

Dělitelnost

Jana Veseláková

Školská matematika

1. **Násobek a dělitel přirozeného čísla**
2. **Kritéria dělitelnosti**
3. **Prvočíslo, číslo složené**
4. **Společný dělitel (největší společný dělitel)**
5. **Společný násobek (nejmenší společný násobek)**

1. Násobek a dělitel čísla

Číslo b je dělitelem čísla a (číslo a je násobkem čísla b), právě když existuje přirozené číslo k takové,

že $a = k \cdot b$.

Znázornění násobku přirozeného čísla - pomůcky

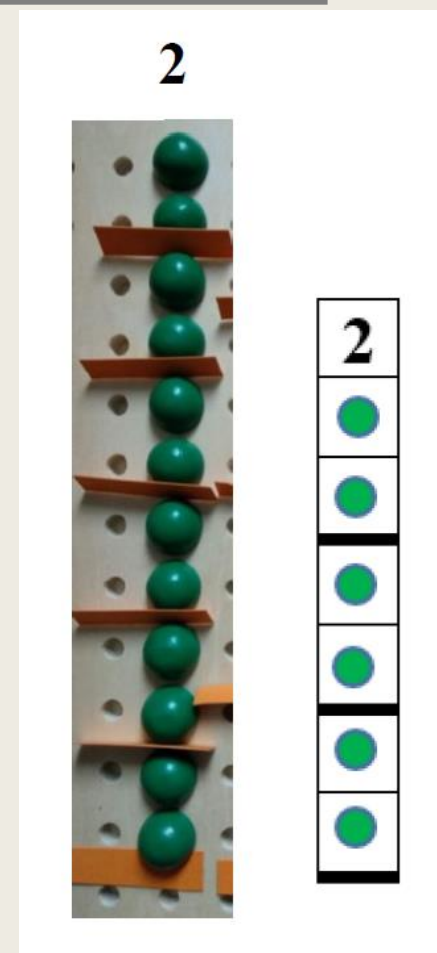
Čtverečkovaný papír (kolíčkové tabulky)

