KRUŽNICE, KRUH

Irena Budínová

1. Vývoj pojmů

Děti se od malička v běžném životě setkávají s předměty, na kterých se vyskytují kruhy a kružnice. Nejprve vše zahrnují pod pojem „kulaté“, později začínají diferencovat, nejprve na předměty prostorové (koule, válec, kužel) a rovinné (kruh, kružnice) a až ve školním věku pak diferencují mezi jednotlivými pojmy v rovině i v prostoru.

2. Reprezentace pojmů kružnice a kruh v běžném životě

Tvar kružnice má např. prstýnek, obruč,

Tvar kruhu má např. dopravní značka zákazová, dno hrnce nebo kastrolu, podstava válce.

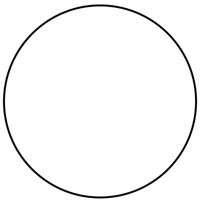
3. Základní pojmy

K definici kružnice a kruhu můžeme přistupovat dvěma způsoby:

a) využijeme shodnosti:

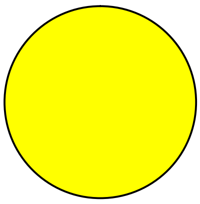
Je dán bod S a úsečka AB. Kružnicí *k* nazýváme množinu všech bodů X v rovině, pro které platí, že úsečka SX je shodná s úsečkou AB.

Symbolický zápis: $k = \{X \in \rho,\ SX \cong AB\}$



Je dán bod S a úsečka AB. Kruhem *K* nazýváme množinu všech bodů X v rovině, pro které platí, že bod X je bodem úsečky SY a úsečka SY je shodná s úsečkou AB.

Symbolicky: $K = \{X \in \rho,\ X \in SY \wedge SY \cong AB\}$.



b) využijeme pojmu vzdálenosti

Je dán bod S a nezáporné číslo r. Kružnicí *k* rozumíme množinu všech bodů X v rovině, pro které platí, že mají os bodu S vzdálenost r.

Symbolicky: $k = \{X \in \rho,\ |SX| = r\}$.

Je dán bod S a nezáporné číslo r. Kruhem *K* rozumíme množinu všech bodů X v rovině, které mají od bodu S vzdálenost menší nebo rovnu r.

Symbolicky: $K = \{X \in \rho,\ |SX| \leq r\}$.

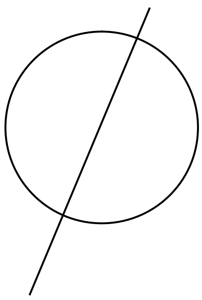
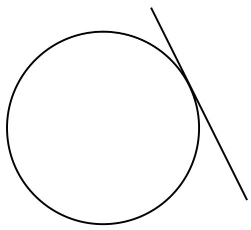
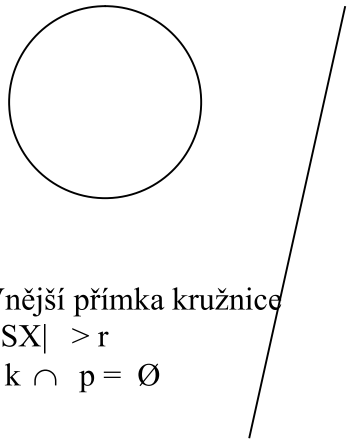
Bod S se nazývá střed kružnice nebo kruhu
Poloměr kružnice (kruhu) je úsečka, jejímiž krajními body jsou bod S a libovolný bod kružnice. Je to také velikost této úsečky (r = 3 cm). Označuje se písmenem r (radius)
Průměrem kružnice (kruhu) rozumíme úsečku, která prochází středem kružnice (kruhu) a jejímiž krajními body jsou dva různé body kružnice. Je to také velikost této úsečky. Označuje se písmenem d (diametr)
Platí: $d = 2r$.

4. Rýsování kružnic

Nejprve je nutné, aby žáci zvládli techniku práce s kružítkem. Je vhodné aby:

a) rýsovali kružnice zcela libovolně
b) rýsovali obrázky pomocí kružnic (kytičky, terče, sněhuláky, housenky aj.)
c) rýsovali kružnice s daným středem
d) rýsovali kružnice s daným středem a daným poloměrem
e) rýsovali kružnice, které mají daný střed a procházejí daným bodem.

5. Vzájemná poloha kružnice a přímky

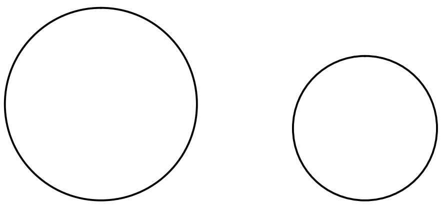
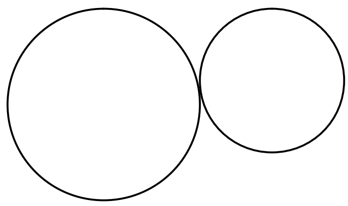
Sečna
$|SX| < r$
$k \cap p = \{A, B\}$

Tečna
$|SX| = r$
$k \cap p = \{T\}$

Vnější přímka kružnice
$|SX| > r$
$k \cap p = \emptyset$

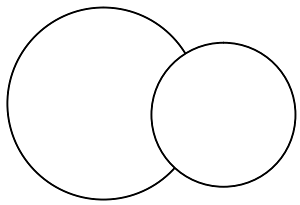
Průnikem kruhu a přímky je úsečka, nazývá se tětiva.

