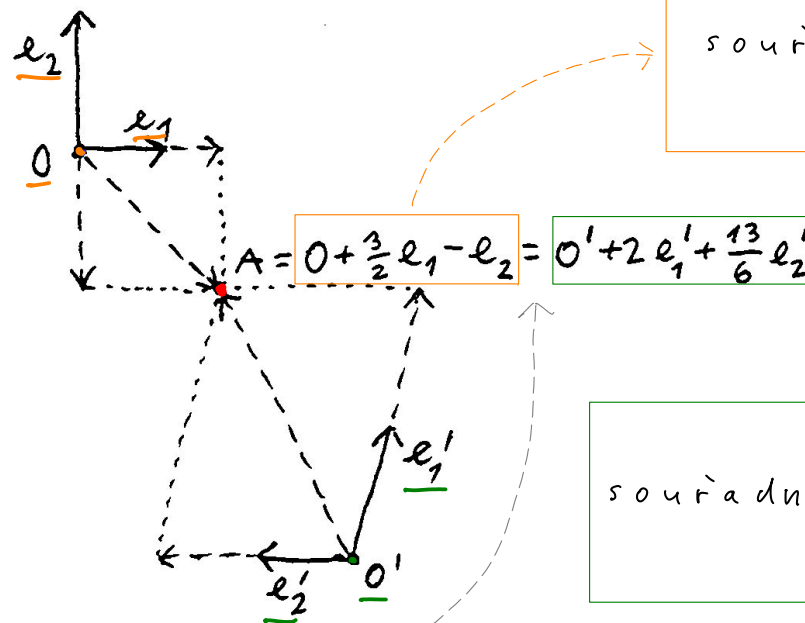
PŘECHODY

• Např.

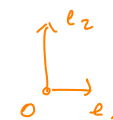
$$0 = 0' + 3e_1' + 4e_2'$$

$$e_1 = -e_2'$$

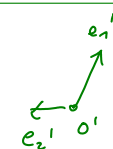
$$e_2 = e_1' + \frac{1}{3}e_2'$$



souřadnice A vzhledem k
... $[\frac{3}{2}, -1]$



souřadnice A vzhledem k
... $[2, \frac{13}{6}]$



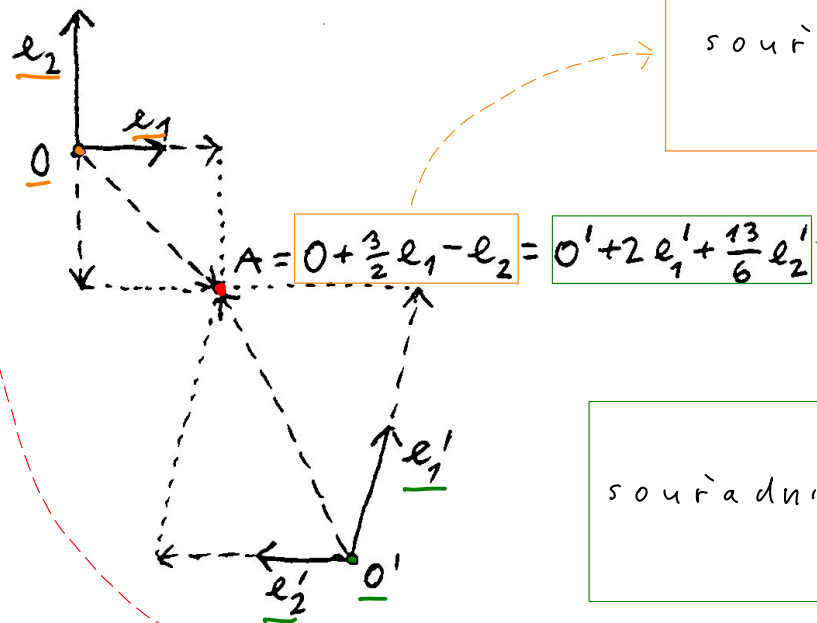
PŘECHODY

• Např.

$$0 = 0' + 3e_1' + 4e_2'$$

$$e_1 = -e_2'$$

$$e_2 = e_1' + \frac{1}{3}e_2'$$



souřadnice A vzhledem k $\begin{matrix} e_2 \\ \leftarrow \\ O \\ \rightarrow \\ e_1 \end{matrix}$
 $\dots \left[\frac{3}{2}, -1 \right]$

souřadnice A vzhledem k $\begin{matrix} e_1' \\ \leftarrow \\ O' \\ \rightarrow \\ e_2' \end{matrix}$
 $\dots \left[2, \frac{13}{6} \right]$

• OBECNĚ

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{13}{6} \end{pmatrix}$$

souřadnice $\vec{O'O}$ vzhledem k bázi $\begin{matrix} e_1' \\ \leftarrow \\ O' \\ \rightarrow \\ e_2' \end{matrix}$

matice přechodu od báze $\begin{matrix} e_2 \\ \leftarrow \\ O \\ \rightarrow \\ e_1 \end{matrix}$ k bázi $\begin{matrix} e_1' \\ \leftarrow \\ O' \\ \rightarrow \\ e_2' \end{matrix}$

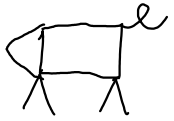
AFINNÍ ZOBRAZENÍ

= zobrazení zachovávající AFINNÍ STRUKTURU . . .

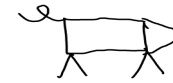
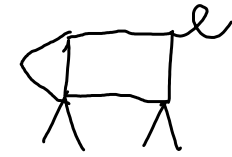
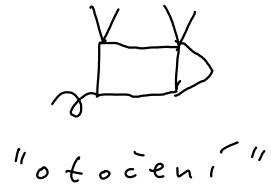
- příklady z dřívějších
- upřesnění
- ZÁKLADNÍ VĚTY
- úvahy

$$\begin{array}{ccc} a \times a & \xrightarrow{f \times f} & a' \times a' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \vec{a} & \xrightarrow{f} & \vec{a}' \end{array}$$

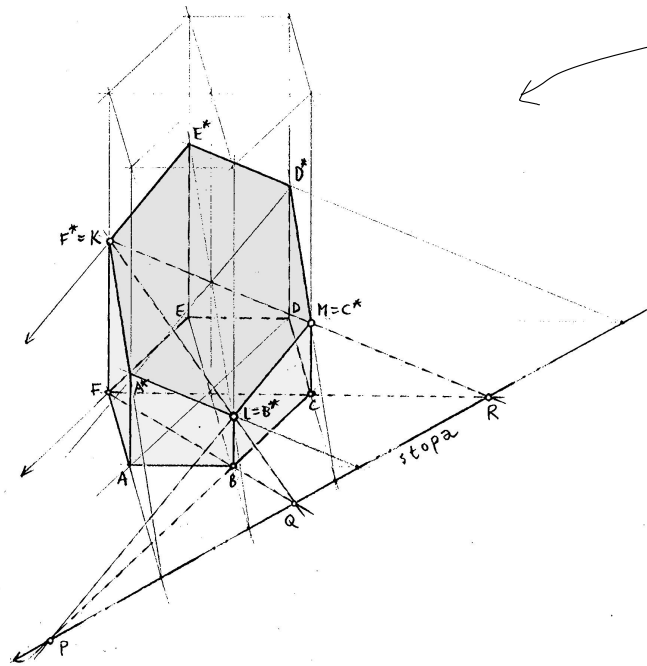
VZOR



OBRAZ

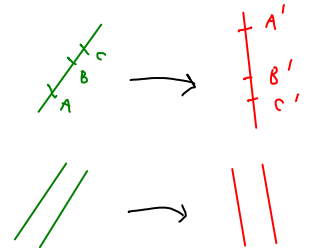


"równob. průmět hranolu a jeho řezu"



VÍME, ŽE ZACHOVÁVA:

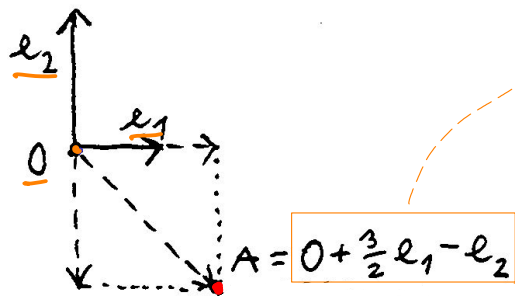
- kolinearita
- poměry trojic kolin. bodů
- rovnoběžnost

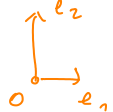


... kdykoli to je možné

(může degenerovat $\neq \rightarrow +$)

PŘÍKLADY 2 LĚTOSKA



souřadnice A vzhledem k 
... $[\frac{3}{2}, -1]$

• $\mathcal{a} = \{ \text{řešení dif. rovnice } y'' - 4y' + 5y = 10 \} =$
 $= \{ y = \underline{2} + C_1 \underline{e^{2x} \cos x} + C_2 \underline{e^{2x} \sin x} \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R} \}$

\cong

$$\{ [C_1, C_2] \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R} \} =$$

= stand. af. prostor \mathbb{R}^2

• $V \subset B A$ souř. soustavy $\rightsquigarrow \mathcal{a} \cong \mathbb{R}^n$

bod $A \xrightarrow{1:1}$ souřadnice A

rozdíly $\mathcal{a} \times \mathcal{a} \rightarrow V$ odp. stand. rozdílu po složkách

... AFINNÍ ISOMORFISMUS

LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

= zobrazení zachovávající LINEÁRNÍ STRUKTURU,

tj. strukturu VEKT. PROSTORU,

tj. LINEÁRNÍ KOMBINACĚ VEKTORŮ,

tj. $f: V \rightarrow V'$ takové, že

$$f(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots) = c_1 f(v_1) + c_2 f(v_2) + \dots$$

pro lib. $v_1, v_2, \dots \in V$ a $c_1, c_2, \dots \in \mathbb{R}$.

- f je LINEÁRNÍ \Leftrightarrow lze vyjádřit pomocí MATIC takto:

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

matice
zobrazení
...

souřadnice
vzoru
...

souřadnice
obrazu
...

vzhledem k nějakým bázím

AFINNÍ ZOBRAZENÍ

= zobrazení zachovávající AFFINNÍ STRUKTURU,
tj. strukturu AFFINNÍHO PROSTORU,

$$V = \vec{a}$$

tj. $f: a \rightarrow a'$ takové, že

$$f(A + c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots) = f(A) + c_1 \vec{f}(v_1) + c_2 \vec{f}(v_2) + \dots$$

pro lib. $A \in a$ a $v_1, v_2, \dots \in V$ a $c_1, c_2, \dots \in \mathbb{R}$,

kde $\vec{f}: V \rightarrow V'$ je nějaké (LINEÁRNÍ) zobrazení.

- f je AFFINNÍ \Leftrightarrow lze vyjádřit pomocí MATIC takto:

$$\begin{array}{c} \boxed{\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}} + \boxed{\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}} \cdot \boxed{\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}} = \boxed{\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}} \end{array}$$

obraz počátku
.....

matice lin. zobrazení \vec{f}
.....

souřadnice vzoru
.....

souřadnice obrazu
.....

vzhledem k nějakým af. repériím

AFINNÍ ZOBRAZENÍ

$$f: a \rightarrow a'$$

(A) algebraicky

\Leftrightarrow f indukčuje $\vec{f}: V \rightarrow V'$ LINEÁRNÍ

takové, že $f(A + v) = f(A) + \vec{f}(v)$,

resp. $\vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$, pro lib. $A, B \in a$
 $a \quad v \in V = \vec{a}$.

(G) geometricky

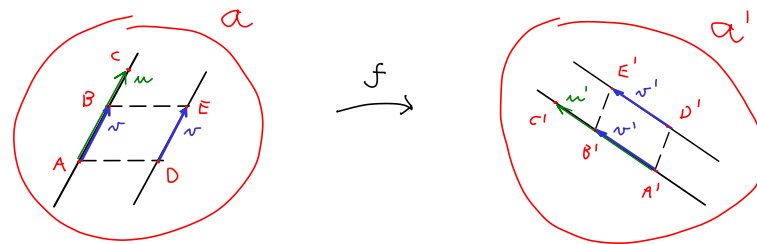
\Leftrightarrow f zachovává

- (1) kolinearitu
- (2) poměry trojic kolia. bodů
- (3) rovnoběžnost

... kdykoli to je možné (může degenerovat $\neq \rightarrow +$)

• SKLOUBENÍ

(A) \Leftrightarrow (G)



ZÁKLADNÍ VĚTA AFINNÍ GEOMETRIE

- Dosud zmiňované vlastnosti af. zobrazení jsou svázány víc než se zdá:

- ZÁKLADNÍ VĚTA

Pro BIJEKTIVNÍ $f: a \rightarrow a'$ mezi af. prostory $\dim \geq 2$ platí:

f je AFINNÍ (\Leftrightarrow) zachovává KOLINEÁRNOST.

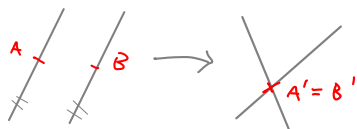
- Implikace " \Rightarrow " je zřejmá.
- Myšlenky důkazu implikace " \Leftarrow " jsou:

a) na přímce se nezobrazuje víc než přímka



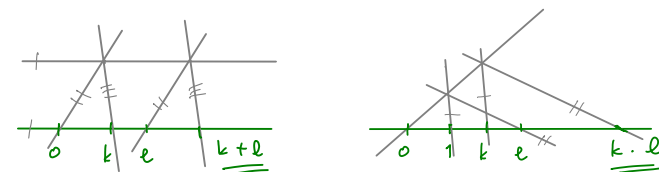
... spor se SURJEKTIVNOSTÍ

b) zachovává se rovnoběžnost



... spor s INJEKTIVNOSTÍ

c) zachovávají se poměry ...

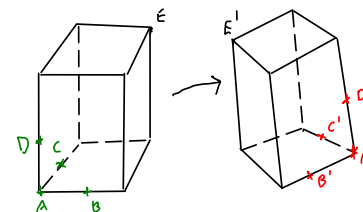
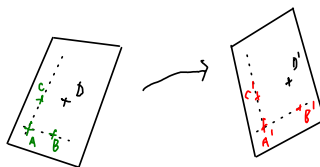


... pomocí \parallel lze realizovat $+ a \cdot v \in \mathbb{R}$

- z minulého semestru víme, že

PROSTĚ (resp. ne příliš degenerované)
AFINNÍ zobrazení z prostoru dim n je určeno
obrazy $n+1$ bodů v obecné poloze.

- Dokazovali jsme konstruktivně a induktivně pro $n = 1, 2, 3 \dots$



- Nyní víme, že

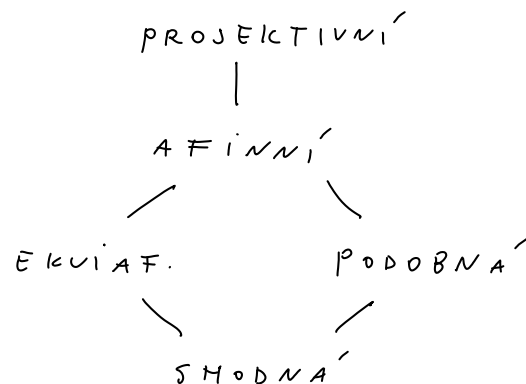
Libovolně
AFINNÍ zobrazení z prostoru dim n je určeno
obrazy $n+1$ bodů v obecné poloze.

- Důkaz:

AFINNÍ $f: a \rightarrow a'$ je určeno obrazem 1 bodu a LINEÁRNÍM $\vec{f}: \vec{a} \rightarrow \vec{a}'$,
LINEÁRNÍ $\vec{f}: \vec{a} \rightarrow \vec{a}'$ je určeno obrazem BÁZE,
BÁZE má n prvků.

SHRNUTÍ / VÝHLEDY

- Máme několik ekvivalentních vymezení AFINNÍCH zobr.
- Některé vlastnosti plynou z jiných, další budeme přidávat..
- Diskuzi o zobrazeních budeme zjemňovat / rozšiřovat podle vzoru . . .



- Základní věta AFINNÍ geom. se bude rýmovat se základní větou PROJEKTIVNÍ geometrie,
- což v důsledku bude znamenat, že

„VŠECHNO SE VLEZE DO NĚJAKÉ MATICE!“

POZNÁMKY K UYJÁDRĚNÍ AF. PODPR.