Kruhové schéma

Násobkové mandaly

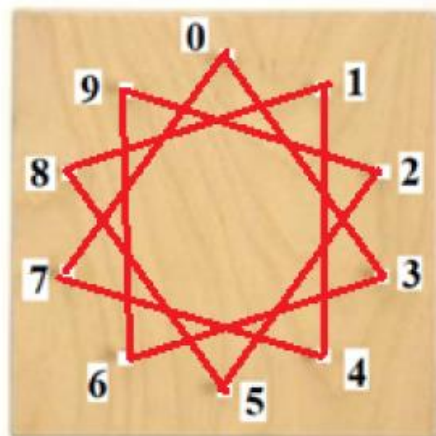
Stovkové tabulky

Násobkové tabulky



Znázornění násobku přirozeného čísla - pomůcky

Číselné hvězdy

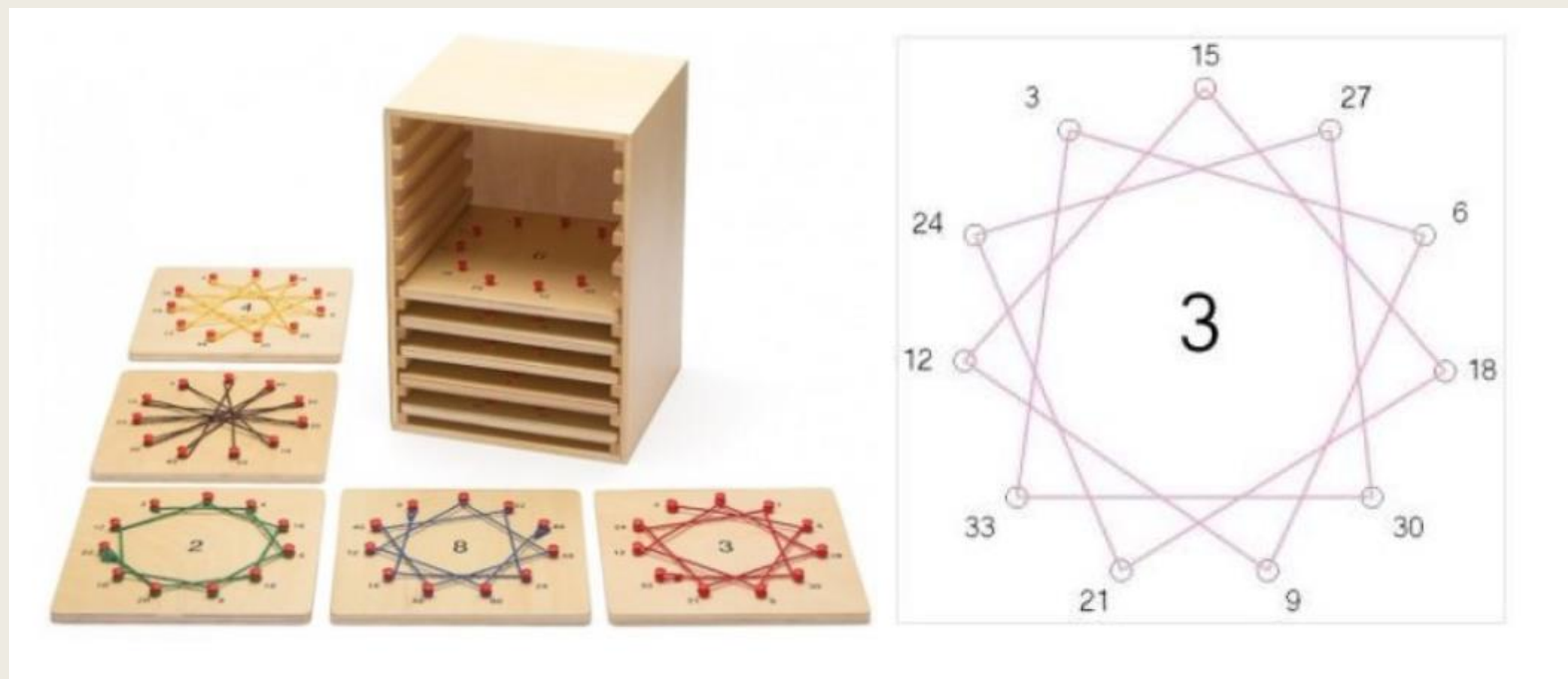


7	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70

zdroj: Pavlíčková, 2020. Interaktivní osnova k předmětu Didaktika matematiky 1

Znázornění násobku přirozeného čísla - pomůcky

Násobkové hvězdy



Znázornění násobku přirozeného čísla - pomůcky

Stovkové tabulky

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

						7			
			14						
21							28		
				35					
	42							49	
					56				
		63							70
						77			
			84						
91							98		

Znázornění násobku přirozeného čísla - pomůcky

Násobkové tabulky

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2									
3									
4									
5									
6									
7									
8									
9									
10									

Znázornění násobku přirozeného čísla - pomůcky

Násobkové tabulky - pracovní list

$0 \cdot 2 = 0$	$0 \cdot 3 =$	$0 \cdot 4 =$		
$1 \cdot 2 = 2$	$1 \cdot 3 =$	$1 \cdot 4 =$		
$2 \cdot 2 = 4$	$2 \cdot 3 =$	$2 \cdot 4 =$		
$3 \cdot 2 = 6$	$3 \cdot 3 =$	$3 \cdot 4 =$		
$4 \cdot 2 = 8$	$4 \cdot 3 =$	$4 \cdot 4 =$		
$5 \cdot 2 = 10$	$5 \cdot 3 =$	$5 \cdot 4 =$		
$6 \cdot 2 = 12$	$6 \cdot 3 =$	$6 \cdot 4 =$		
$7 \cdot 2 = 14$	$7 \cdot 3 =$	$7 \cdot 4 =$		
$8 \cdot 2 = 16$	$8 \cdot 3 =$	$8 \cdot 4 =$		
$9 \cdot 2 = 18$	$9 \cdot 3 =$	$9 \cdot 4 =$		
$10 \cdot 2 = 20$	$10 \cdot 3 =$	$10 \cdot 4 =$		

