CELÁ ČÍSLA, RACIONÁLNÍ ČÍSLA

Jana Veseláková

CELÁ ČÍSLA VE ŠKOLSKÉ MATEMATICE

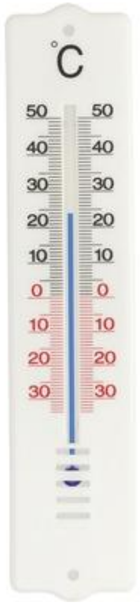
Numerace:
1. Představa záporného čísla
2. Čtení a zápis celých čísel
3. Znázornění celého čísla na číselné ose
4. Číslo kladné, číslo záporné, číslo 0
5. Číslo opačné k danému číslu
6. Absolutní hodnota celého čísla
7. Porovnávání celých čísel

CELÁ ČÍSLA VE ŠKOLSKÉ MATEMATICE

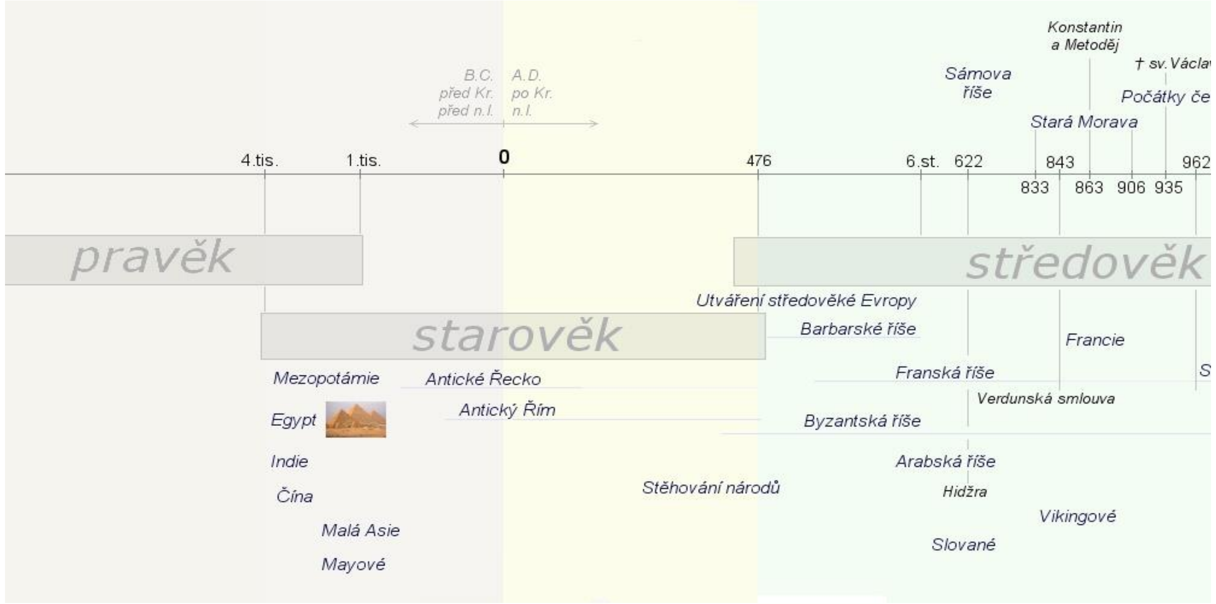
Operace:
8. Sčítání celých čísel
9. Odčítání celých čísel
10. Násobení celých čísel
11. Dělení celých čísel

Představa celého čísla

- dluhy
- výtah (patra)
- hloubka pod hladinou moře



Zdroj:www.hornbach.cz



zdroj: www.dejepis.com

Celá čísla

Záporná čísla

Nula

Kladná čísla

Celá čísla - zavedení

- zavedení celých čísel - jedna z nejnáročnějších myšlenkových činností
- vyvarujeme se formalismu! ("mínus")

U žáků respektujeme ty modely, kterým rozumí.