- rovnicově (implicitně)
- parametricky (explicitně)
- jinak (...)

- přechod od jednoho ke druhému
- přechod od druhého k prvnímu
- a pod.

PRÍKLAD

pro neznámé $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$,
+ j. $B \subseteq \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} B &= \left\{ \text{řešení soustavy rovnic} \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \right\} = \\ &= \left\{ \text{řešení soustavy rovnic} \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 3x_1 - x_3 = 4 \end{cases} \right\} = \\ &= \dots \\ &= \left\{ \begin{array}{l} x_1 = t \\ x_2 = 3 - 2t \\ x_3 = -4 + 3t \end{array} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 3/2 - \lambda \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = 1/2 - 3\lambda \end{array} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \dots \end{aligned}$$

ekvivalentní soustavy rovnic

ekvivalentní PARAMETRIZACE

2 lin. NEZÁVISLÉ rovnice
3 neznámé

$$\dim B = 3 - 2 = 1$$

OBECNĚ

Pro lib. a f. prostor \mathcal{a} :

- volba souř. soustavy ztotožňuje $\mathcal{a} \cong \mathbb{R}^n$, kde $n = \dim \mathcal{a}$
 \rightsquigarrow všechny výpočty ve stand. prostoru $\mathbb{R}^n \dots$

Pro lib. a f. podprostor $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{a} \cong \mathbb{R}^n$:

- od rovnicevého vyjádření k parametrickému
 - stačí vyřešit soustavu,
 - pro MÁLO rovnic umíme z hlavy,
 - OBECNĚ umíme eliminovat neznamé...
- od parametrického vyjádření k rovnicevému
 - stačí najít soustavu,
 - pro MÁLO parametrů umíme z hlavy,
 - OBECNĚ umíme eliminovat parametry...



• všude přítomné POČTY \rightsquigarrow

n lin. NEZÁVISLÝCH rovnic
 n neznámých

$$\dim \mathcal{B} = n - n$$

MŮŽE SE HODIT

$$\bullet \mathcal{B} = \{ P + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots \mid t_1, t_2, \dots \in \mathbb{R} \} \leftarrow \dim \mathcal{B} = k$$

$$\bullet X \in \mathcal{B} \Leftrightarrow X = P + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots$$

$$\Leftrightarrow X - P = t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots$$

$$\Leftrightarrow \text{hodnost matice } (\vec{P}X, v_1, v_2, \dots) = k$$

$$\Leftrightarrow \text{všechny subdeterminanty řádku } > k \\ \text{z matice } (\vec{P}X, v_1, v_2, \dots) \text{ jsou } 0$$

$$\bullet \text{ Např. } \mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \dots \dim 2$$

$$\text{hodnost } \left(\begin{array}{c|c|c} x_1 & 1 & -1 \\ x_2-1 & 2 & 1 \\ x_3-2 & 0 & 3 \end{array} \right) = 2 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x_1 - x_2 + x_3 - 1 = 0$$

JINÁ VYJÁDRĚNÍ

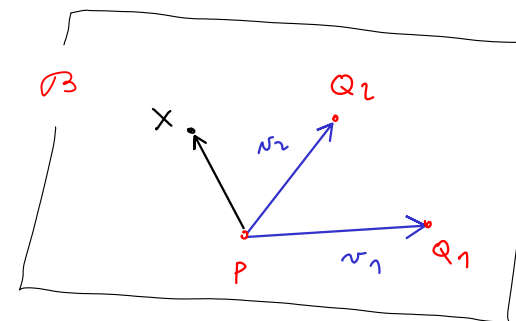
• $X \in \beta \iff X = P + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots$

$\iff X = P + t_1 (Q_1 - P) + t_2 (Q_2 - P) + \dots$

$\iff "X = (1 - t_1 - t_2 - \dots) P + t_1 Q_1 + t_2 Q_2 + \dots"$

$\iff "X = t_0 P + t_1 Q_1 + t_2 Q_2 + \dots",$

kde $t_0 + t_1 + t_2 + \dots = 1$!



"AFINNÍ KOMBINACE BODŮ"

t_0, t_1, t_2, \dots BARICENTRICKÉ souřadnice \dots

(viz dále: těžiště, konvexní obaly, \dots)

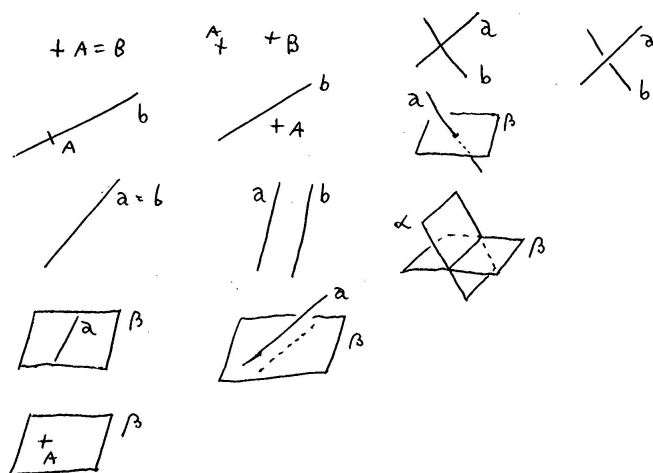
• Ve spec. případech se užívají další výhodná vyjádření \dots

\uparrow
(např. nadroviny, přímky)

\uparrow
(např. úsekové rovnice, Plückerovy souřadnice, \dots)

VZÁJEMNÉ POLOHY AF. PODPR.

- průniky, součty a af. obaly
- vzájemné polohy
- postřehy, dodatky


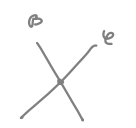

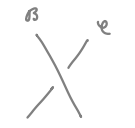


PRŮNIK A SOUČET

- $B, \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$... af. podprostory, $\vec{B}, \vec{\mathcal{E}} \subseteq \vec{\mathcal{A}}$... zaměření
- PRŮNIK $B \cap \mathcal{E}$ je buď \emptyset ,
nebo af. podprostor
se zaměřením $\vec{B \cap \mathcal{E}} = \vec{B} \cap \vec{\mathcal{E}}$.
- SJEDNOCENÍ $B \cup \mathcal{E}$ může a nemusí být af. podprostor.
- SOUČET $B + \mathcal{E} =$ AFINNÍ OBAU $B \cup \mathcal{E}$
 $=$ nejmenší AFINNÍ podprostor obsahující $B \cup \mathcal{E}$.
- ZAMĚŘENÍ $\vec{B + \mathcal{E}}$ může a nemusí být rovno $\vec{B} + \vec{\mathcal{E}}$...



Všechno to MĚJAK souvisí se vzájemnými polohami podpr...

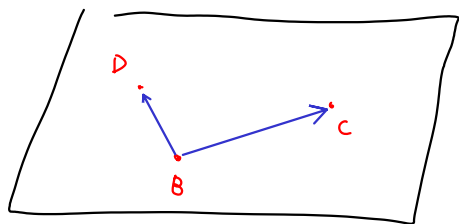
				
$\dim B \cap \mathcal{E}$	1	0	-	-
$\dim \vec{B} \cap \vec{\mathcal{E}}$	1	0	1	0
$\dim B + \mathcal{E}$	1	2	2	3
$\dim \vec{B} + \vec{\mathcal{E}}$	1	2	1	2

POZNÁMKA

• Body B, C, D, \dots jsou v OBECNĚ POLOZE $\leftarrow k$

(\Rightarrow) vektory $\vec{BC}, \vec{BD}, \dots$ jsou lin. NEZÁVISLÉ $\leftarrow k-1$

(\Rightarrow) dim součtu $B+C+D+\dots$ je MAX. možná. $\leftarrow k-1$



$$\text{součet } B+C+D = \{ B + \alpha \vec{BC} + \beta \vec{BD} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ "t_0 B + t_1 C + t_2 D" \mid t_0 + t_1 + t_2 = 1 \}$$

B, C, D v OBECNĚ POLOZE (\Leftrightarrow) parametry určeny JEDNOZNAČNĚ.

OBECNÁ SOUVISLOST

- $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$... af. podprostory, $\vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{C}} \subseteq \vec{\mathcal{A}}$... zamerění

- Platí

$$\underline{\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset} \stackrel{!}{\Leftrightarrow} \underline{\mathcal{B} + \mathcal{C} = \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}} \Leftrightarrow \underline{\vec{BC} \in \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}} \quad \text{pro lib. } B \in \mathcal{B} \\ \text{a } C \in \mathcal{C}.$$

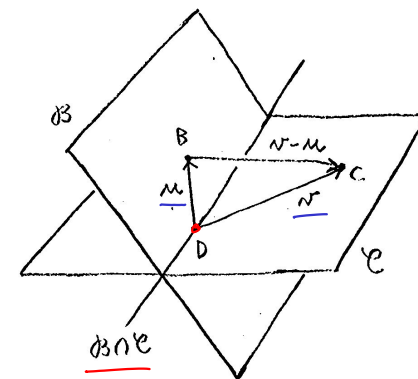
- Důkaz:

(a) $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$

$$\Rightarrow \text{st. } D: D \in \mathcal{B} \text{ a } D \in \mathcal{C}$$

$$\Rightarrow \vec{DB} \in \vec{\mathcal{B}} \text{ a } \vec{DC} \in \vec{\mathcal{C}} \dots$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{BC}} = -\vec{DB} + \vec{DC} \in \underline{\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}} \dots$$



(b) $\vec{BC} \in \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}$...

$$\Rightarrow \vec{BC} = C - B = u + v, \text{ kde } u \in \vec{\mathcal{B}} \text{ a } v \in \vec{\mathcal{C}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{C - v}_{\mathcal{C}} = \underbrace{B + u}_{\mathcal{B}}$$

$$\Rightarrow \underline{\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset}.$$

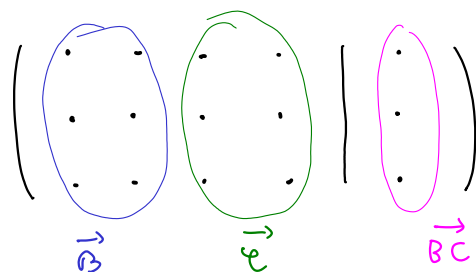
POČETNÍ SOUVISLOST

$$\bullet \mathcal{B} = \{ B + t_1 u_1 + \dots \}, \quad \mathcal{C} = \{ C + s_1 v_1 + \dots \}$$

$$\bullet D \in \mathcal{B} \cap \mathcal{C} \iff D = B + t_1 u_1 + \dots = C + s_1 v_1 + \dots$$



$$t_1 u_1 + \dots - s_1 v_1 - \dots = C - B$$



$$\bullet \underline{\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset} \iff \text{soustava má řešení} \iff$$

$$\iff \vec{BC} = \text{lin. kombinace } u_1, \dots, u_1, \dots \iff$$

$$\iff \underline{\vec{BC} \in \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}}$$

VZÁJEMNÉ POLOHY

- $B, C \subseteq \mathcal{A}$... af. podprostory, $\vec{B}, \vec{C} \subseteq \vec{\mathcal{A}}$... zaměření

• Obecné definice:

predp. $\dim B \leq \dim C$
 \swarrow \searrow

- INCIDENTNÍ $B \subseteq C$... tj. $B \cap C = B = \text{max. možný}$
- RŮZNOBĚŽNÉ $B \times C$... pokud $B \cap C \neq \emptyset$, ale NE max. možný
- ROVNOBĚŽNÉ $B \parallel C$... pokud $B \cap C = \emptyset$ a $\vec{B} \subseteq \vec{C}$
- MIMOBĚŽNÉ $B \times C$... jinak (tj. $B \cap C = \emptyset$ a $\vec{B} \not\subseteq \vec{C}$)

• Poznámka:

- $B \subseteq C \iff B \cap C = B = \text{max.}$
- $\vec{B} \subseteq \vec{C} \iff \vec{B} \cap \vec{C} = \vec{B} = \text{max.}$

• Přehledně:

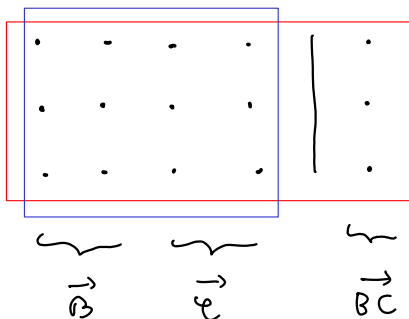
$\vec{B} \cap \vec{C}$	je	není
$B \cap C$	max	max
není \emptyset	\subseteq	\times
je \emptyset	\parallel	$\not\parallel$

POČETNÍ SOUVISLOSTI

• $B = \{ B + t_1 u_1 + \dots \}$; $E = \{ C + s_1 v_1 + \dots \}$

• $D \in B \cap E$
 $D = B + t_1 u_1 + \dots = C + s_1 v_1 + \dots$

$t_1 u_1 + \dots - s_1 v_1 - \dots = C - B$



• $w \in \vec{B} \cap \vec{E}$
 $w = t_1 u_1 + \dots = s_1 v_1 + \dots$
 $t_1 u_1 + \dots - s_1 v_1 - \dots = 0$

• ozn:

$m = \max \{ \dim \vec{B}, \dim \vec{E} \}$

$n = \dim (\vec{B} + \vec{E}) = \text{hodnost } \square$

$\sigma = \dim (\overrightarrow{B+E}) =$
 $= \dim (\vec{B} + \vec{E} + \vec{BC}) = \text{hodnost } \square$

• zřejmé $m \leq n \leq \sigma$

• přičemž $m = n \Leftrightarrow \vec{B} \subseteq \vec{E}$ či $\vec{B} \supseteq \vec{E}$
 $n = \sigma \Leftrightarrow B \cap E \neq \emptyset$

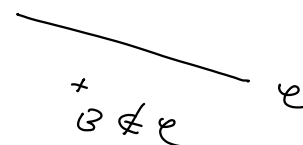
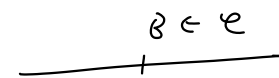
• Tedy:

		$m = n$	$m < n$
$\vec{B} \cap \vec{E}$	$B \cap E$	je max	není max
$m = \sigma$	není \emptyset	\subseteq	\times
$m < \sigma$	je \emptyset	\parallel	\nsubseteq

- Předchozí OBECNÉ definice zahrnují jistě TRIVIALNÍ případy:

$B = \text{bod}$, $\mathcal{E} = \text{cokoli}$... buď INCIDENTNÍ

nebo ROUNOBĚŽNÉ



- Mezi všemi polohami,

MIMOBĚŽNOST potřebuje "nejvíc místa"...

- Pokud je místa "opravdu hodně", může se stát, že $\vec{B} \cap \vec{E}$ je netrivi. (ex. společné vektory)

→ ČÁSTĚČNĚ ROUNOBĚŽNÉ

PŘÍKLAD

$$\beta, \epsilon \subseteq \alpha$$

\uparrow \uparrow \uparrow
 $\dim 2$ $\dim 3$ $\dim N$

SOUSTAVA (*)	ŘEŠENÍ ($\beta \cap \epsilon$)	VZÁJEMNÁ POLOHA
	∞^2 (rovina)	$\beta \subset \epsilon$ $N \geq 3$
	∞^1 (přímka)	$\beta \times \epsilon$ $N \geq 4$
	1 (bod)	$\beta \times \epsilon$ $N \geq 5$
	0	$\beta \parallel \epsilon$ $N \geq 4$
	0	$\beta \times \epsilon$ <u>$N \geq 5$</u>

\uparrow hodnota \square nemůže být $< \underline{3} = \dim \epsilon$

↑
"kolik místa potřeba"

OBECNĚ

$$\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$$

• ozn :

$$m = \max \{ \dim \vec{\mathcal{B}}, \dim \vec{\mathcal{C}} \}$$

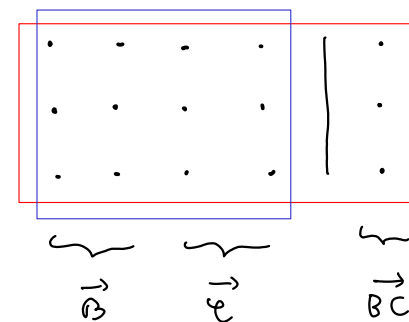
$$n = \dim (\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}})$$

$$\sigma = \dim (\overrightarrow{\mathcal{B} + \mathcal{C}}) = \dim (\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}} + \vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}})$$

$$N = \dim \mathcal{A}$$

• zřejmě $m \leq n \leq \sigma \leq N$. . .