Dělitel přirozeného čísla - pomůcky

Čtverečkovaný papír

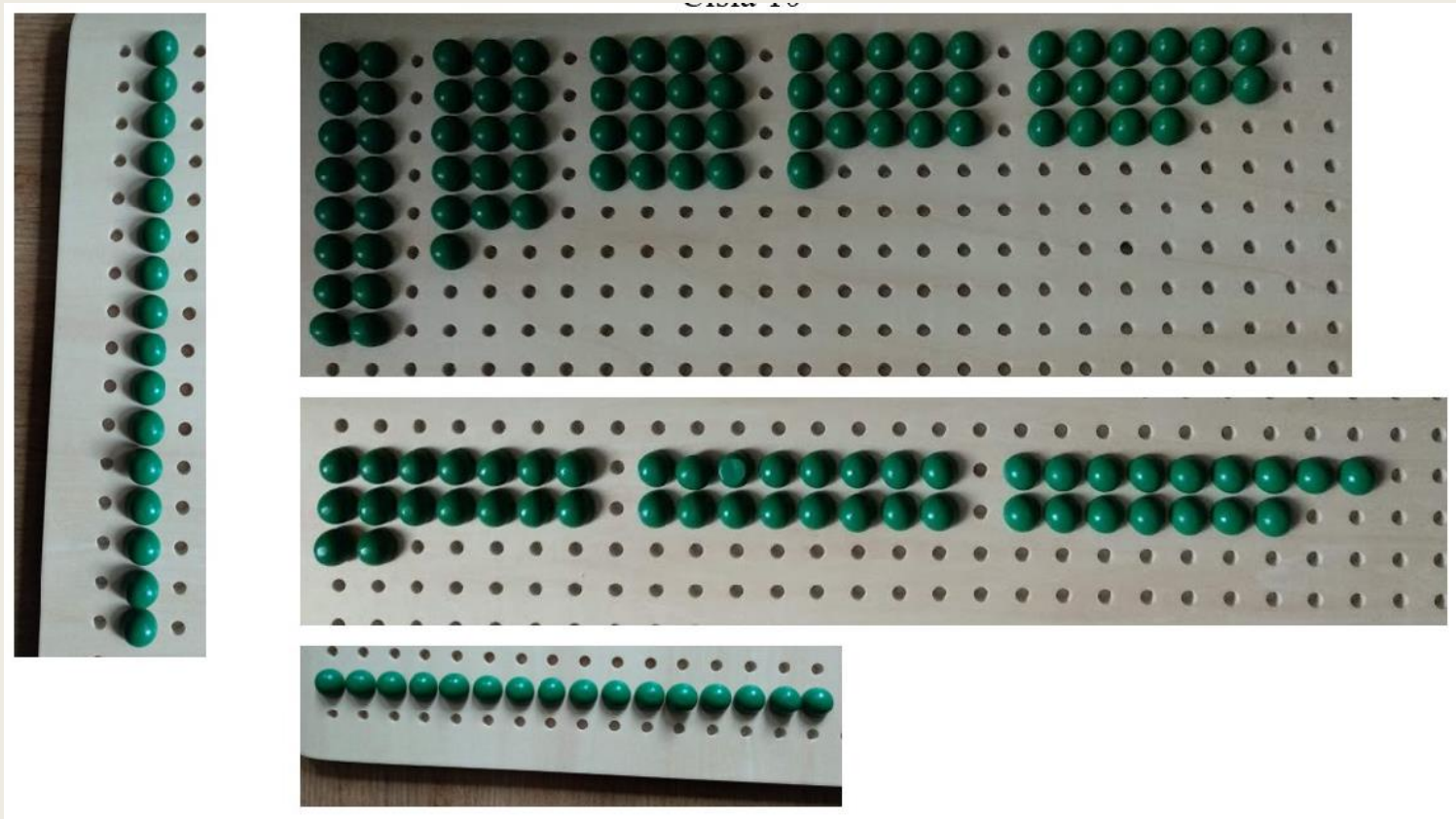
Kolíčkové tabulky

Montessori stovkový koberec

Dělitel přirozeného čísla - pomůcky

Čtverečkovaný papír

Kolíčkové tabulky



Dělitel přirozeného čísla - pomůcky

Montessori stovkový koberec



2. Kritéria dělitelnosti

Věta: $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|(b + c)$

Důkaz: $a|b \Rightarrow b = a \cdot x$

$$a|c \Rightarrow c = a \cdot y$$

$$b + c = ax + ay = a(x + y) \Rightarrow a|(b + c)$$

Věty o dělitelnosti se na základní škole nedokazují, ale ověřují se na konkrétních číslech.