Ze sémantických modelů nabízíme záporné číslo ve významu:
- Adresy (například teploměr, výtah, číselná osa)
- Veličiny (například teplota, finanční model, dluhy)
- Operátora (odchylka od aritmetického průměru)

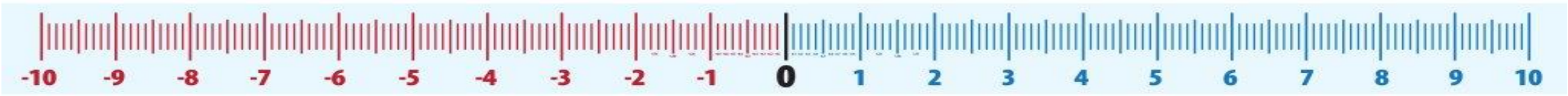
U žáků respektujeme ty modely, kterým rozumí.

Ze strukturálních modelů můžeme uvést výsledek odčítání většího čísla od menšího.

Čtení a zápis celých čísel

Znázornění celého čísla na číselné ose

- Obrazem čísla na číselné ose je bod, ne úsečka!!!



zdroj: www.maxiskola.cz

Číslo opačné k danému číslu

Ke každému celému číslu a existuje takové celé číslo $(-a)$, že platí $a + (-a) = 0$.
Čísla a a $(-a)$ se nazývají **čísla navzájem opačná**.

Číslo opačné k danému číslu

Opačné číslo ke kladnému číslu je číslo záporné.
Opačné číslo k zápornému číslu je číslo kladné.
Opačné číslo k číslu nula je nula.

Absolutní hodnota celého čísla

Absolutní hodnota celého čísla a je celé číslo, pro které platí:

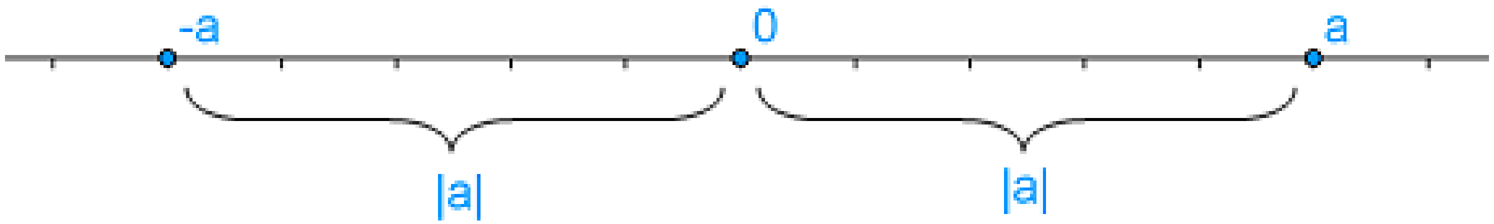
$$a > 0 \Rightarrow |a| = a$$

$$a = 0 \Rightarrow |a| = 0$$

$$a < 0 \Rightarrow |a| = -a$$

Absolutní hodnota celého čísla

- Geometrický význam absolutní hodnoty: Absolutní hodnota každého celého čísla je rovna vzdálenosti od nuly.



Zdroj: www2.karlin.mff.cuni.cz

Porovnávání celých čísel

- Vychází z porovnávání čísel přirozených a rozšiřuje se na čísla záporná.

K porovnávání celých čísel využíváme

1) číselnou osu:

Ze dvou čísel znázorněných na číselné ose je větší číslo znázorněno více vpravo.

K porovnávání celých čísel využíváme

2) absolutní hodnotu celého čísla:

Ze dvou záporných čísel je větší to, které má menší absolutní hodnotu.