• Platí



• Předp. $\mathcal{B} \not\subset \mathcal{C}$

$$\implies m < n < \sigma \leq N$$

$$\implies m \leq N - 2$$

• Zejména NADROVINA nemůže být s ničím mimoběžná.

• Předp. $\vec{\mathcal{B}}$ a $\vec{\mathcal{C}}$ KOMPLEMENTÁRNÍ

$$\implies n = \sigma = N \text{ a } \overrightarrow{\mathcal{B} \cap \mathcal{C}} = \{0\}$$

$$\implies \mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \text{BOD}$$

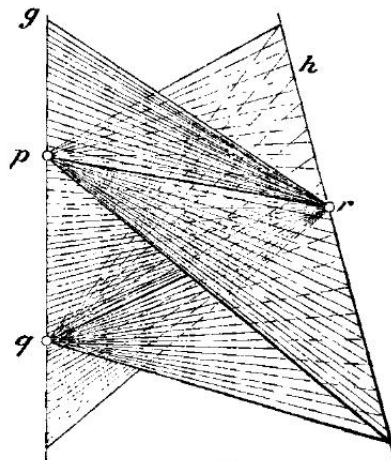
• Apod.

SHRNUTÍ

- VZÁJEMNÉ POLOHY obecně pomocí
 - inkluzí $B \subseteq C$, $\vec{B} \subseteq \vec{C}$
 - průniků $B \cap C$, $\vec{B} \cap \vec{C}$
 - součtů $B + C$, $\vec{B} + \vec{C}$
- $B \subseteq C$
 \Updownarrow
 $B \cap C = B$
 \Updownarrow
 $B + C = C$
- početně vidíme vše NARÁZ
 - některé polohy vyžadují více MÍSTA než jiné

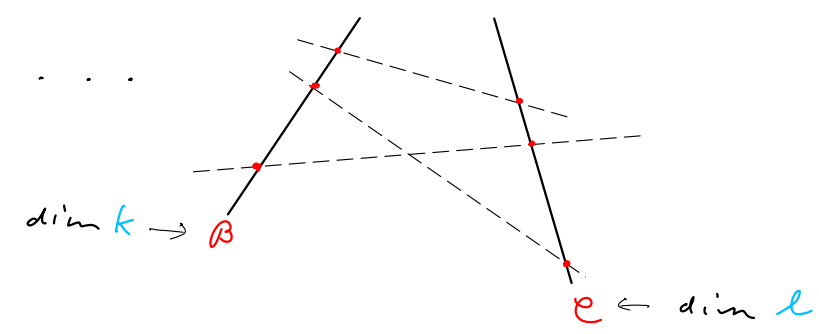
PŘÍČKY

- příčky
- příčky s podmínkou
- příčkové plochy



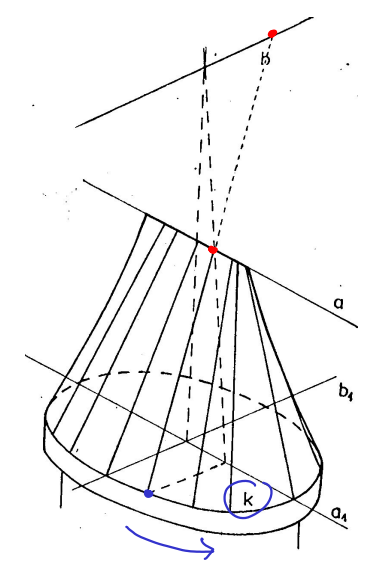
PŘÍČKY

- $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A} \dots$ af. podprostory příp. jiné podmnožiny
- PŘÍČKA $\mathcal{B}, \mathcal{C} =$ přímka různoběžná jak s \mathcal{B} , tak s \mathcal{C} příp. úsečka
- \dots celkem $k+l$ volných parametrů \dots



- Typická omezení:
 - přímka procházející daným BODEM
 - přímka rovnoběžná s daným SMĚREM
 } \rightsquigarrow genericky JEDNA
- NEJKRATŠÍ přímka \rightsquigarrow VZDÁLENOST

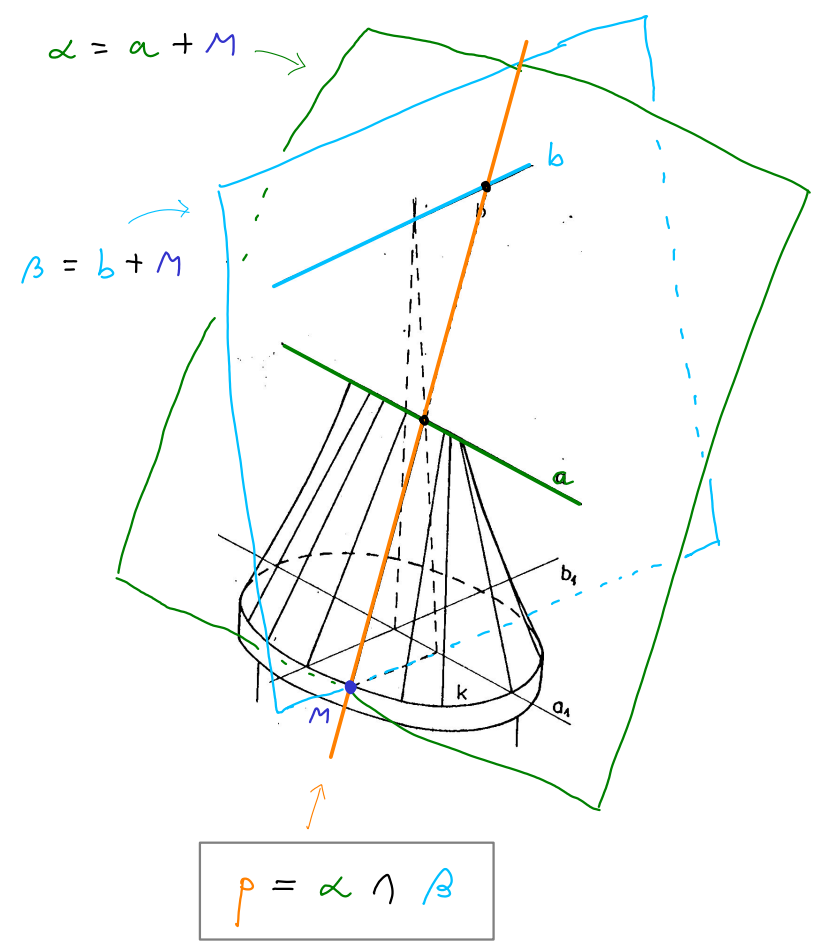
- Typická uplatnění:
 - proměnná omezující podmínka \rightsquigarrow PŘÍMKOVÉ PLOCHY \dots



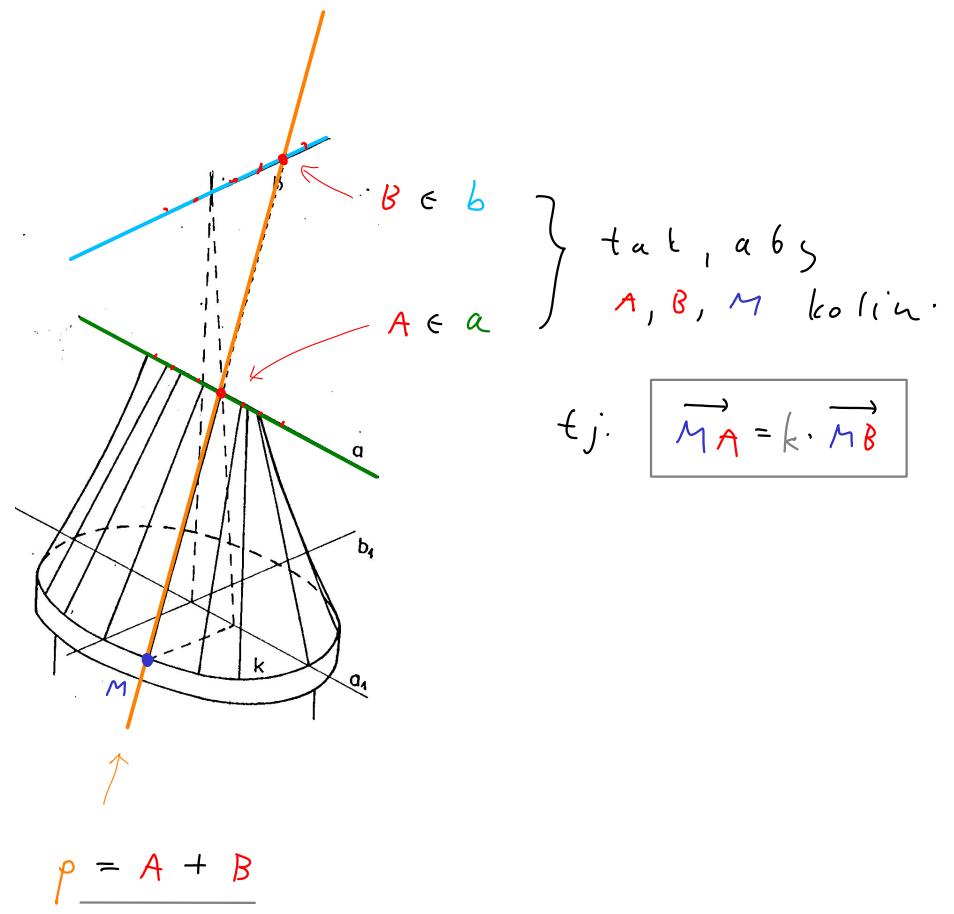
PŘÍČKY

• Typická řešení

(a) průnik NADPROSTORŮ:

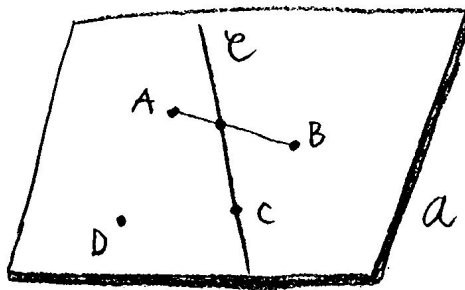


(b) spojnice koncových bodů:



USPOŘÁDÁNÍ A POD.

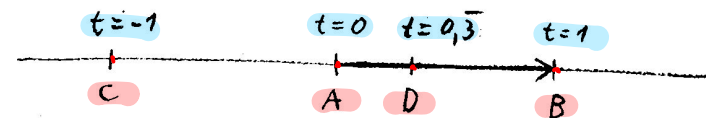
- uspořádání bodů na přímce, úsečka
- poloprostory a jejich průniky
- konvexní množiny a obaly
- poznámky k vyjádření



USPOŘÁDÁNÍ

- $\{\text{body na afinní přímce}\} \xleftrightarrow{1:1} \{\text{reálná čísla}\}$

Viz parametrizaci $\{A + t\vec{AB} \mid t \in \mathbb{R}\}$...



- USPOŘÁDÁNÍ na \mathbb{R} \rightsquigarrow USPOŘÁDÁNÍ na přímce
 $0 \leq \frac{1}{3}$ \rightsquigarrow " $A \leq D$ " a pod.

- V závislosti na parametrizaci máme dvě možná uspořádaní:
bude $\frac{|}{|}{|}$ " $A \leq D \leq B$ " nebo $\frac{|}{|}{|}$ " $A \geq D \geq B$ "

- Nezávisle na parametrizaci máme relaci MEZI!
"D je mezi A a B", pokud " $A \leq D \leq B$ " nebo " $A \geq D \geq B$ "

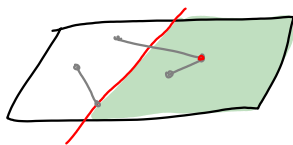
- ÚSEČKA $AB = \{\text{body na přímce } AB, \text{ které jsou mezi } A \text{ a } B\}$
tj. včetně krajních bodů

POLOPROSTORY

- POLOPŘÍMLKA



- POLOROVINA

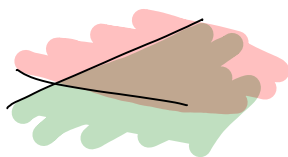


OBEZNĚ



- NADROVINA \mathcal{N} af. prostoru \mathcal{A} určuje dva POLOPROSTORY:
- Body A a B v OPAČNÝCH poloprostorech vzhledem k \mathcal{N} , pokud průnik $AB \cap \mathcal{N}$ je vnitřním bodem úsečky AB .
- POLOPROSTOR je určen hraniční NADROVINOU \mathcal{N} a BODEM $B \notin \mathcal{N}$,
- hraniční NADROVINA patří do obou poloprostorů, ...

ODVOZENÉ VĚCI

- PRŮNIKY poloprostorů \rightsquigarrow ÚHEL, TROJÚHELNÍK, ...



KONVEXNÍ MNOŽINY

- ANO : 
- NE : 

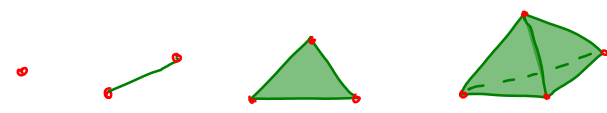
OBEZNĚ:

- Podmnožina $K \subseteq \mathcal{a}$ je KONVEXNÍ, pokud pro lib. $A, B \in K$ také celá úsečka AB leží v K .

JAKO OBVYKLE:

- PRŮNIK konvexních množin je buď \emptyset , nebo konvexní.
- SJEDNOCENÍ konvexních množin může a nemusí být konvexní.
- KONVEXNÍ OBAL množiny $M \subseteq \mathcal{a}$
= nejmenší konvexní množina obsahující M .

SIMPLEXY A VYJÁDRĚNÍ



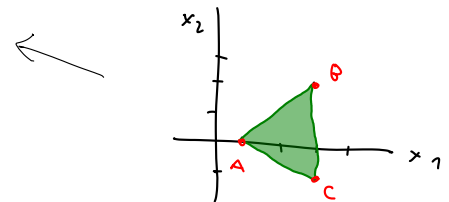
SIMPLEXY \approx nejjednodušší konvexní množiny
= konvexní obaly BODŮ v otečené poloze

VYJÁDRĚNÍ pomocí nerovností :

• parametricky $\Delta ABC = \left\{ A + t\vec{AB} + s\vec{AC} \mid \begin{array}{l} 0 \leq t \leq 1 \\ 0 \leq s \leq 1 \\ 0 \leq t+s \leq 1 \end{array} \right\}$

• afinní kombinace $\Delta ABC = \left\{ t_0A + t_1B + t_2C \mid \begin{array}{l} t_0 + t_1 + t_2 = 1 \\ 0 \leq t_0, t_1, t_2 \leq 1 \end{array} \right\}$

• rovnicově $\Delta ABC = \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 \geq 1 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 \geq 1 \end{array} \right\}$

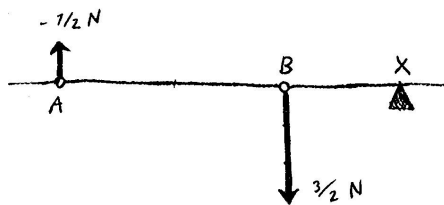


POZNÁMKY :

- SIMPLEX = průnik poloпростorů v rámci af. obalu bodů.
- NEJSÍKOVNĚJŠÍ vyjádření = afinní kombinace

TĚŽIŠTĚ A P.O.D.