Jak?

Jaké věty dělitelnosti se uvádí žákům na základní škole?

Dělitelnost čísla 2, 5, 10

Věta (znaky dělitelnosti dvěma): Číslo je dělitelné dvěma, jestliže má na místě jednotek některou z číslic 0, 2, 4, 6, nebo 8.

Dělitelnost čísla 2, 5, 10

Věta (znaky dělitelnosti pěti): Číslo je dělitelné pěti, jestliže má na místě jednotek číslici 0 nebo 5.

Dělitelnost čísla 2, 5, 10

Věta (znaky dělitelnosti deseti): Číslo je dělitelné deseti, jestliže má na místě jednotek nulu.

Dělitelnost čísla 3, 9

Věta: Přirozené číslo je dělitelné třemi, jestliže jeho ciferný součet je dělitelný třemi.

Věta: Přirozené číslo je dělitelné devíti, jestliže jeho ciferný součet je dělitelný devíti.

Dělitelnost čísla 4, 8

Věta: Přirozené číslo je dělitelné čtyřmi, jestliže jeho poslední dvojčíslí čísla je dělitelné čtyřmi.

Věta: Přirozené číslo je dělitelné osmi, jestliže jeho poslední trojčíslí je dělitelné osmi.

Definice sudého čísla: Přirozené číslo, které je dělitelné dvěma, je sudé.

Navíc

Přirozené číslo je dělitelné šesti, jestliže je dělitelné dvěma a zároveň třemi.

Přirozené číslo je dělitelné dvanácti, jestliže je dělitelné třemi a zároveň čtyřmi

Navíc navíc...

Věta: Přirozené číslo je dělitelné jedenácti, jestliže rozdíl součtu číslic na lichém a sudém místě je dělitelný 11.

Rozhodněte, zda číslo 51 410 je dělitelné čísly 2, 3, 4, 5, 9, 10, 11 a 12.

V čísle 73^*2 doplňte na místo označené hvězdičkou číslici tak, aby vzniklé číslo bylo dělitelné devíti.

Atd.

3. Prvočíslo, číslo složené

Definice: Prvočíslo je přirozené číslo, které má právě dva různé přirozené dělitele, číslo 1 a samo sebe.

3. Prvočíslo, číslo složené

Definice: Složené číslo je přirozené číslo, které má více než dva přirozené dělitele.

3. Prvočíslo, číslo složené

Jak to je s číslem 1?

3. Prvočíslo, číslo složené

Číslo 1 nepovažujeme ani za prvočíslo, ani za číslo složené.

Vyvození prvočísel:

1. Eratosthenovo síto
2. Užití kritérií dělitelnosti
3. Pomocí věty

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Vyvození prvočísel:

Pomocí jaké věty?

Dané číslo a je prvočíslem, jestliže není dělitelné žádným prvočíslem p , pro které platí $p^2 \leq a$.

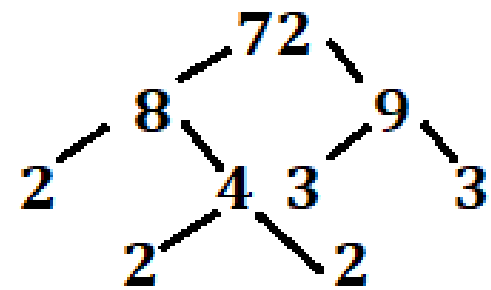
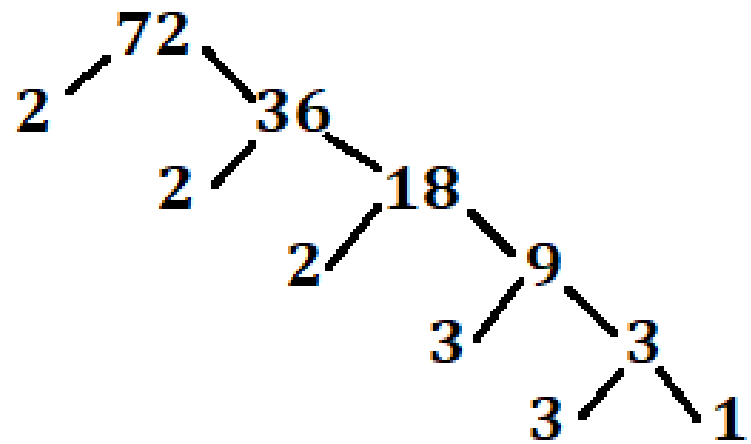
Rozklad přirozeného čísla na součin prvočinitelů