Každé kladné číslo je větší než nula.
Každé kladné číslo je větší než číslo záporné.
Každé záporné číslo je menší než nula.
Každé záporné číslo je menší než číslo kladné

Problémy

- 2 < - 7,   - 8 > - 1

- porovnávání na číselné ose (větší číslo má větší vzdálenost od nuly - chybné)

- nápravná cvičení

$$7 < 12, \qquad 24 > 15, \qquad 1 < 4$$
$$0 < 8, \qquad -5 < 0$$
$$-9 < -5, \qquad -5 > -10$$

Problémy při provádění operací s celými čísly se jednak odvíjejí od problémů vyplývajících z operací s přirozenými čísly a navíc se objevují problémy se znaménkem „minus“.

Sčítání celých čísel

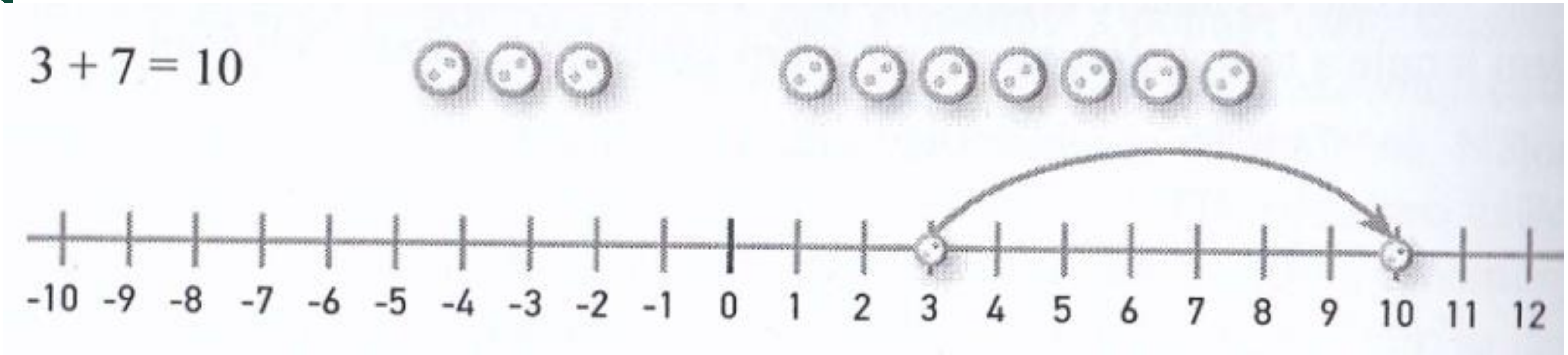
Navazujeme na sčítání čísel přirozených a postupně volíme čísla záporná tak, aby oba sčítanci byli buď stejné parity nebo různé.