- jiný pohled na af. kombinace bodů
- těžiště a těžišťové (= barycentrické) souřadnice
- typické užití a poznámky

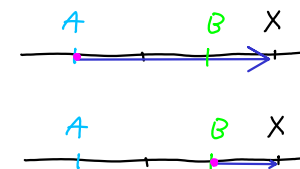


AFINNÍ KOMBINACE JINAK

• Známe: $X = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}B$

$$= \left(1 - \frac{3}{2}\right)A + \frac{3}{2}B = A + \frac{3}{2}\vec{AB}$$

$$= -\frac{1}{2}A + \left(1 + \frac{1}{2}\right)B = B - \frac{1}{2}\vec{BA}$$

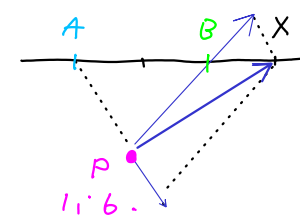


← obvyklé
← PARAMETRIZACE
bodů na přímce

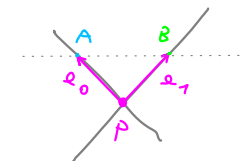
• Obecněji: $X = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}B$

$$= -\frac{1}{2}(P + \vec{PA}) + \frac{3}{2}(P + \vec{PB})$$

$$= \underbrace{\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)}_1 P - \frac{1}{2}\vec{PA} + \frac{3}{2}\vec{PB}$$



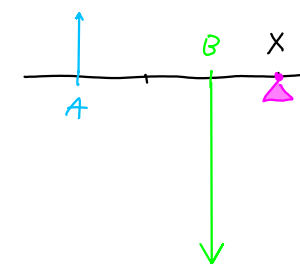
← přímka $t_0 + t_1 = 1$
v SOUŘADNICÍCH:



• Rovnováha: $X = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}B$

$$\underbrace{\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)}_1 X = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}B$$

$$0 = -\frac{1}{2}\vec{XA} + \frac{3}{2}\vec{XB}$$



← těžiště
HMOTNÉ SOUSTAVY:

$$A(-1) \quad B(3)$$

PŘEHLEDNĚ

- AFINNÍ KOMBINACE BODŮ :

$$\begin{array}{c} t_A A + t_B B \\ \hline t_A + t_B = 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{cccccccc} t_A & \dots & 2 & 3/2 & 1 & 1/2 & 0 & -1/2 & -1 & -3/2 \\ t_B & \dots & -1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1 & 3/2 & 2 & 5/2 \end{array} \right.$$

A B

$$\text{Přímka } AB = \{ t_A A + t_B B \mid t_A + t_B = 1 \}$$

$$\text{Polopřímka } AB = \{ t_A A + t_B B \mid t_A + t_B = 1, t_B \geq 0 \}$$

$$\text{Polopřímka } BA = \{ t_A A + t_B B \mid t_A + t_B = 1, t_A \geq 0 \}$$

$$\text{Úsečka } AB = \{ t_A A + t_B B \mid t_A + t_B = 1, t_A \geq 0, t_B \geq 0 \}$$

- BODOVÉ HMOTNÉ SOUSTAVY :

$$m_A + m_B \neq 0$$

A(m_A) B(m_B) T($m_A + m_B$)

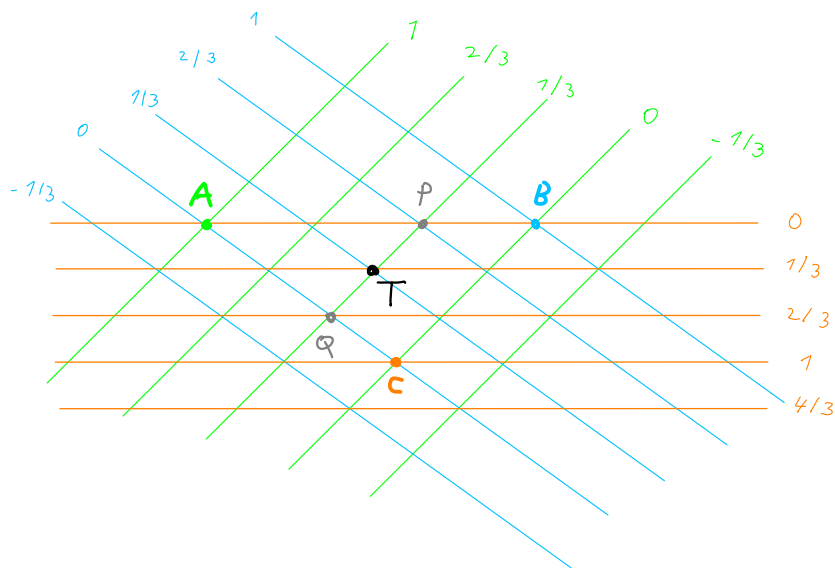
$$T = \text{těžiště}, \text{ pokud } m_A \vec{TA} + m_B \vec{TB} = 0,$$

$$\text{tj. } T = \frac{m_A}{m_A + m_B} A + \frac{m_B}{m_A + m_B} B$$

← ↑
barycentrické souřadnice

VÍČ BODŮ

- AFINNÍ KOMBINACE BODŮ :



$$P = \frac{1}{3} A + \frac{2}{3} B$$

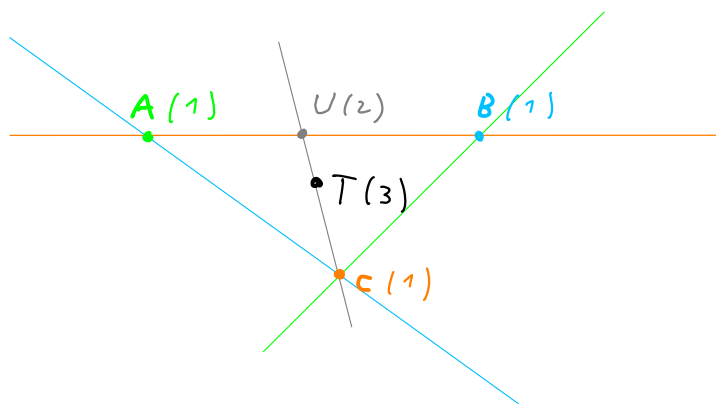
$$Q = \frac{1}{3} A + \frac{2}{3} C$$

$$T = \frac{1}{2} P + \frac{1}{2} Q$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} A + \frac{2}{3} B + \frac{1}{3} A + \frac{2}{3} C \right)$$

$$= \frac{1}{3} A + \frac{1}{3} B + \frac{1}{3} C$$

- BODOVÉ HMOTNÉ SOUSTAVY :



$$U = \frac{1}{1+1} A + \frac{1}{1+1} B$$

$$= \frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B$$

$$T = \frac{2}{1+2} U + \frac{1}{1+2} C$$

$$= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} B \right) + \frac{1}{3} C$$

$$= \frac{1}{3} A + \frac{1}{3} B + \frac{1}{3} C$$

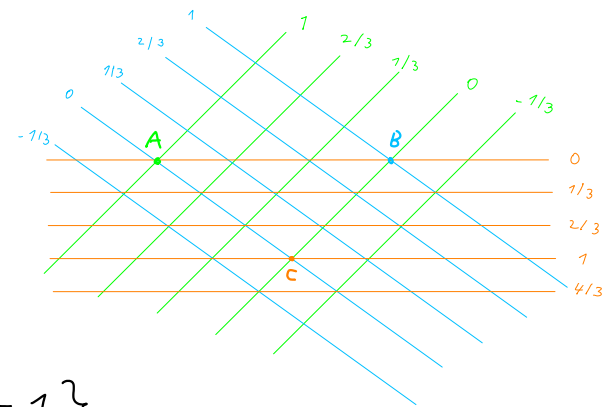
$$\epsilon_j \cdot 1 \vec{UA} + 1 \vec{UB} = 0$$

$$\epsilon_j \cdot 2 \vec{TU} + 1 \vec{TC} = 0$$

$$\epsilon_j \cdot 1 \vec{TA} + 1 \vec{TB} + 1 \vec{TC} = 0$$

VÍČ BODŮ - PŘEHLEDNĚ

- AFINNÍ KOMBINACE BODŮ :



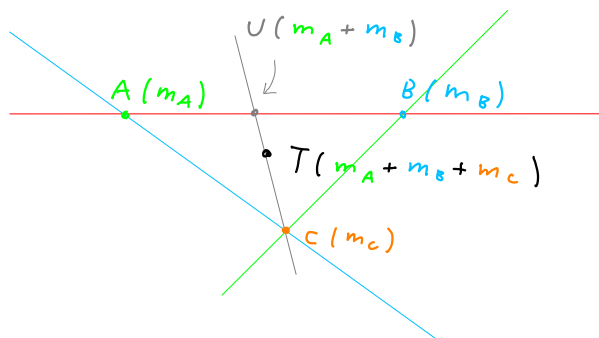
$$\text{Rovina } ABC = \{ t_A A + t_B B + t_C C \mid t_A + t_B + t_C = 1 \}$$

$$\text{Polorovina } AB + C = \{ t_A A + t_B B + t_C C \mid t_A + t_B + t_C = 1, t_C \geq 0 \}$$

$$\text{Úhel } ABC = \{ t_A A + t_B B + t_C C \mid t_A + t_B + t_C = 1, t_A \geq 0, t_C \geq 0 \}$$

$$\text{Trojúhelník } ABC = \{ t_A A + t_B B + t_C C \mid t_A + t_B + t_C = 1, t_A \geq 0, t_B \geq 0, t_C \geq 0 \}$$

- BODOVÉ HMOTNÉ SOUSTAVY :



$$U = \frac{m_A}{m_A + m_B} A + \frac{m_B}{m_A + m_B} B$$

$$T = \frac{m_A + m_B}{m_A + m_B + m_C} U + \frac{m_C}{m_A + m_B + m_C} C = \dots$$

$$= \frac{m_A}{m_A + m_B + m_C} A + \frac{m_B}{m_A + m_B + m_C} B + \frac{m_C}{m_A + m_B + m_C} C$$

$$t.j. m_A \vec{UA} + m_B \vec{UB} = 0$$

$$t.j. (m_A + m_B) \vec{TU} + m_C \vec{TC} = 0$$

$$t.j. m_A \vec{TA} + m_B \vec{TB} + m_C \vec{TC} = 0$$

OBECNĚ

- \mathcal{a} = afinní prostor, \mathcal{B} = afinní obal $\{A_0, \dots, A_k\}$,
kde $\{A_0, \dots, A_k\}$ = množina bodů v OBECNĚ poloze.
- BARYCENTRICKÉ souřadnice bodu $X \in \mathcal{B}$ vzhledem k (A_0, \dots, A_k)
= souřadnice vektoru \vec{PX} vzhledem k BÁZI $(\vec{PA}_0, \dots, \vec{PA}_k)$,
kde $P \notin \mathcal{B}$ lib...
... píšeme " $X = t_0 A_0 + \dots + t_k A_k$ ", kde NUTNĚ $t_0 + \dots + t_k = 1$!
viz s. 41, 62
- $\{B_1, \dots, B_\ell\}$ = množina bodů $\subset \mathcal{a}$,
 $\{m_1, \dots, m_\ell\}$ = množina VAH $\subset \mathbb{R}$, $m_1 + \dots + m_\ell \neq 0$.
- $T =$ TĚŽIŠTĚ bodové hmotné soustavy $\{B_1(m_1), \dots, B_\ell(m_\ell)\}$,
pokud $m_1 \vec{TB}_1 + \dots + m_\ell \vec{TB}_\ell = 0$.
viz s. 63, 65
+ INDUKCE
- PLATÍ

$$T = \text{těžiště} \iff T = t_1 B_1 + \dots + t_\ell B_\ell,$$
$$\text{kde } t_i = \frac{m_i}{m_1 + \dots + m_\ell}.$$

OBECNĚ

- a = afinní prostor, B = afinní obal $\{A_0, \dots, A_k\}$,
kde $\{A_0, \dots, A_k\}$ = množina bodů v OBECNĚ poloze.

- PLATÍ

$$B = \text{af. obal } \{A_0, \dots, A_k\} = \{t_0 A_0 + \dots + t_k A_k \mid t_0 + \dots + t_k = 1\}$$

$$\begin{aligned} \text{Poloprostor } B \text{ určený } A_0 \text{ a hranici obal } \{A_1, \dots, A_k\} = \\ = B \cap \{t_0 \geq 0\} \end{aligned}$$

$$\text{konvexní obal } \{A_0, \dots, A_k\} = B \cap \{t_0 \geq 0\} \cap \dots \cap \{t_k \geq 0\}$$

viz s. 41, 63, 65
+ INDUKCE

- HLAVNĚ

Zobrazení $f: a \rightarrow a'$ je AFINNÍ

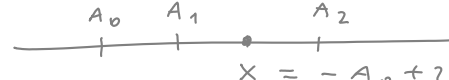
\Leftrightarrow zachovává AFINNÍ KOMBINACE bodů

\Leftrightarrow zachovává BARYCENTRICKÉ souř.

\Leftrightarrow zachovává TĚŽIŠTĚ bodových hmotných soustav.

viz definice s. 32-33, 41, 66

POZNÁMKY

např. 
 $X = -A_0 + 2A_1 = \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}A_2 = \dots$

68

- Pokud $\{A_0, \dots, A_k\}$ NEJSOU v obecné poloze, pak "souřadnice"
 $X = t_0 A_0 + \dots + t_k A_k \in \mathcal{B}$ NEJSOU určeny jednoznačně...
... nicméně mnohé z předchozího má stále DOBRÝ VÝZNAM!

Např.:

- Obecně NEPLATÍ
 $X = t_0 A_0 + \dots + t_k A_k \in \text{konvexní obal } \{A_0, \dots, A_k\}$
 (\Leftrightarrow) všechny $t_i \geq 0$,
- ale stále PLATÍ
konvexní obal $\{A_0, \dots, A_k\} = \left\{ \sum_{i=0}^k t_i A_i \mid \sum_{i=0}^k t_i = 1, t_i \geq 0 \right\}$.
- OBECNĚJI (Carathéodoryho věta)

$M \subseteq \mathcal{A}$, $\mathcal{B} = \text{afinní obal } M$, $k = \dim \mathcal{B}$:

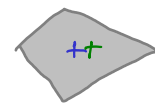
$$\text{konvexní obal } M = \left\{ \sum_{i=0}^k t_i A_i \mid A_i \in M, \sum_{i=0}^k t_i = 1, t_i \geq 0 \right\}$$

POZNÁMKY

- TĚŽIŠTĚ bodové hmotné soustavy se STEJNÝMI VAHAMÍ
NĚNÍ obecně totéž co

TĚŽIŠTĚ konvexního obalu bodů!

viz např. obecný čtyřúhelník



- ... SOUHLASÍ např. pro

viz s. 63, 65
+ indukce

• body v OBECNÉ POLOZE (v lib. dimenzi!)

SIMPLEXY



• SYMETRICKÉ věci

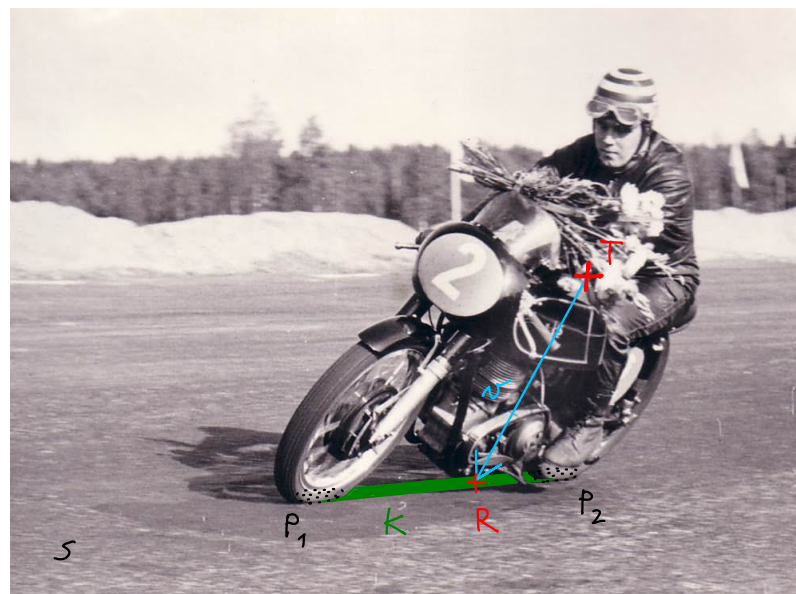
např. čtverec



• a pod.

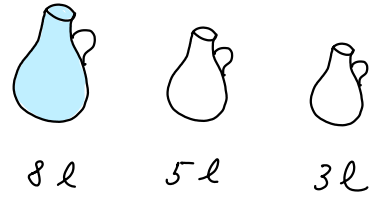
PRÍKLAD — PROBLÉM STABILITY

- Hmotná soustava je STABILNÍ ...