Způsoby rozkladu?

Rozklad přirozeného čísla na součin prvočinitelů

Proveďte prvočíselný rozklad čísla 72.

Rozklad přirozeného čísla na součin prvočinitelů



72		2
36		2
18		2
9		3
3		3
1		

Rozklad přirozeného čísla na součin prvočinitelů

Prvočíselný rozklad čísel znázorňujeme v 6. ročníku bez mocnin, později pomocí mocnin.

Rozklad přirozeného čísla na součin prvočinitelů

K čemu využíváme rozklad?

Rozklad přirozeného čísla na součin prvočinitelů

a) k výpočtu největšího společného dělitele a nejmenšího společného násobku daných čísel,

b) k určení počtu všech přirozených dělitelů daného přirozeného čísla,

c) k určení všech přirozených dělitelů daného přirozeného čísla.

Určení všech dělitelů daného přirozeného čísla

Určete všechny dělitele čísla 72.

Určení všech dělitelů daného přirozeného čísla

Určete všechny dělitele čísla 72.

Jaké známe způsoby?

Určení všech dělitelů daného přirozeného čísla

1. způsob: vypsání $d = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$

Určení všech dělitelů daného přirozeného čísla

2. způsob: z prvočíselného rozkladu $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

Určení všech dělitelů daného přirozeného čísla

3. způsob: tabulkou

	2^0	2^1	2^2	2^3
3^0	1	2	4	8
3^1	3	6	12	24
3^2	9	18	36	72

Určení všech dělitelů daného přirozeného čísla

4. způsob: aritmetická funkce (určí počet dělitelů)

4. Společný dělitel daných čísel

Společný dělitel dvou nebo více přirozených čísel je přirozené číslo, které je dělitelem každého z nich.

4. Společný dělitel daných čísel

Určete všechny společné dělitele čísel 56 a 72.

4. Společný dělitel daných čísel

Určete všechny společné dělitele čísel 56 a 72.

Jaké známe způsoby?

4. Společný dělitel daných čísel

Příklad: Určete všechny společné dělitele čísel 56 a 72.

56: 1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56

72: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72

Největší společný dělitel

Největší společný dělitel (D) daných čísel je největší číslo z množiny společných dělitelů a je dělitelný všemi ostatními společnými děliteli.

Největší společný dělitel

Určete největší společný dělitel čísel 56 a 72.

Největší společný dělitel

Určete největší společný dělitel čísel 56 a 72.

Jaké známe způsoby?