6. Vzájemná poloha dvou kružnic

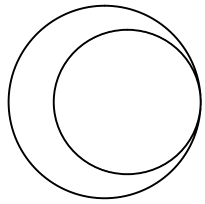



Kružnice nemají společný bod.
Vzdálenost jejich středů je větší než součet poloměrů obou kružnic.

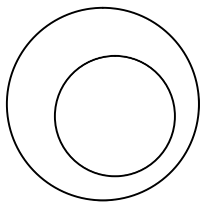
Kružnice se dotýkají vnějším dotykem.
Vzdálenost jejich středů je rovna součtu poloměrů obou kružnic.



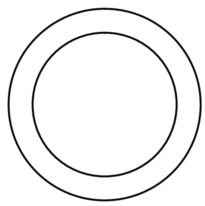
Kružnice se protínají, mají společné dva body.
Vzdálenost jejich středů je menší než součet poloměrů, ale větší než jejich rozdíl.



Kružnice se dotýkají uvnitř.
Vzdálenost jejich středů je rovna rozdílu poloměrů (v absolutní hodnotě).



Jedna kružnice leží ve vnitřní oblasti druhé kružnice.
Vzdálenost jejich středů je větší než 0 a menší než absolutní hodnota rozdílu poloměrů.



Soustředné kružnice. Středy obou kružnic splývají.

7. Obvod a obsah kruhu

(Pozn. - terminologie: obvod kruhu, délka kružnice)

Určit obvod kruhu byl velký problém, protože poměr mezi obvodem kruhu a poloměrem je iracionální číslo. Touto problematikou se zabýval Archimédes, který kružnici vepisoval a opisoval n-úhelníky a počítal jejich obvody a obsahy. Dostal se až k n=96.

Dnes víme, že $\boldsymbol{o=2\pi r}$ a $\boldsymbol{S=\pi r^2}$ a číslo pí je poměr mezi obvodem kružnice a jejím průměrem.

Manipulativní činnost na základní škole: Užíváme experimentu, který nám umožní přibližně zjistit obsah kruhu. Kruh rozdělíme na 16 shodných kruhových výsečí (nebo 32, čím víc, tím přesnější). Rozstříháme, výseče poskládáme do obrazce, jehož tvar připomíná rovnoběžník. Výška tohoto rovnoběžníku má délku poloměru původní kružnice, jednu stranu si žáci změří (zjistí, že je přibližně rovna o/2). Číslo o/2.r je přibližně rovno obsahu kruhu.

Obvod kruhu: Žáci k obvodu přikládají provázek, měří, počítají poměr obvodu k průměru kruhu – při pečlivé práci vychází přibližně 3,14. Tato manipulativní činnost může být důležitá v tom, že si žáci uvědomí, že poměr obvodu a průměru kruhu je pro všechny kruhy konstantní číslo.

Integrální počet umožňuje přesný výpočet obsahu a obvodu, volíme parametrické vyjádření.

8. Věty o úhlech kružnice

Středový úhel: Je dána kružnice k se středem S a oblouk ACB. Všechny polopřímky SX, kde X protíná oblouk ACB, vyplní úhel, který se nazývá **středový úhel nad obloukem ACB.**

Obvodový úhel: Je dán oblouk ACB kružnice k. Na kružnici zvolíme bod M, který nenáleží danému oblouku. Všechny polopřímky MX, kde X protíná oblouk ACB, vyplní konvexní úhel, který se nazývá **obvodový úhel** nad obloukem ACB.

Oblouk kružnice – průnik kružnice a poloroviny určené sečnou kružnice a dalším bodem kružnice.

Každému oblouku přísluší jeden středový úhel, ale nekonečně mnoho obvodových úhlů. Středový úhel je ostrý pro menší oblouk, pravý pro polokružnici, tupý pro větší oblouk.

Věta 1 (základní věta o obvodových úhlech): Velikost středového úhlu nad obloukem je rovna dvojnásobku velikosti obvodového úhlu nad týmž obloukem.

Důkaz: rozděleně – a) nad menším obloukem, b) oblouk je polokružnice, c) nad větším obloukem.

Důsledek: Všechny obvodové úhly nad týmž obloukem jsou shodné.

Thaletova věta: Všechny obvodové úhly nad průměrem kružnice jsou pravé. (Thales Milétský, řecký filosof a matematik, 6. stol. př. n. l.)

Úsekový úhel: Je dána kružnice k a oblouk ACB. Sestrojíme tečny t, u kružnice k v bodech A, B. Tečna t svírá s polopřímkou AB dva vedlejší úhly, tečna u rovněž. Z každé dvojice vybereme úhel, který leží v polorovině ABC. Tyto úhly se nazývají **úsekové**.

Věta 2: Všechny obvodové úhly nad týmž obloukem jsou shodné s úsekovým úhlem nad týmž obloukem.