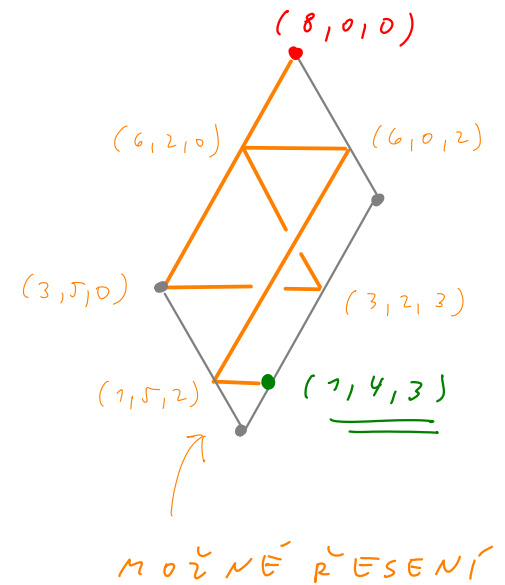
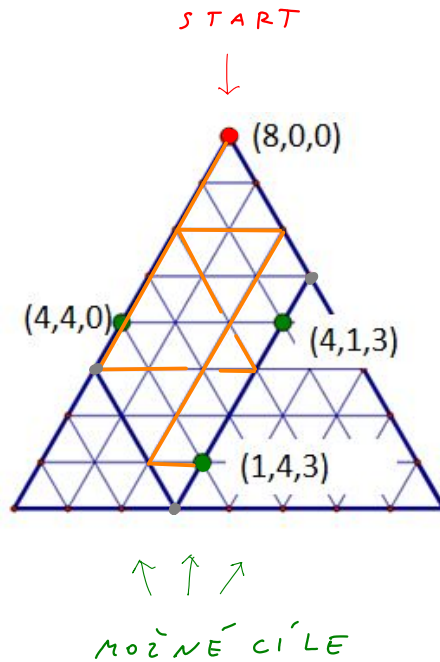
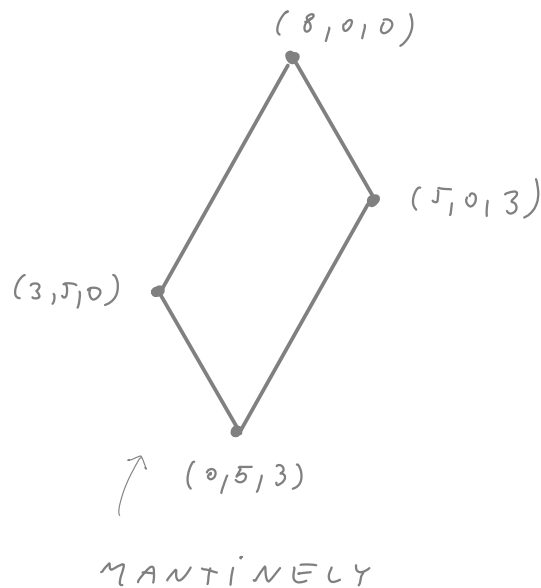


- ... pokud průmět (R)
těžiště (T) hmotné soustavy
ve směru výslednice (N) všech působících sil
do opěrné roviny (S)
leží v konvexním obalu (K)
opěrných prvků ($P_1 \cup P_2$).

PRÍKLAD — PROBLÉM TŘÍ DŽBAŇÍ



- UMÍME: přeléváním zcela naplnit (polo)prázdné nádoby.
- CHCEME: přesně 4l.
- POSTRĚH: součet vody v nádobách je pořád STEJNÝ!
- MOŽNÉ ŘEŠENÍ:


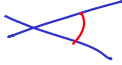



SHRNUTÍ

- ztotožnění $\xrightarrow{\text{af. přímka}} \cong \mathbb{R} \xleftarrow{\text{reálná čísla}}$
m) uspořádaní, úsečka, polo-prostor, KONVEXNÍ množina
- k popisu předchozích omezení se hodí afinní KOMBINACE bodů
- afinní kombinace bodů souvisí s TĚŽIŠTÍ
- těžiště soustavy HMOTNÝCH BODŮ
obecně NENÍ totéž co
těžiště jejich KONVEXNÍHO OBALU
- předchozí věci se zachovávají při AFINNÍCH zobrazeních ...
... některé charakterizují af. zobr. ÚPLNĚ
↑
af. kombinace / baryc. souřadnice

EUKLEIDOVSKÁ GEOMETRIE

TYPICKÉ EUKL. POJMY ...

- SHODNOST, podobnost
- vzdálenost 
- odchylka 
- obsah / objem 

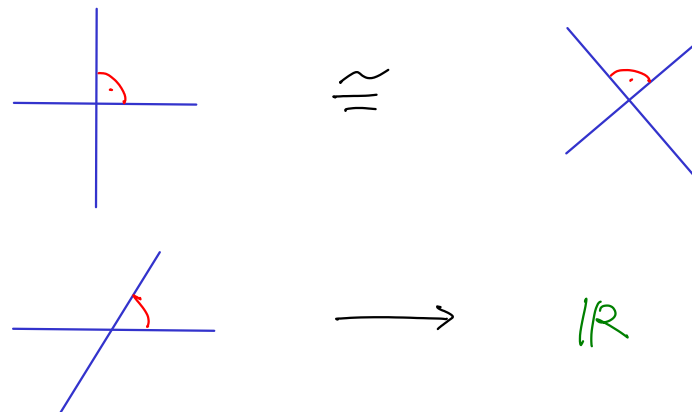
TYPICKÉ PROVEDENÍ

- obecné eukl. prostory, shodná zobrazení
 - vzdálenost
 - odchylka
- } ob. podprostorů
- objemy rovnoběžnostěnů, simplexů
 - algebraické konstrukce a souvislosti

OPAKOVÁNÍ

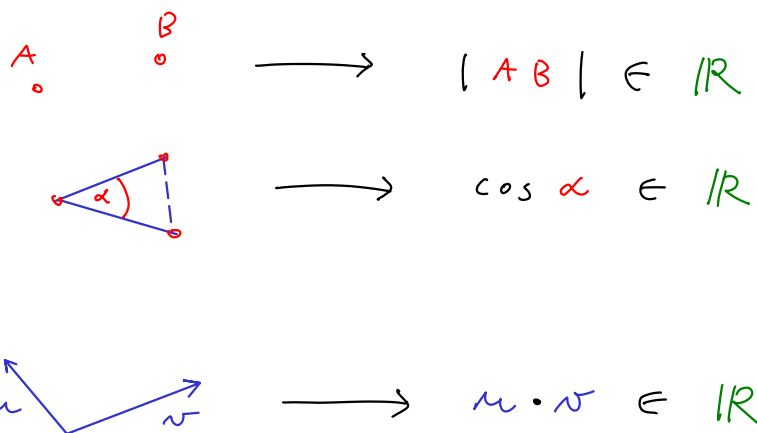
SHODNOST POMOCÍ ...

- AXIOMŮ
- MĚŘENÍ

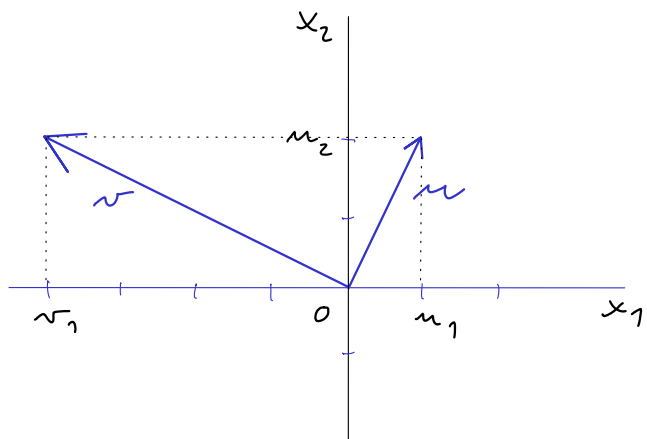


MĚŘENÍ POMOCÍ ...

- (správné) METRIKY
- SKALÁRNÍHO SOUČINU



SKALÁRNÍ SOUČIN konzumně



- SKALÁRNÍ SOUČIN vektorů

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots \in \mathbb{R}$$

- NORMA (velikost)

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots} = \sqrt{u \cdot u}$$

→ Pythagorova věta

- KOLMOST

$$u \perp v \iff u \cdot v = 0 \iff \text{podobné } \Delta$$

- ODCHYLKA

$$\angle(u, v) = \arccos \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} \iff \text{kosinová věta}$$

SKALÁRNÍ SOUČIN pořádně

... na vektorovém prostoru V

= přiřazení $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, které je

• SYMETRICKÉ

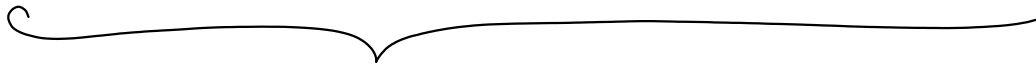
tj. $u \cdot v = v \cdot u$

• BI-LINEÁRNÍ

tj. lineární v OBOU složkách

• POZITIVNĚ DEFINITNÍ

tj. $u \neq 0 \Rightarrow u \cdot u > 0$



• Předchozí souř. vyjádření (\Leftrightarrow) báze ORTO-NORMÁLNÍ!

• souř. vyjádření OBECNĚ:

$$\uparrow$$
$$\text{tj. } e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1 & \dots i=j \\ 0 & \dots i \neq j \end{cases}$$

$$u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \dots, \quad v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots$$

$$u \cdot v = u_1 v_1 (e_1 \cdot e_1) + u_1 v_2 (e_1 \cdot e_2) + \dots$$

$$+ u_2 v_1 (e_2 \cdot e_1) + u_2 v_2 (e_2 \cdot e_2) + \dots = (u_1, u_2, \dots) \cdot \begin{pmatrix} e_1 \cdot e_1 & e_1 \cdot e_2 & \dots \\ e_2 \cdot e_1 & e_2 \cdot e_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

ZÁKLADNÍ NEROVNOSTI

• POL. DEFINITNOST

$$u \cdot v \geq 0$$

přičemž $=$, právě když $u = 0$



• CALCHYHO - SCHWARTZOVA NEROVNOST

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

přičemž $=$, právě když $u \propto v$



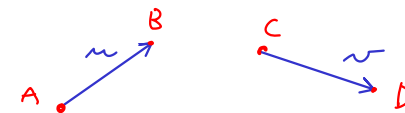
• TROJÚHELNÍKOVÁ NEROVNOST

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

přičemž $=$, pouze když $u \propto v$

SHODNOST ÚSEČEK

- $AB \cong CD$, pokud $|AB| = |CD|$, přičemž ...



$$\dots a \times a \longrightarrow V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$A, B \mapsto \vec{m} = \overrightarrow{AB} \mapsto |AB| = \|\vec{m}\| = \sqrt{\vec{m} \cdot \vec{m}} \dots \text{VZDÁLENOST } A, B$$

- Toto přiřazení = EUKLEIDOVSKÁ METRIKA, přičemž ...

... (obecná) METRIKA:

a) $|AB| \geq 0$

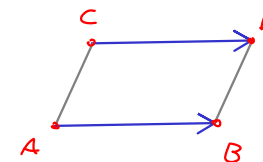
b) $|AB| = 0 \Leftrightarrow A = B$

c) $|AB| = |BA|$

d) $|AC| \leq |AB| + |BC|$

... EUKLEIDOVSKÁ = kompatibilní s AFINNÍ strukturou, tj.

e) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow |AB| = |CD|$

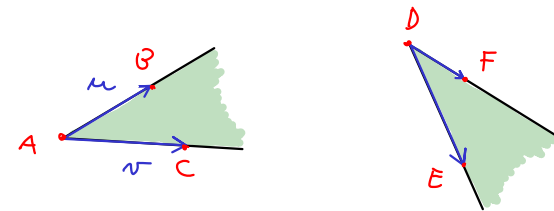


- KOLINEARNOST a VSPORÁDÁNÍ bodů na přímce pomocí METRIKY:

$$B \text{ mezi } A \text{ a } C \Leftrightarrow |AC| = |AB| + |BC|$$



SHODNOST ČHLČ



- $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle EDF$, pokud $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$, přičemž ...

$$\dots a \times a \times a \longrightarrow v \times v \longrightarrow [-1, 1] \longrightarrow [180^\circ, 0^\circ]$$

$$B, A, C \mapsto u = \vec{AB}, v = \vec{AC} \mapsto \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} \mapsto \boxed{\arccos \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} = |\sphericalangle BAC|}$$

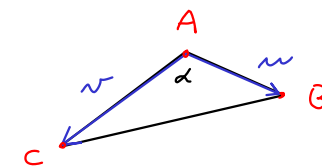
... ODCHYLKÁ \vec{AB} a \vec{AC}

- Toto přiřazení je vskutku DOBRĚ def!

- $\sphericalangle(u, v) = 90^\circ \iff u \cdot v = 0$

- ODCHYLKÁ pomocí METRIKY a KOSINOVÉ VĚTY:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$$



$$L = \|u - v\|^2 = \dots = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2u \cdot v$$

$$P = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \alpha$$

$$\boxed{u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \alpha}$$

SHRNUTÍ / PLÁN

- skalární součin stačí na VŠECHNO!
- EUKLEIDOVSKÝ PROSTOR \mathcal{E}
= afinní prostor se skalárním součinem na zaměření $V = \vec{\mathcal{E}}$
- Eukleidovský podprostor $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{E}$
= podmnožina, která je eukleidovským prostorem ...
= afinní podprostor se zúženým skal. součinem na $\vec{\mathcal{B}} \subseteq \vec{\mathcal{E}}$
- Relevantní zobrazení $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ v rámci AFINNÍCH:


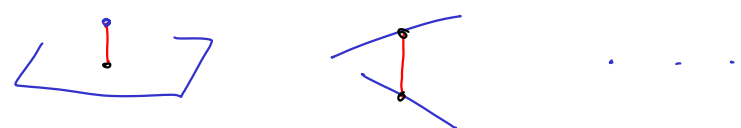
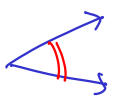
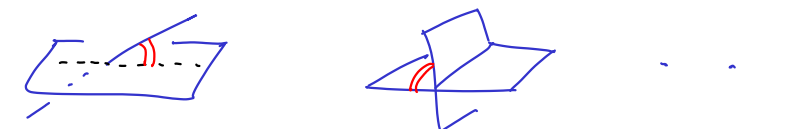
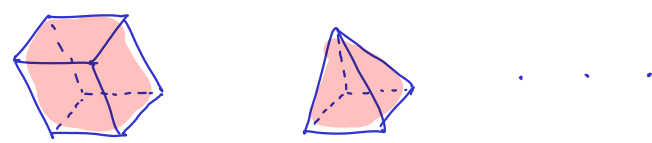
f je SHODNÉ $(\Leftrightarrow) \vec{f}$ zachovává SKALÁRNÍ SOUČIN

f je PODOBNÉ $(\Leftrightarrow) \vec{f} \sim \dots$ až na NÁSOBĚK

f je EKVIAFINNÍ $(\Leftrightarrow) \dots$ nějaké DETERMINANTY \dots

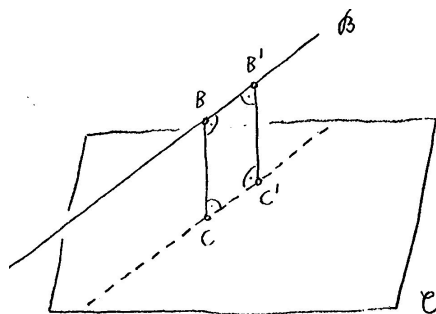
→ details později

SHRNUTÍ / PLÁN

MÁME	CHCEME	POUŽIJEME
vzdálenost bodů 	vzdálenost podprostorů 	kolmé přímky
odchylka vektorů 	odchylka podprostorů 	kolmé přímky
vzdálenost bodů a odchylka vektorů	objem ob. mnohostěnnu 	DETERMINANTY a pod.

VZDALENOSTI

- obecná definice
- geom. charakterizace
- souvislost se vzájn. polohami



VZDÁLENOSTI

- VZDÁL. lib. podmnožin v lib. METRICKÉM prostoru :

$$v(B, \mathcal{C}) = \inf \{ |BC|, \text{ kde } B \in B \text{ a } C \in \mathcal{C} \}$$

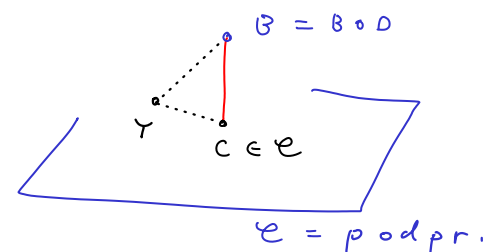
- Pro PODPROSTORY v EUKLEIDOVSKÉM prostoru :

$$\dots \inf = \min \dots$$

- ZŘEJMĚ : $v(B, \mathcal{C}) = 0 \iff B \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$

- První GEOM. charakterizace :

$$v(B, \mathcal{C}) = |BC|, \text{ tj. } |BC| = \min \\ \iff \vec{BC} \perp \mathcal{C}.$$



- Důkaz (Pythagorova věta) :

(a) případ. $\vec{BC} \perp \mathcal{C}$ a $Y \in \mathcal{C}$ lib $\rightsquigarrow |BY|^2 = |BC|^2 + |CY|^2 > |BC|^2$

(b) případ. $\vec{BC} \not\perp \mathcal{C}$ a $Y \in \mathcal{C}$, $\vec{BY} \perp \mathcal{C} \rightsquigarrow |BC|^2 = |BY|^2 + |CY|^2 \not\perp |BY|^2$.