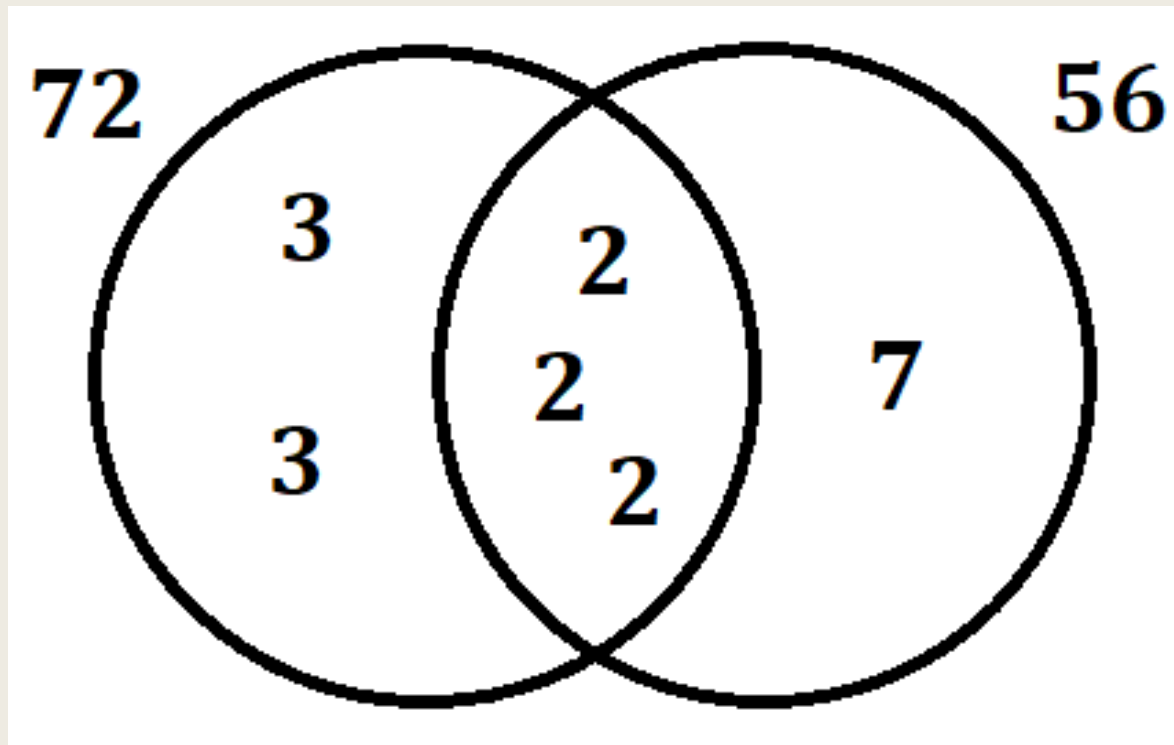
Největší společný dělitel

a) pomocí experimentu

b) pomocí prvočíselného rozkladu daných čísel na součin prvočinitelů

c) pomocí tzv. Euklidova algoritmu (postupného dělení)

Např. 72:56



zdroj: Pavlíčková, 2020. Interaktivní osnova k předmětu Didaktika matematiky 1

$NSD = 1$...čísla nesoudělná

$NSD > 1$...čísla soudělná

Video: [Manipulativní činnosti pro II. stupeň | VOŠP a SPgŠ Litomyšl \(vospspgs.cz\)](#)

5. Společný násobek daných čísel

Společný násobek daných přirozených čísel je přirozené číslo, které je celistvým nenulovým násobkem každého z nich.

5. Společný násobek daných čísel

Určete společný násobek čísel 56 a 72.

5. Společný násobek daných čísel

Určete společný násobek čísel 56 a 72.

Řešení:

56, 112, 168, 224, 280, 336, 392, 448, 504, 560, ...

72, 144, 216, 288, 360, 504, 576, ...

Nejmenší společný násobek

Nejmenší společný násobek (n) daných čísel je nejmenší číslo z množiny společných násobků a dělí všechny další společné násobky.

Nejmenší společný násobek

Určete nejmenší společný násobek čísel 56 a 72.

Nejmenší společný násobek

a) pomocí experimentu

b) pomocí prvočíselného rozkladu daných čísel na součin prvočinitelů

c) pomocí věty: Pro dvě přirozená čísla a , b platí, že jejich součin je roven součinu D a n : $a \cdot b = D \cdot n$

Pojďme na důkazy ohledně dělitelnosti...

Dokažte, že součet dvou po sobě jdoucích mocnin čísla 2 je vždy dělitelný třemi.

Dokažte, že číslo $4^1 + 4^2 + \dots + 4^{100}$ je dělitelné pěti.

**Jestliže p je prvočíslo větší než 3, pak je vždy jedno z čísel $p - 1$, $p + 1$ dělitelné šesti.
Dokažte.**

Další důkazy viz. seminář.. + studijní materiály v ISu

Literatura

Pavlíčková, L. (2020). Interaktivní osnova k předmětu Didaktika matematiky 1. Brno.