Sčítání celých čísel

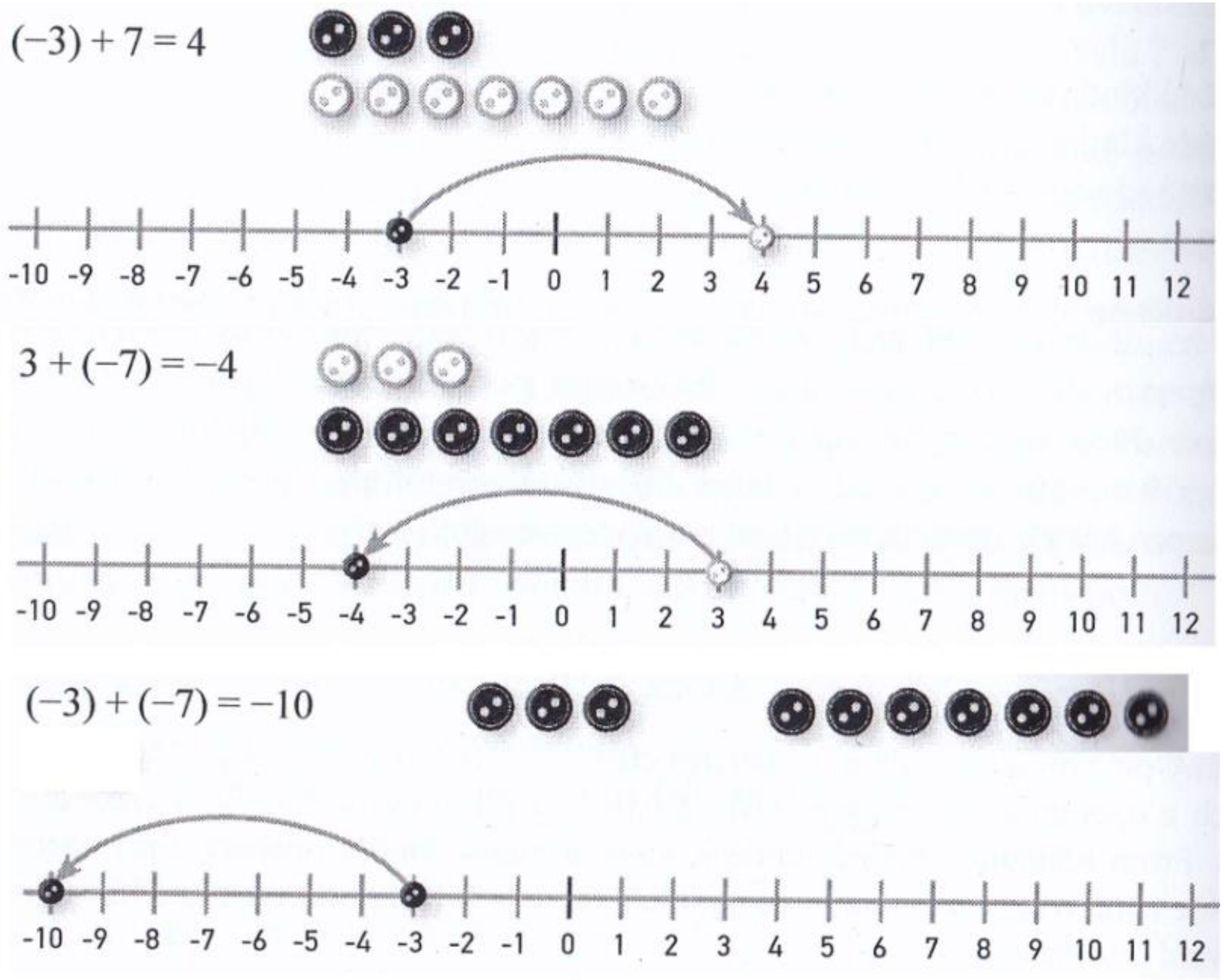
Přitom využíváme tyto skutečnosti:
a) Součet čísla a čísla k němu opačného je roven nule.

b) Při znázorňování sčítání na číselné ose se pohybujeme tak, že když přičítáme číslo kladné, pohybujeme se doprava, když přičítáme číslo záporné, pohybujeme se doleva.