OBECNÁ CHARAKTERIZACE

- $B, \mathcal{E} \dots$ lib. podprostorů, $B \in \mathcal{B}, C \in \mathcal{E}$:

$$(1) \nu(B, \mathcal{E}) = |BC|, \text{ t.j. } |BC| = \min$$

$$\iff \vec{BC} \perp B \text{ a } \vec{BC} \perp \mathcal{E}.$$

(2) Předchozí dvojice B, C je určena jednoznačně

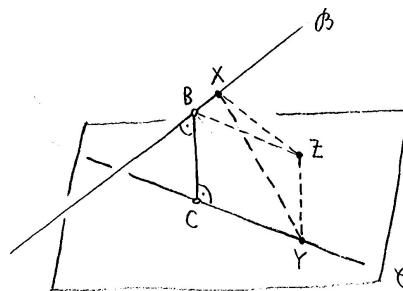
$$\iff \vec{B} \cap \vec{\mathcal{E}} = \{0\}.$$

- Důkaz:

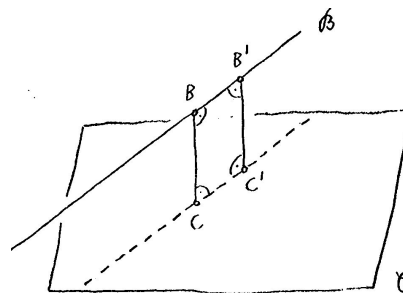
Pro $\nu(B, \mathcal{E}) = 0$, t.j. $B \cap \mathcal{E} \neq \emptyset$, všechno zřejmé...

Pro $\nu(B, \mathcal{E}) \neq 0$:

(1) "pravoúhlé Δ "



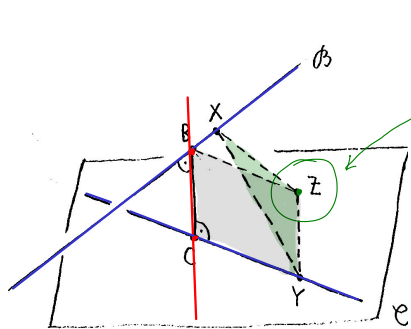
(2) "obdélníčky"

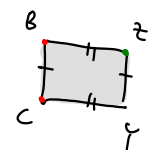


DETAILY K DŮKAZU

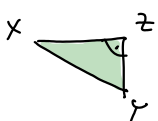
(1)

- Předp. $|BC| = \min \rightsquigarrow \vec{BC} \perp \mathcal{B}$ a $\vec{BC} \perp \mathcal{E}$. (viz s. 83)
- Předp. $\vec{BC} \perp \mathcal{B}$ a $\vec{BC} \perp \mathcal{E} \rightsquigarrow |XY| \geq |BC|$ pro lib. $X \in \mathcal{B}$, $Y \in \mathcal{E}$

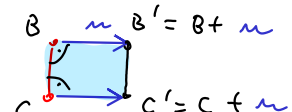


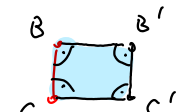
tak, aby  , tj. $\vec{ZY} = \vec{BC}$,

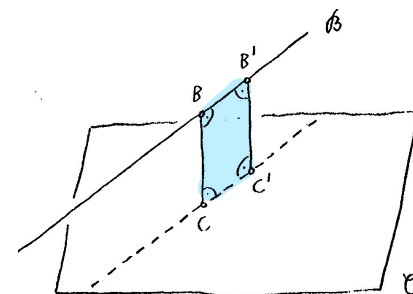
$$\vec{BC} \perp \mathcal{B} \text{ a } \vec{BC} \perp \mathcal{E} \implies \vec{ZY} = \vec{BC} \perp \vec{ZB} + \vec{BX} = \vec{ZX},$$

Tedy  $\implies |XY|^2 = |XZ|^2 + |ZY|^2 \geq |ZY|^2 = |BC|^2$.

(2)

- Předp. $\vec{m} \in \vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{E}} \implies$  $\implies |BC| = |B'C'|$.

- Předp. $|BC| = |B'C'|$, tj.  $\implies \vec{BB'} = \vec{CC'} \in \vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{E}}$.



SOUVISLOST SE VZÁJ. POLOHAMÍ

• Ozna:

v = vzdálenost \mathcal{B}, \mathcal{E}

d = $\dim \{ \text{řešení odp. soustavy} \} = \dim \vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{E}}$

m = $\min \{ \dim \mathcal{B}, \dim \mathcal{E} \}$

• Např.:

$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{E}$



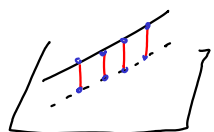
$v = 0$
 $d = m$

$\mathcal{B} \times \mathcal{E}$



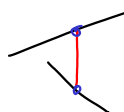
$v = 0$
 $d < m$

$\mathcal{B} \parallel \mathcal{E}$



$v \neq 0$
 $d = m$

$\mathcal{B} \not\parallel \mathcal{E}$



$v \neq 0$
 $d < m$

• OBECNĚ:

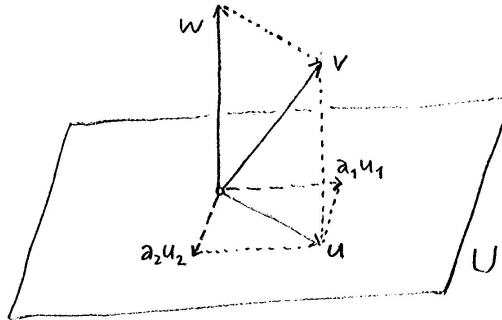
		$d = m$	$d < m$
	$\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{E}}$	je	není
	$\mathcal{B} \cap \mathcal{E}$	max	max
$v = 0$	není \emptyset	\subseteq	\times
$v > 0$	je \emptyset	\parallel	$\not\parallel$




viz s. 47-48

POZNÁMKY KE \perp ROZKLADŮM A POČÍTÁNÍ

- kolmý doplněk podprostoru
- kolmé rozklady / průměty
- početní přístupy obecné / speciální
- poznámky a souvislosti



KOLMÝ DOPLNĚK

- $U \subseteq V$... vektorový podpr. v prostoru se skal. součinem
- $U^\perp = \underline{\text{kolmý doplněk } U \text{ ve } V}$
 $= \{ \text{všechno ve } V \text{ kolmé ke všemu } v \in U \}$
 $= \{ v \in V \mid v \perp u \text{ pro } \forall u \in U \}$
- Pro lib. bázi (u_1, \dots, u_k) podpr. U :
 $U^\perp = \{ v \in V \mid \boxed{v \cdot u_1 = \dots = v \cdot u_k = 0} \}$


soustava lin. homog. rovnic
- Zřejmě platí:
 $U^\perp \subseteq V$ je vektorový podpr.
 $U^\perp \cap U = \{0\}$ a $U^\perp + U = V$

→ Tedy U a U^\perp jsou vsude vzájemně komplementární
(= doplňkové) !

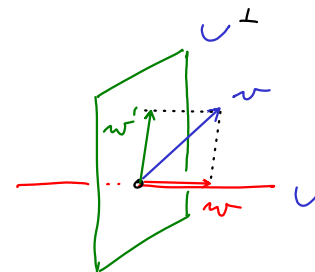
DŮSLEDKY

Kolmý rozklad

- Lib. $v \in V$ lze vyjádřit jednoznačně jako

$$v = \underline{w} + \underline{w'}, \text{ kde } \underline{w} \in U \text{ a } \underline{w'} \in U^\perp!$$

\uparrow kolmý průmět v do U
 \uparrow kolmý průmět v do U^\perp



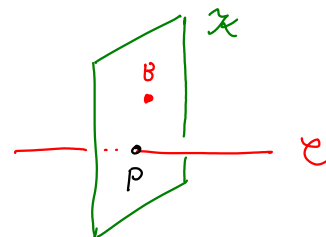
Totální kolmost

- Podpr. $B, \mathcal{E} \subseteq E$ jsou totálně kolmé, pokud $B^\perp = \mathcal{E}$.

- Totálně kolmé podpr. se protínají v bodě!

\rightsquigarrow jednoznačně určená práma "kolmice"

z bodu B k podpr. \mathcal{E} ... $P = \mathcal{X} \cap \mathcal{E}$,
kde $\mathcal{X} = B + \mathcal{E}^\perp$



POČÍTAŇÍ KOLMÉHO PRŮMĚTU

89,5

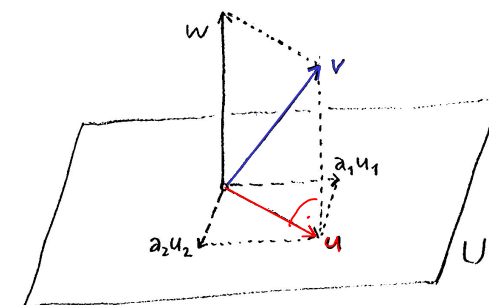
- $U = \langle u_1, \dots, u_k \rangle \subseteq V$
- $v \in V$ lib
- u = kolmý průmět v do U

(\Rightarrow) $u = a_1 u_1 + \dots + a_k u_k$, pro nějaké $a_i \in \mathbb{R}$

$$a \quad v - u \perp U,$$

$$\text{tj. } (v - u) \cdot u_i = 0, \text{ pro } i = 1, \dots, k,$$

$$\text{tj. } \begin{cases} a_1 (u_1 \cdot u_1) + \dots + a_k (u_k \cdot u_1) = v \cdot u_1 \\ \vdots \\ a_1 (u_1 \cdot u_k) + \dots + a_k (u_k \cdot u_k) = v \cdot u_k \end{cases}$$



"symetrická"
soustava
k lin. rovnic
k neznámých

- spec. $\dim U = 1$:

$$a_1 (u_1 \cdot u_1) = v \cdot u_1$$

\leadsto

$$u = \left(\frac{v \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} \right) u_1,$$

$$\text{zejména } \|u\| = \frac{|v \cdot u_1|}{\|u_1\|}.$$

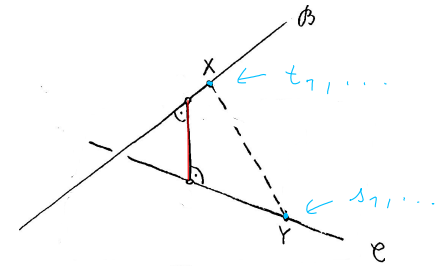
POČÍTAŇÍ VZDÁLENOSTÍ

$\dim \mathcal{B} = k, \dim \mathcal{E} = l$ 90

• $\mathcal{B} = \{ B + t_1 u_1 + \dots \}, \mathcal{E} = \{ C + s_1 v_1 + \dots \} \subseteq E$

• $X \in \mathcal{B}, Y \in \mathcal{E} \rightsquigarrow \vec{XY} = \vec{BC} + s_1 v_1 + \dots - t_1 u_1 - \dots$

• $v(t_1, \dots, s_1, \dots) = |XY| = \sqrt{\vec{XY} \cdot \vec{XY}} = \sqrt{f(t_1, \dots, s_1, \dots)}$



herap. kvadr. polynom

(A) podle DEFINICE

$v = \min \Leftrightarrow \frac{\partial v}{\partial t_1} = \dots = \frac{\partial v}{\partial s_1} = \dots = 0$

$\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial t_1} = \dots = \frac{\partial f}{\partial s_1} = \dots = 0$

(B) kolmá PRÍČKA

$v = \min \Leftrightarrow \vec{XY} \perp \mathcal{B} \text{ a } \vec{XY} \perp \mathcal{E}$

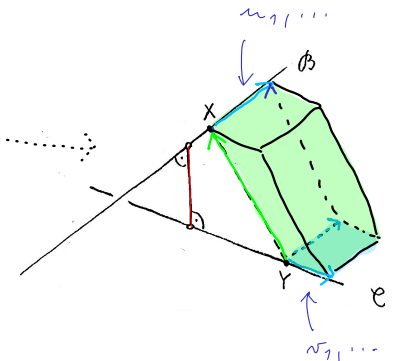
$\Leftrightarrow \vec{XY} \cdot u_1 = \dots = \vec{XY} \cdot v_1 = \dots = 0$

$k+l$ LINEÁRNÍCH rovnic

(C) výška ROUNOBĚŽNOSTĚNU

$v = \min \Leftrightarrow v = \text{výška rovnob.}$

$\Leftrightarrow v = \frac{\text{objem}(u_1, \dots, v_1, \dots, \vec{XY})}{\text{objem}(u_1, \dots, v_1, \dots)}$

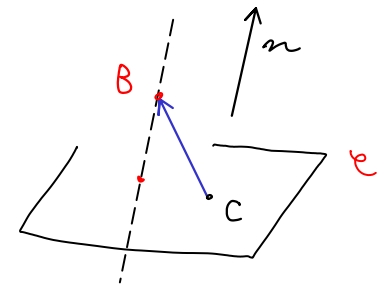


POZNÁMKY A ZKRATKY

- Vyznačené soustavy v (A) a (B) jsou STĚJNÉ.
- Příčky (tedy i kolmé) umíme dělat RŮZNĚ!
- $|XY| = \min \Leftrightarrow \vec{xy} = \text{kolmý prŕmĕt } \vec{bc} \text{ do } (\vec{b} + \vec{e})^\perp \dots$
... obzvlášt' snadné zejména pro $\dim(\vec{b} + \vec{e})^\perp = 1 \leadsto$ "vzorečky"

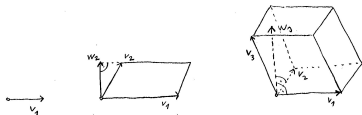
- Např. $B = \text{bod}$, $e = \text{nadrovina}$:
 $C \in e$, $n \in e^\perp$ lib.

$$\leadsto v(B, e) = \frac{|\vec{bc} \cdot n|}{\|n\|}$$

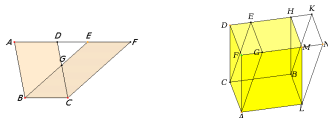


- Další "vzorečky" podle (C) ...
... OBSAHY a OBJEMY řešíme dále ...

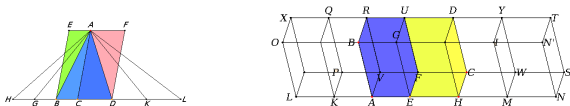
- obsahy rovnoběžníků, objemy rovnoběžnostěnů
- vymezení elementárně, vektorově
- determinanty, vnější a vektorové součiny
- poznámky a souvislosti



- Rovnoběžníky(-ostěny) se stejnými základnami a stejnými výškami mají stejný obsah.

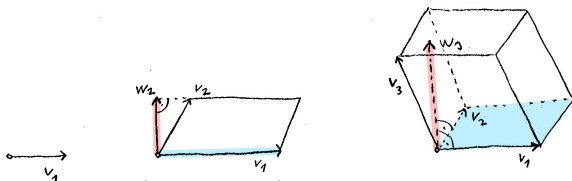


- Poměr obsahů(-jemů) rovnoběžníků(-ostěňů) se stejnou výškou je stejný jako poměr délek(obsahů) jejich základen.



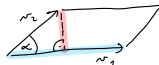
- Odtud poučka

$$\text{„obsah(objem)“} = \text{základna} \times \text{výška“}$$



Objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$ je nezáporné reálné číslo, ozn. $V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots)$, takové, že

- $V(\mathbf{v}_1) := \|\mathbf{v}_1\|$,
- $V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) := V(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2) = \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{w}_2\|$,
kde \mathbf{w}_2 = kolmý průmět vektoru \mathbf{v}_2 do \mathbf{v}_1^\perp ,
- $V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) := V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_3) = V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \cdot \|\mathbf{w}_3\|$,
kde \mathbf{w}_3 = kolmý průmět vektoru \mathbf{v}_3 do $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle^\perp$,
- atd. ...



