Vytváření představ a pojmů v matematice

Pojmotvorný proces

- Žák vstupuje do vyučovacího procesu s naivními poznatky, **prekoncepty**
- **Proces** nebo **koncept** ve výuce matematiky?
- **Paměť** versus **porozumění** ve výuce matematiky

- **Poznávací proces** podle M. Hejného:
  - Motivace ⇨ izolované modely ⇨ generický model procesuální ⇨ generický model konceptuální ⇨ abstraktní poznatek ⇨ krystalizace.
  - V průběhu poznávacího procesu dochází ke dvěma **abstrakčním zdvihům**: mezi izolovaným modelem a generickým modelem dochází ke **zobecnění**, mezi generickým modelem a abstraktním poznatkem dochází k **abstrakci**.
  - Umělé urychlování poznávacího procesu

- Vhodnou **motivací** do výuky je pocit úspěchu, zadávání přiměřených úloh, individualizace výuky.
- **Izolovaný model** je konkrétní případ příští znalosti.
- V průběhu fáze izolovaných modelů dochází k tomu, že si žáci všímají souvislostí a ty potom odhalí.
- **Generický model** vzniká procesem zobecnění z komunity izolovaných modelů. **Procesuální generický model** je návod, jak proces pokračuje dále. **Konceptuální generický model** je obecná zákonitost.
- **Abstraktní poznatek** je ve školské matematice potřebný např. tehdy, když dochází ke změně obecného čísla na písmeno.
- **Poznatek, znalost, formální poznatek**

- Z hlediska pojmotvorného procesu rozlišujeme **instruktivní (transmisivní)** a **konstruktivistické přístupy** ve výuce matematice.
  - Při využívání **instruktivního přístupu** je v hodině hlavní učitel, předává žákům hotové poznatky. Je upřednostňováno pamětné učení bez porozumění, dochází často k formalizmu.
  - Při využívání **konstruktivistických přístupů** ve výuce je hlavní žák, učitel pokládáním vhodných otázek či zadáváním zajímavých úloh umožňuje žákům objevovat nové poznatky.

Zavádění pojmů ve školské matematice

- Obrázkem
- Pomocí procesu
- Pomocí izolovaných modelů
- Pomocí obecného pravidla
- Slovně (definicí)

Matematické věty ve školské matematice

- Matematické věty se ve školské matematice objevují ve formě neoblíbených „pouček“ nebo pravidel v rámečku. Většinou je vyslovena poučka a ta se pak procvičuje na příkladech.
- Věty na základní škole obvykle nejsou dokazovány. Výjimku tvoří některé geometrické důkazy, které vedeme pomocí obrázku – tzv. **důkaz beze slov**. Tvrzení by však měla být ověřována.

Zavádění pojmů v matematice

- **Pojem** chápeme jako jednu z forem vědeckého poznání, která odráží podstatné vlastnosti zkoumaných objektů a vztahů.
- Každý pojem má určitý **obsah** a **rozsah**. **Obsah pojmu** je souhrn všech znaků, které jsou pro daný pojem charakteristické. **Rozsah pojmu** je množina všech objektů, které mají vlastnosti stanovené obsahem.

- Rozlišujeme pojmy **konkrétní a abstraktní**.
- Pojmy vytváříme v určitém systému. Pro přehlednost provádíme **klasifikace (třídění) pojmů**. Klasifikace pojmů musí splňovat všechny atributy rozkladu množiny na třídy:
  - Třídění je nutno provádět vždy podle téhož znaku.
  - Třídění musí být vyčerpávající a úplné – musí zahrnovat všechny prvky příslušné množiny (rozsahu pojmu).
  - Jednotlivé třídy musí být navzájem disjunktní – každý prvek tříděné množiny je zařazen právě do jedné třídy.

- **Základní pojmy** (např. Eukleidovy definice základních pojmů)
- **Axiomy** – tvrzení, která se předem považují za pravdivá a nedokazují se (např. Eukleidovy axiomy, axiomatická teorie aritmetiky)
- **Matematická definice** je ekvivalence, na jejíž jedné straně je nový pojem a na druhé straně jsou pojmy dříve známé (Slovník školské matematiky, 1981). Ve školské matematice se nejčastěji vyskytují definice **nominální** a **konstruktivní**.

- Chybné definice:
- **Definice nadbytečná** – obsahuje více znaků definovaného pojmu, než je nutné.
- **Definice široká** – obsahuje méně znaků, než je potřeba k definování pojmu.
- **Definice úzká** – obsahuje více znaků, než je potřeba k definování pojmu.
- **Definice kruhem** – první pojem se definuje pomocí pojmu druhého a vzápětí se druhý pojem definuje pomocí pojmu prvního.
- **Definice tautologií** – pojem se definuje pomocí sebe sama, i když v jiném vyjádření.

Matematická věta

- Matematickou větou rozumíme pravdivý výrok s konkrétním matematickým obsahem. Většina vět má tvar implikace, pokud platí implikace v obou směrech, je věta uvedena jako ekvivalence.
- Pro jednu proměnnou můžeme matematickou větu zapsat symbolicky jako

$$(\forall x \in D)[A(X) \Rightarrow B(X)]$$

kde D je definiční obor výrokových forem, $A(x)$ se nazývá **předpoklad** a $B(x)$ **tvrzení** a říkáme, že věta je v podmínkovém tvaru. Každá věta má mít jasně vyslovený předpoklad.

- Důkazy matematických vět:
  - Důkaz přímý: Přímý důkaz věty $A(x) \Rightarrow B(x)$ spočívá v tom, že vycházíme z toho, že předpoklad platí a vytvoříme řetězec implikací, které na sebe navazují.
  - Důkaz nepřímý: místo věty $A(x) \Rightarrow B(x)$ dokážeme větu obměněnou $B'(x) \Rightarrow A'(x)$
  - Důkaz sporem: Důkaz sporem je založen na skutečnosti, že nemůže platit současně nějaká věta a zároveň její negace. Předpokládáme, že věta $A(x) \Rightarrow B(x)$ neplatí, že platí její negace $(A(x) \Rightarrow B(x))'$
  - Důkaz matematickou indukcí: Podkladem důkazu matematickou indukcí je jeden z Peanových axiomů aritmetiky přirozených čísel

Možnosti dalšího studia:

- Hejný, M., Stehlíková, N.: *Číselné představy dětí*. Pedagogická fakulta, Praha, 1999
- Hejný, M., Kuřina, F.: *Dítě, škola a matematika. Konstruktivistické přístupy k vyučování*. Praha: Portál, 2009
- Ženatá, E.: *Přehled učiva matematiky pro 6. – 9. ročník a odpovídající ročníky víceletých gymnázií s příklady a řešením.* Blug