Sčítání celých čísel



Sčítání celých čísel

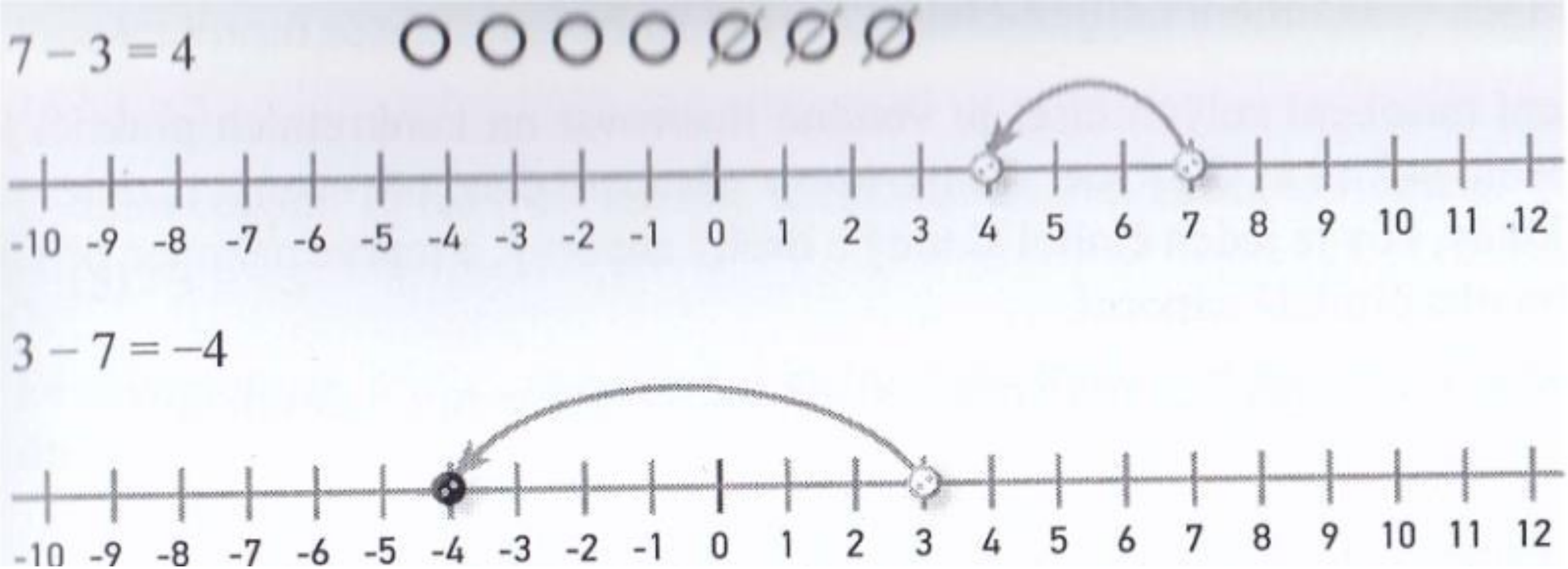


Odčítání celých čísel

- vycházíme opět z čísel přirozených a postupujeme k číslům záporným
- volíme všechny možnosti znamének menšence i menšitele

Odčítání celých čísel

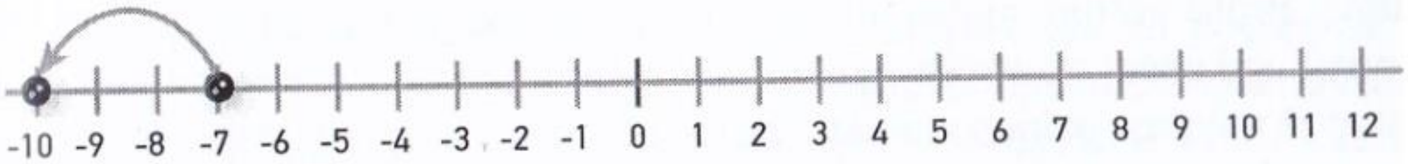
Některé příklady je možné znázornit pomocí knoflíků, některé jen na číselné ose.