- Pro $k = 2$ např.:

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\| \cdot \sin \alpha,$$

kde $\alpha = \angle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), \dots$

(umíme)

- Pro obecné k např.:

← soustava lin. rovnic

– podle definice, tj. pomocí kolmého průmětu,

(umíme)

– podle vlastností, tj. pomocí determinantu, vektorového součinu, apod.

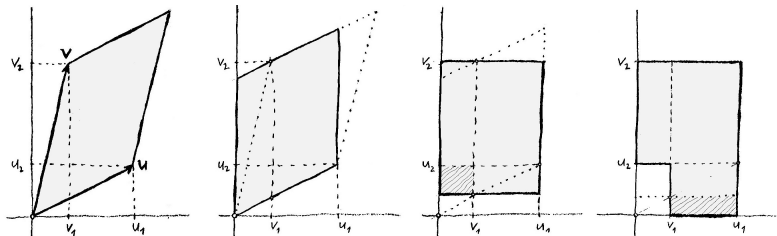
(naučíme)



"vzorčeky"

při-

Obsah rovnoběžníku určeného vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \dots$



\dots je roven absolutní hodnotě determinantu $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1 v_2 - v_1 u_2$.

$$\uparrow$$

$$\det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$$

Úvod (konceptně)

$$V \times V \times \dots \rightarrow \mathbb{R}_+$$



$$V \times V \times \dots \rightarrow \mathbb{R}$$



Vlastnosti obsahu/objemu se nápadně podobají vlastnostem determinantu:

$$V(\mathbf{v}_1, a\mathbf{v}_1) = 0$$

$$V(\mathbf{v}_1, a\mathbf{v}_1) = 0$$

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_1)$$

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_1)$$

$$V(\mathbf{v}_1, 2\mathbf{v}_2) = 2 \cdot V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$$

$$V(\mathbf{v}_1, b\mathbf{v}_2) = |b| \cdot V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$$

↑
abs. hodnota

Determinant chápeme

- buď jako $\text{Mat}(n \times n) \rightarrow \mathbb{R}$,
 = součet součinů prvků typu „jeden z každého řádku/sloupce“...

+ znamená odp. paritu výběru

- ☞ • nebo jako $\underbrace{V \times \dots \times V}_n \rightarrow \mathbb{R}$, kde $V = \mathbb{R}^n$, které je

a) anti-symetrické

$$\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots) = -\det(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \dots),$$

b) multi-lineární

t.j. ve všech složkách

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{v}_1, b\mathbf{v}_2, \dots) &= b \cdot \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots), \\ \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + \mathbf{w}_2, \dots) &= \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots) + \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \dots). \end{aligned}$$

Důležité (odvozené) vlastnosti:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_1, \dots) &= \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots), \\ \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots) &= 0 \iff \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots \text{ jsou lineárně závislé.} \end{aligned}$$

Vnější součin

Uvažme $\dim V = n$ a přiřazení $\underbrace{V \times \cdots \times V}_n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \mapsto \text{souřadnice} \mapsto \text{determinant.}$$

Závisí na volbě báze...¹

Vnější součin = předchozí přiřazení vzhledem k nějaké ortonormální bázi; ozn.

$$[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n] := \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n).$$

Vnější součin je anti-symetrické n -lineární zobrazení, které až na znaménko souhlasí objemem...

Mezishrnutí:

$$V(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \begin{cases} 0 & \text{pro } k > n \\ \pm[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k] & \text{pro } k = n \\ \textcircled{?} & \text{pro } k < n \end{cases}$$

viz dále...

¹... viz přechodové matice a Cauchyovu větu o součinu determinantů.

Víme, že

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\| \cdot \sin \alpha,$$

přičemž

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}, \quad \cos \alpha = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\|}.$$

Odtud

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \dots = \sqrt{\|\mathbf{v}_1\|^2 \|\mathbf{v}_2\|^2 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2} = \sqrt{\begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \end{vmatrix}},$$

zase jakýsi determinant, ...

... tzv. Gramův determinant, ozn.

$$G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) := \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_1 & \dots & \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k \end{vmatrix}.$$

Věta

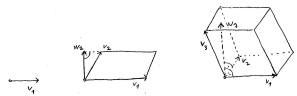
Pro libovolnou k -tici vektorů v eukleidovském prostoru platí

$$V(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \sqrt{G(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)}.$$

Důkaz.

Plyne z vlastností determinantu a skalárního součinu... !





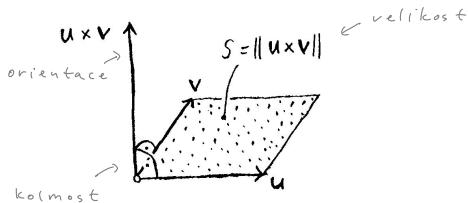
1) Pro navzájem **kolmé** vektory (kvádr):

$$\begin{aligned}
 G(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3) &= \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{w}_3 \end{vmatrix} = \\
 &= \|\mathbf{v}_1\|^2 \cdot \|\mathbf{w}_2\|^2 \cdot \|\mathbf{w}_3\|^2 = V(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)^2. \leftarrow (\text{zejména } v \cdot d_3 \geq 0)
 \end{aligned}$$

2) Pro lib. našikmené vektory $\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_2 + a\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{w}_3 + b\mathbf{v}_1 + c\mathbf{v}_2$:

$$\begin{aligned}
 G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) &= \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3 \end{vmatrix} / \\
 &= \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{v}_3 \end{vmatrix} / \\
 &= \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_2 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_3 \\ \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_3 \\ \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{w}_3 \end{vmatrix} = G(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3). \quad \square
 \end{aligned}$$

Od maturity známe jako operaci $V \times V \rightarrow V$ s několika užitečnými vlastnostmi:



U maturity zpravidla nevíme proč, ale pro $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ počítáme takto:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

souv. vzhledem k ON bázi

Návod k předchozímu souř. vyjádření — Laplaceův rozvoj determinantu:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x_1 \\ u_2 & v_2 & x_2 \\ u_3 & v_3 & x_3 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} x_1 - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} x_3.$$

↑

 Důležitá (bezsouřadnicová) interpretace:

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}] = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{x},$$

↑
vnější součin
↓
vektorový s.
↖
skalární s.

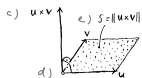
Obecná definice:

Vektorovým součinem $(n - 1)$ -tice vektorů $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$ v n -rozměrném eukleidovském prostoru je vektor $\mathbf{w} := \mathbf{v}_1 \times \dots \times \mathbf{v}_{n-1}$ splňující

$$[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{x}] = \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} \quad (*)$$

pro všechna $\mathbf{x} \in V$.

Vektorový součin (vlastnosti)



705

Věta

Ozn. $\mathbf{w} := \mathbf{v}_1 \times \cdots \times \mathbf{v}_{n-1}$, $n = \dim V$.

- a) Toto je anti-symetrické multi-lineární zobrazení $\underbrace{V \times \cdots \times V}_{n-1} \rightarrow V$.
- b) $\mathbf{w} = \mathbf{o} \iff \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ jsou lineárně závislé.
- c) $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ jsou lineárně nezávislé $\implies (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{w})$ je kladná báze.
- d) \mathbf{w} je kolmý ke všem vektorům $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$.
- e) $\|\mathbf{w}\| = V(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1})$.

Důkaz.

- a) Viz def. ^(*) rovnost a vlastnosti ^(v) vnějšího a ^(s) skalárního součinu.
- b) $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{x}] = 0 \forall \mathbf{x} \in V \iff \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ lin. závislé;
 $\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} = 0 \forall \mathbf{x} \in V \stackrel{(s)}{\iff} \mathbf{w} = \mathbf{o}$.
- c) $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}$ lin. nezávislé $\stackrel{(b)}{\implies} \mathbf{w} \neq \mathbf{o} \implies [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{w}] \stackrel{(*)}{=} \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \stackrel{(s)}{>} 0$.
- d) $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_i \stackrel{(*)}{=} [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_i] \stackrel{(v)}{=} 0$.
- e) $\|\mathbf{w}\|^2 = \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} \stackrel{(*)}{=} [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{w}] \stackrel{(v)}{=} V(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{w}) \stackrel{(d)}{=} V(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n-1}) \cdot \|\mathbf{w}\|$. □

K vektorovému součinu pro $n = 3$:

- Binární operace $V \times V \rightarrow V$, která **není** asociativní (přesto užitečná).
- Pro velikost platí

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha, \quad \text{kde } \alpha = \angle(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

K aplikacím:

- Orientace a kolmosti vektorů.
- Objemy rovnoběžnostěnů, simplexů atd., přičemž:

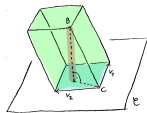
Objem k -dim simplexu = $\frac{1}{k!}$ objemu opsaného rovnoběžnostěnu.

*indukce
(+ limitní úvahy)*

- Vzdálenosti podprostorů **bez** řešení soustav rovnic:

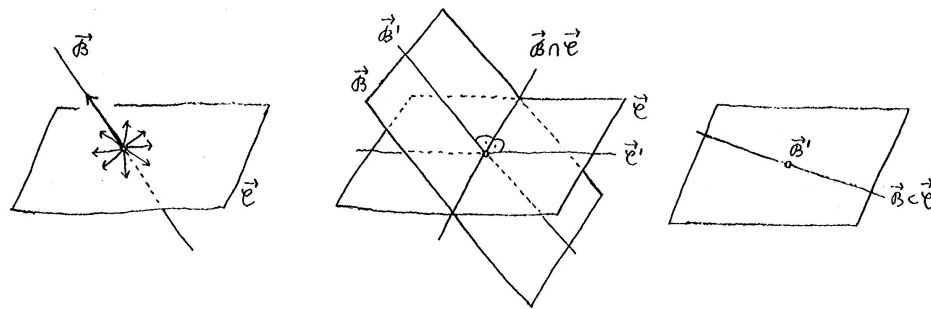
$$v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \frac{V(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \vec{BC})}{V(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots)},$$

kde $B \in \mathcal{B}$, $C \in \mathcal{C}$ a $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots)$ je báze $\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}$.



ODCHYLKY

- obecná definice
- geom. charakterizace
- poznámky a souvislosti s kolmostí

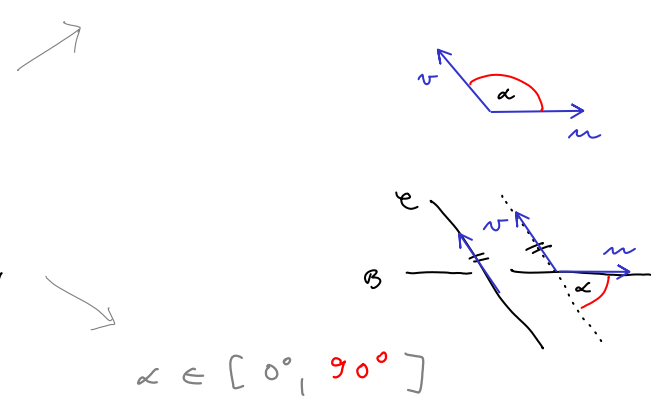


ODCHYLKY

$\alpha \in [0^\circ, 180^\circ]$

- Rozumíme \angle vektorů ... $\cos \alpha = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}$

\rightsquigarrow \angle přímek ... $\cos \alpha = \frac{|u \cdot v|}{\|u\| \cdot \|v\|}$



$\alpha \in [0^\circ, 90^\circ]$

Obecně

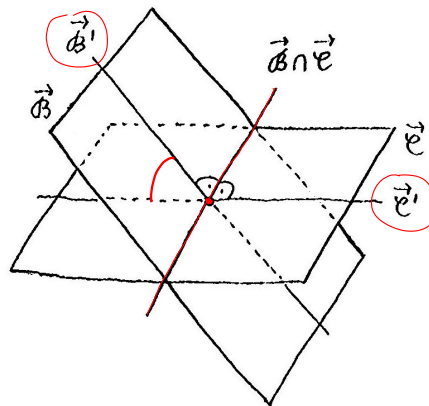
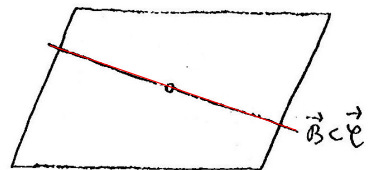
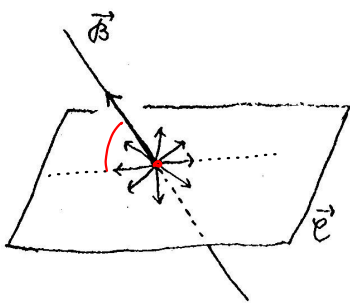
- $\angle(B, E) = \angle(\vec{B}, \vec{E})$,
- $\angle(\vec{B}, \vec{E})$... musíme rozlišovat:

- $\vec{B} \cap \vec{E} = \{0\}$... $\angle(\vec{B}, \vec{E}) = \min \{ \angle(u, v), \text{ kde } u \in \vec{B} \text{ a } v \in \vec{E} \}$

- $\vec{B} \cap \vec{E} \neq \{0\}$ \rightarrow $\vec{B} \cap \vec{E} = \max$... $\angle(\vec{B}, \vec{E}) = 0$

\rightarrow $\vec{B} \cap \vec{E} \neq \max$... $\angle(\vec{B}, \vec{E}) = \angle(\vec{B}', \vec{E}')$,

kde $\vec{B}' \subset \vec{B}$ a $\vec{B}' \perp (\vec{B} \cap \vec{E})$
a $\vec{E}' \subset \vec{E}$ a $\vec{E}' \perp (\vec{B} \cap \vec{E})$



\uparrow
vsledkem $\vec{B}' \cap \vec{E}' = \{0\}$

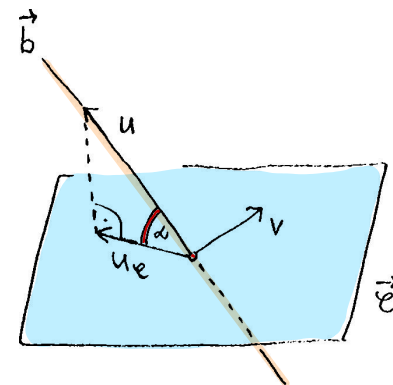
PRVNÍ CHARAKTERIZACE

- b = přímka, e = ob. netriv. podpr:

$$\angle(b, e) = \angle(u, u_e),$$

kde $u \in \vec{b}$ lib.

a u_e = kolmý průmět u do e .



- Důkaz:

Pro lib. $v \in \vec{e}$ ukážeme, že $\beta = \angle(u, v) \geq \angle(u, u_e) = \alpha$,

tj. $\cos \beta \leq \cos \alpha$:

$$\cos \beta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{u_e \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq \frac{\|u_e\| \cdot \|v\|}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{\|u_e\|}{\|u\|} = \cos \alpha.$$

$$u - u_e \perp e$$

$$\text{tj. } (u - u_e) \cdot v = 0$$

Cauchy-Schwarz!

OBECNÁ CHARAKTERIZACE

- $\mathcal{B}, \mathcal{C} \dots$ ob. netrivi. podpr., $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} = \{0\}$
- ozn. $\angle(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \angle(\vec{m}, \vec{n}) = \alpha$ pro $\vec{m} \in \vec{\mathcal{B}}$ a $\vec{n} \in \vec{\mathcal{C}}$

$$\rightsquigarrow \alpha = \angle(\vec{m}, \vec{n}_{\mathcal{C}}) = \angle(\vec{v}_{\mathcal{B}}, \vec{n}),$$

kde $\vec{n}_{\mathcal{C}}$ = kolmý průmět \vec{n} do \mathcal{C}

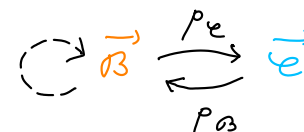
a $\vec{v}_{\mathcal{B}}$ = kolmý průmět \vec{v} do \mathcal{B}

$$\rightsquigarrow \vec{n}_{\mathcal{C}} = \text{nášobek } \vec{n} \text{ a } \vec{v}_{\mathcal{B}} = \text{nášobek } \vec{m}$$

$$\rightsquigarrow \vec{m}_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \text{kolmý průmět } \vec{m}_{\mathcal{C}} \text{ do } \mathcal{B}$$

$$= \text{nášobek } \vec{m}$$

= CHAR. VEKTOR složeného zobr.