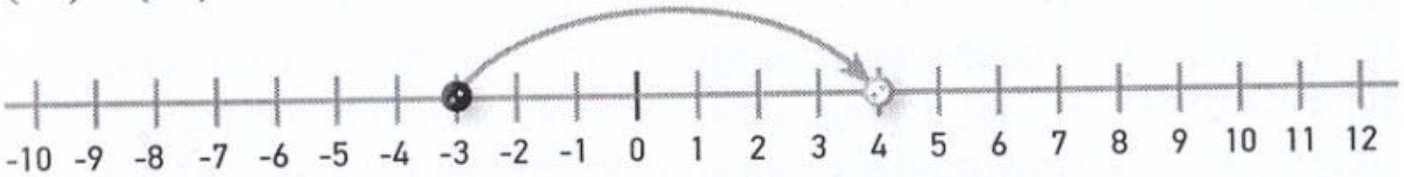
Odčítání celých čísel

$(-3) - 7 = -10$

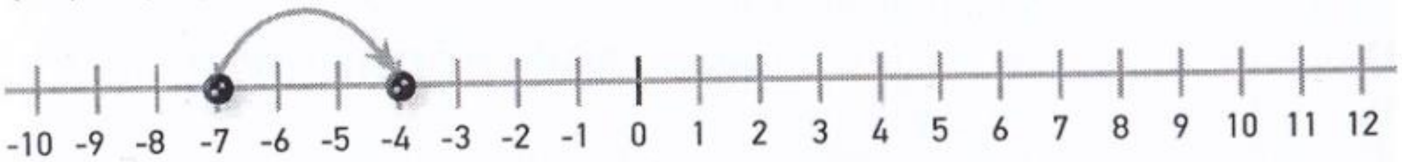
$(-7) - 3 = -10$



$(-3) - (-7) = 4$



$(-7) - (-3) = -4$



Je vhodné poukázat na souvislosti sčítání a odčítání celých čísel a se žáky vyvodit, že odčítat celé číslo znamená přičítat číslo opačné, jak ukazují následující příklady:

$3 + 7 = 10$	$\mathbf{3 - (-7) = 10}$	$\mathbf{(-7) - (-3) = 10}$
$3 + (-7) = -4$	$3 - 7 = -4$	
$(-7) + 3 = -4$	$\mathbf{(-7) - (-3) = -4}$	
$(-3) + 7 = 4$	$\mathbf{(-3) - (-7) = 4}$	$7 - 3 = 4$
$(-3) + (-7) = -10$	$(-3) - 7 = -10$	
$(-7) + (-3) = -10$	$(-7) - 3 = -10$	

Násobení celých čísel

- vycházíme z násobení čísel přirozených
- volíme příklady, kdy je jeden činitel kladný a druhý záporný a teprve nakonec příklad, kdy jsou oba činitelé záporní

Násobení celých čísel

Vyvození pomocí sčítání celých čísel:

a) $\mathbf{3 \,.\, 5} = 5 + 5 + 5 = 15$

b) $\mathbf{3 \,.\, (-5)} = (-5) + (-5) + (-5) = -15$

c) $\mathbf{(-3) \,.\, 5} = 5 \,.\, (-3) = (-3) + (-3) + (-3) + (-3) + (-3) = -15$

d) $\mathbf{(-3) \,.\, (-5)} = ?$

Vyvození pomocí ilustrace na konkrétních praktických příkladech:

a) Každému ze tří žáků dám 5 korun. Kolik korun budou mít dohromady?
$3 \cdot 5 = 15$

b) Od každého ze tří žáků si vypůjčím 5 Kč. Kolik Kč budu dlužit?
$3 \cdot (-5) = -15$

c) Vypůjčil jsem si tři koruny od pěti žáků. Jaký je můj dluh?
$(-3) \cdot 5 = -15$

d) $(-3) \cdot (-5) = 15$ volíme matematický přístup

- Vyvození výsledku příkladu (–3) · (–5) můžeme pomocí užití
  1. Funkčního myšlení
  (–3) · (5) = –15
  (–3) · (4) = –12
  (–3) · (3) = –9
  (–3) · (2) = –6
  (–3) · (1) = –3
  (–3) · (0) = 0
  (–3) · (–1) = 3
  (–3) · (–2) = 6
  (–3) · (–3) = 9
  (–3) · (–4) = 12
  (–3) · (–5) = 15

2. Distributivnosti násobení vzhledem ke sčítání

$(-3) \cdot 0 = 0$

$(-3) \cdot (5 + (-5)) = 0$

$(-3) \cdot (5) + (-3) \cdot (-5) = 0$

$-15 + 15 = 0$

$0 = 5 + (-5)$

$(-3) \cdot (-5) = 15$

3. Násobení čísla 1 a (–1)

$3 \cdot 1 = 3$

$3 \cdot (-1) = -3$

$(-3) \cdot 1 = -3$

$(-3) \cdot (-1) = 3$

4. Chyby

Napsat příklady s chybami a žáci mají přijít na to, co je dobře, sami si to vyvodí.

$3 \cdot 5 = 15$

$(–3) \cdot 5 = –15$

$(–3) \cdot (–5) = –15$

$3 \cdot (–5) = 15$

$(–3) \cdot (–5) = 15$ $5 = 15$

$(–3) \cdot 5 = –15$

$(–3) \cdot (–5) = –15$

$3 \cdot (–5) = 15$

$(–3) \cdot (–5) = 15$

Při součinu dvou celých čísel platí:

Pokud mají činitelé stejné znaménko, součin je kladný.
Pokud mají činitelé různá znaménka, součin je záporný.

Tato skutečnost se zobecňuje pro součin více činitelů:

Pokud je počet záporných činitelů sudý, součin je kladný.
Pokud je počet záporných činitelů lichý, součin je záporný

Dělení celých čísel

- Analogicky jako násobení celých čísel vyvozujeme dělení.
- Můžeme volit konkrétní aplikační příklady nebo využít souvislosti násobení a dělení.

Dělení celých čísel

- a) Patnáct korun rozdělím mezi tři žáky. Kolik korun bude mít každý žák?
  15 : 3 = 5
  b) Dlužím celkem 15 Kč třem žákům. Kolik Kč dlužím každému z nich?
  (–15) : 3 = –5
  c) Dlužím celkem 15 Kč, Půjčoval jsem si po třech korunách. Kolika žákům dlužím?
  (–15) : (–3) = 5
  d) Příklad 15 : (– 3) = –5 nemá vhodnou praktickou aplikaci, takže můžeme využít souvislosti násobení a dělení.
  Jestliže platí (– 3) · (–5) = 15, pak 15 : (–3) = –5 a 15 : (–5) = –3

- Neomezujeme se jen na pamětné uplatňování pouček !!

Závěr

- Pochopení pojmu záporné číslo vyžaduje mnoho reprezentací, které žáka osloví.
- Využíváme mezipředmětovost (zeměpis, dějepis, apod.).
- Správné pochopení -> snadnější práce v dalších tématech (úprava algebraických výrazů a řešení rovnic).

Racionální čísla

Racionální čísla jsou taková čísla, která lze zapsat ve tvaru zlomku $\frac{a}{b}$, kde čísla a a b jsou celá a $b \neq 0$.

(*Poznámka:* V učebnicích se uvádí, že a je celé a b je přirozené, tím se však vyloučí zlomky typu $\frac{-6}{-10}$).

Jsou to např. čísla: $\frac{5}{9}$, 7, 0,4, $\frac{65}{13}$, 0, -19, $\frac{-4}{5}$, atd.

Platí tedy, že:

Každé přirozené číslo je číslo racionální.

Každé celé číslo je číslo racionální.

Každý zlomek je číslo racionální.

- název racionální je odvozen z latinského slova *ratio* (*racio*), které má více významů, ale také znamená rozum

Literatura - pro samostudium

- Blažková. R. (2017). Didaktika matematiky se zaměřením na specifické poruchy učení. Brno: Masarykova univerzita.

- Blažková, R. Racionální čísla (studijní text). Brno: PdF MU. Dostupné z https://is.muni.cz/el/1441/podzim2008/MA2MP_PDM1/um/raccislo.pdf.

- Hejný, M. (2004). Záporná čísla. In Hejný, M., Novotná, J., Stehlíková, N. (Eds.), Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky. Praha: Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta, 2004, 327–342.
  Dostupné z http://mdisk.pedf.cuni.cz/SUMA/MaterialyKeStazeni/PublikaceKnihy/25KapitolZDM.pdf

Literatura

Blažková, R. (2006). Didaktika matematiky I. Přednášky.

Pavlíčková, L. (2020). Interaktivní osnova k předmětu Didaktika matematiky 1. Brno.