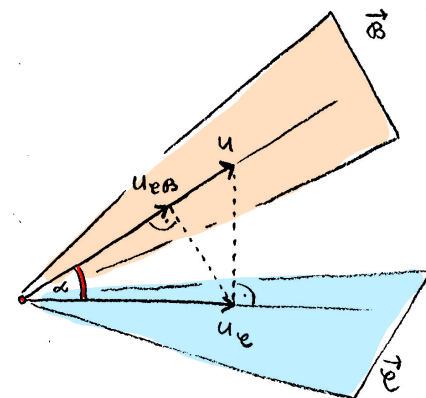


$$\cdot \text{Přitom } \cos \alpha = \frac{\|\vec{n}_{\mathcal{C}}\|}{\|\vec{n}\|} = \frac{\|\vec{m}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}\|}{\|\vec{m}_{\mathcal{C}}\|}, \quad \vec{m}_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \lambda \vec{m} \rightsquigarrow \boxed{\lambda = \cos^2 \alpha}.$$

$$\angle(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \angle(\vec{m}, \vec{n}_{\mathcal{C}}) = \dots,$$

kde \vec{m} = char. vektor odp. největšímu char. číslu transf. $P_{\mathcal{B}} \circ P_{\mathcal{C}}$

$$\text{a } \vec{n}_{\mathcal{C}} = P_{\mathcal{C}}(\vec{m}), \dots$$



ZKRATKY A POZNÁMKY

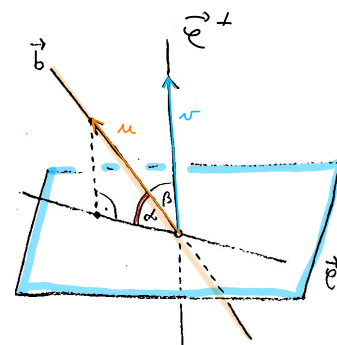
• obecně platí $\angle(\vec{B}, \vec{e}) = \angle(\vec{B}^\perp, \vec{e}^\perp) = 90^\circ - \angle(\vec{B}, \vec{e}^\perp) \dots$

• což se hodí zejména v NADROVIN ...

$\angle(\vec{e}, \vec{e}^\perp) = 90^\circ$

• Např. b = přímka, e = nadrovina

$\rightsquigarrow \alpha = \angle(b, e) = 90^\circ - \angle(u, v)$,
kde $u \in \vec{b}$, $v \in \vec{e}^\perp$ lib.



$\rightsquigarrow \sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha) = \frac{|u \cdot v|}{\|u\| \cdot \|v\|}$

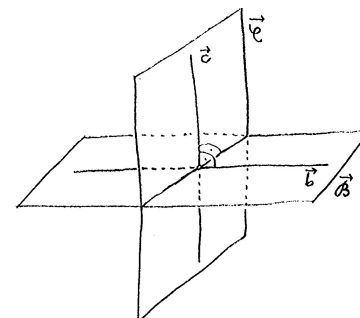
• B, e totálně kolmé, tj. $\vec{B}^\perp = \vec{e} \implies \angle(B, e) = 90^\circ$. ← triv.

• B, e "kolmé", tj. $\vec{B}^\perp \subseteq \vec{e}$ či $\vec{B}^\perp \supseteq \vec{e} \implies \angle(B, e) = 90^\circ$. ← obecně

Důvod:

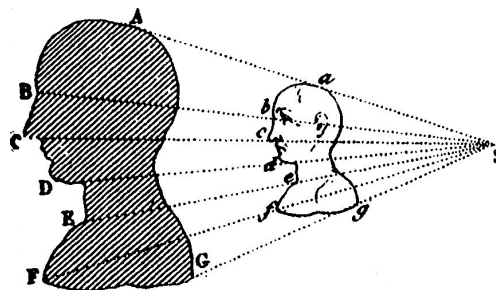
Levá strana závisí
na okolním prostoru E ,
pravá strana nikoli!

~~$\angle(B, e) = 90^\circ$~~
platí, pokud
 $\vec{B} \cap \vec{e} = \{0\}$!



RELEVANTNÍ ZOBRAZENÍ

- shodná, podobná a ekvifinní zobr.
- alg. vymezení a souř. vyjádření
- výhled k projektivním



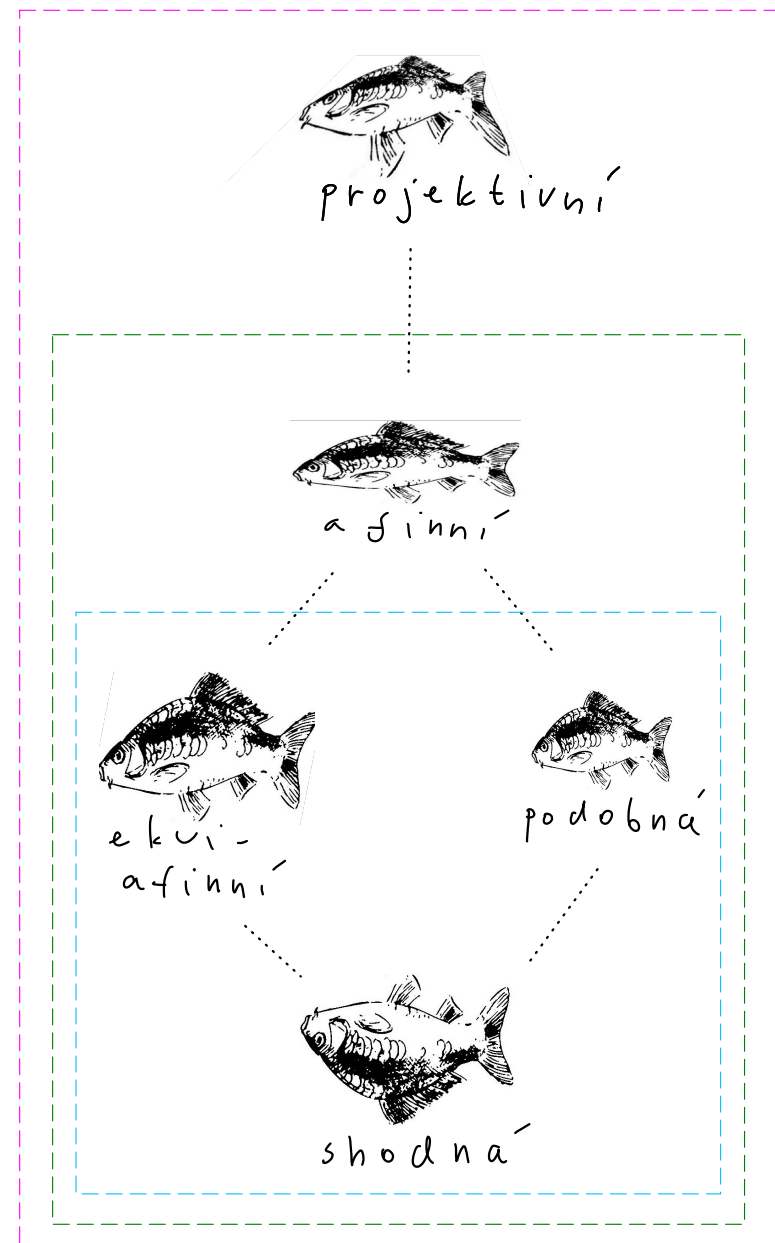
Umíme

(Geometrie 1)

- VŠECHNY skupiny elementárně
- všechno o AFINNÍCH! (s. 32-35, 67)
- základ o SHODNÝCH a PODOBNÝCH (s. 80)

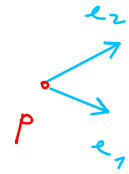
Doplňme

- anal. vyjádření shodných, podobných a ekviafinních v rámci AFINNÍCH (s. 115-116)
- důkladnější rozbor v rámci PROJEKTIVNÍCH (Geometrie 3)



ANAL. VYJÁDRĚNÍ

- a, a' ... afinní prostory + afinní souř. soust. ...



- $f: a \rightarrow a'$ je AFINNÍ

$$\Leftrightarrow f(A + v) = f(A) + \vec{f}(v), \text{ kde } \vec{f}: V \rightarrow V' \text{ je LINEÁRNÍ}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} | \\ | \\ | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | \\ | \\ | \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} | & | & | \\ | & | & | \\ | & | & | \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} | \\ | \\ | \end{bmatrix}$$

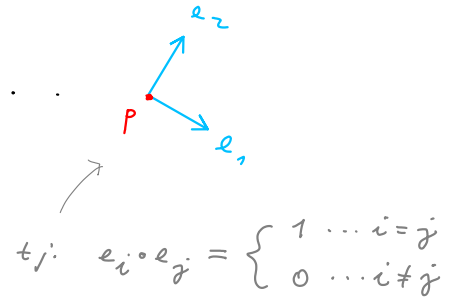
souřadnice obrazu obraz počátku matice lin. zobrazení \vec{f} souřadnice vzoru

- zkráceně $X' = p' + D \cdot X$, přičemž

$$D = \left(e'_1 \mid e'_2 \mid \dots \right)$$

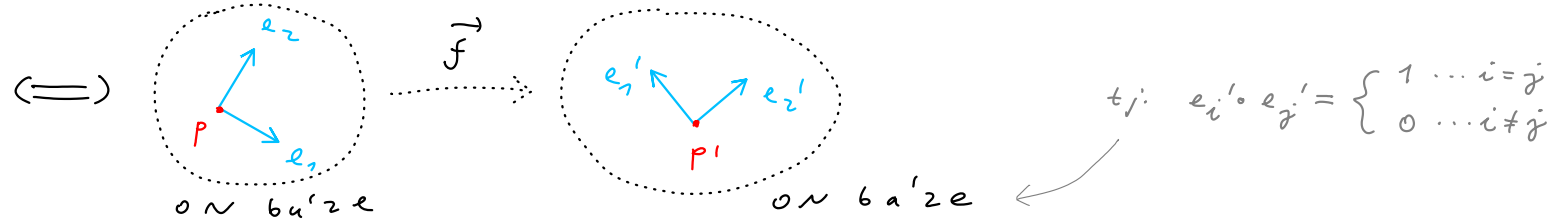
ANAL. VYJÁDRĚNÍ

- $\mathcal{E}, \mathcal{E}' \dots$ eukleid. prostory + KARTÉZSKÉ souř. \dots



- afinní $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ je SHODNĚ

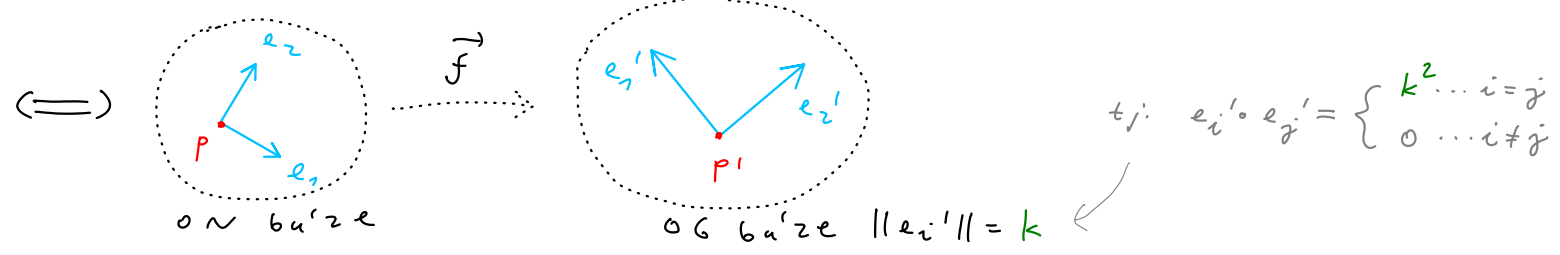
$(\Leftrightarrow) \vec{F}: V \rightarrow V'$ zachovává SKALÁRNÍ SOUČIN



$(\Leftrightarrow) \boxed{D^T \cdot D = E}$ ← t.j. $\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1' & e_2' & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$

- afinní $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ je PODOBNĚ s koeficientem k

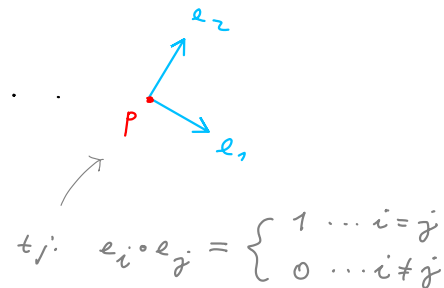
$(\Leftrightarrow) \vec{F}: V \rightarrow V'$ zachovává SKALÁRNÍ SOUČIN až na MĀS O BĚK



$(\Leftrightarrow) \boxed{D^T \cdot D = k^2 E}$ ← t.j. $\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1' & e_2' & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2 & 0 & \dots \\ 0 & k^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$

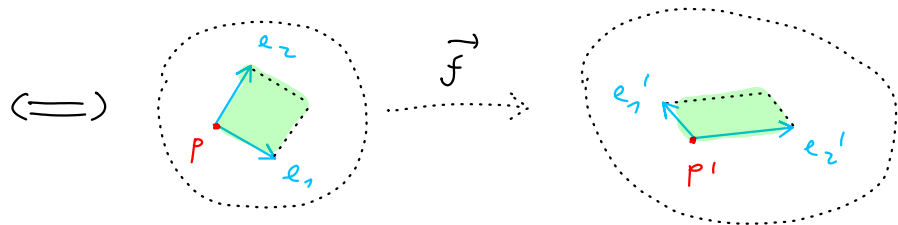
ANAL. VYJÁDRĚNÍ

- $\mathcal{E}, \mathcal{E}' \dots$ eukleid. prostory + KARTÉZSKÉ souř. \dots



- afinní $f: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ je EKUIAFINNÍ

$(\Leftrightarrow) \vec{F}: V \rightarrow V'$ zachovává OBJEMY



$(\Leftrightarrow) \det(D^T \cdot D) = 1$ $\leftarrow \begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1' & e_2' & \dots \end{pmatrix} = \text{GRAMOVA matice} \dots$

- v případě, že $\dim \mathcal{E} = \dim \mathcal{E}'$: \leftarrow tj. matice D čtvercová

$(\Leftrightarrow) \det D = \pm 1$

SHRNUTÍ / VÝHLEDY

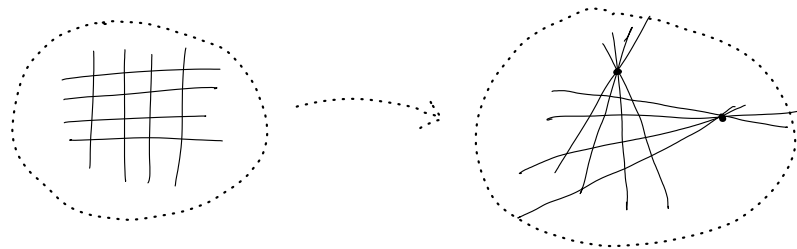
- SHODNÁ, PODOBNÁ, EKUIAFINNÍ zobr. jsou **PROSTÁ**!
- Obecná **AFINNÍ** zobr.,

$$X' = p' + D \cdot X,$$

lze psát pomocí jedné **ROZŠÍŘENÉ** matice takto:

$$\begin{pmatrix} X' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & p' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Do tohoto schématu se vejdou i obecná **PROJEKTIVNÍ** zobr.!



- čeká nás
 - konfrontace geom. a anal. vyjádření
 - rozpoznání ZÁKLADNÍCH zobr.
 - skládání a rozkládání ...

(Geometrie 3)

EUKLEID. GEOMETRIE PŘEHLEDNĚ

- Předchozí věci ...
 - těleso \mathbb{R} \rightsquigarrow vektorový prostor V \rightsquigarrow afinní prostor \mathcal{A}
 - ... doplňujeme o
 - SKALÁRNÍ SOUČIN $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ \rightsquigarrow eukleidovský prostor \mathcal{E}

Úvodní věci

- norma, kolmost, odchylka vektorů
- shodnost úseček, úhlů

Další věci

- vzdálenost, odchylka ob. podpr.
- objemy rovnoběžnostěnů, simplexů, ...
- shodná, podobná, ekviafinní zobr.

Souvislosti

- vzdálenost, odchylka a vzájemné polohy podpr.
- objemy a determinanty
- kolmé průměty a rozklady