ÚHEL A JEHO VELIKOST

Irena Budínová

POJMY a dovednosti:
Úhel, vrchol úhlu, ramena úhlu. Klasifikace úhlů (úhel konvexní, nekonvexní, úhel ostrý, pravý, tupý, přímý, plný, nulový).
Přenášení úhlu k dané polopřímce do dané poloroviny. Porovnávání úhlů. Shodnost úhlů. Grafický součet úhlů. Grafický rozdíl úhlů. Násobek úhlu.
Osa úhlu, její konstrukce.
Dvojice úhlů: úhly styčné, vedlejší vrcholové, souhlasné, střídavé.
Velikost úhlu. Měření úhlů, úhloměr. Jednotky velikosti úhlu – radián, stupeň.
Rýsování úhlu dané velikosti – pomocí úhloměru i pomocí kružítka (některé úhly).

Definice 1.
Jsou dány tři různé body A, B, V, které neleží v jedné přímce. Konvexním úhlem AVB nazýváme průnik poloroviny AVB a poloroviny BVA.

Symbolicky: $\angle AVB = \mapsto AVB \cap \mapsto BVA$

Jestliže body A, B, V leží v jedné přímce a bod V leží mezi body A, B, pak konvexním úhlem AVB nazýváme každou polorovinu s hraniční přímkou AB. Úhel AVB se nazývá úhel přímý.
Jestliže body A, B, V leží v jedné přímce a bod A leží mezi body V, B, pak konvexním úhlem AVB nazýváme

a) každou rovinu, obsahující přímku AB – úhel AVB je úhel plný
b) polopřímku VA – úhel AVB je úhle nulový.

Definice 2.
Jsou dány tři různé body A, B, V, které neleží v jedné přímce. Nekonvexním úhlem AVB nazýváme sjednocení polorovin opačných k polorovinám AVB a BVA.

Symbolicky: $AVB = \leftarrow AVB \cup \leftarrow BVA$

Definice 3
Jsou dány tři různé body A, B, V, které neleží v jedné přímce. Konvexním úhlem AVB rozumíme množinu všech bodů X roviny ρ, které leží na všech polopřímkách VY, kde bod Y leží na úsečce AB.

Symbolicky: $\angle AVB = \{X \in \rho, X \in VY \wedge Y \in AB\}$.

Úhly označujeme také písmeny řecké abecedy, např. $\alpha, \beta, \omega, \varphi$ aj.

Poznámka: V uvedených definicích je úhel chápán ve smyslu rovinného úhlu. V budoucnu se mohou žáci setkat s dalšími významy úhlu, jako je např. úhel otočení, orientovaný úhel, prostorový úhel aj.

Školská matematika

Rámcový vzdělávací program:
Očekávané výstupy:
Žák

- zdůvodňuje a využívá polohové a metrické vlastnosti základních rovinných útvarů při řešení úloh a jednoduchých praktických problémů, využívá potřebnou matematickou symboliku.
- Charakterizuje a třídí základní rovinné útvary - úhly.
- Určuje velikost úhlu měřením a výpočtem.
- Načrtne a sestrojí úhel.

Motivace:
Úhel hodinových ručiček, úhel stoupání, úhel klesání, střelecký úhel, úhel dopadu, úhel odrazu aj.

Úhel
Ve školské matematice se úhel zavádí pomocí dvou polopřímek se společným počátkem.
Dvě polopřímky VA a VB určují v rovině dva úhly – jeden konvexní a jeden nekonvexní. Rozlišují se buď barevně nebo pomocí jednoho vnitřního bodu daného úhlu.
Bod V se nazývá vrchol úhlu AVB, polopřímky VA a VB se nazývají ramena úhlu AVB.

Důležité je, aby si žáci uvědomili ten fakt, že úhel je část roviny. V praxi žáci zaměňují pojmy úhel a velikost úhlu.

Definice 1. Jsou dány tři různé body A, B, V, které neleží v jedné přímce. **Konvexním úhlem** AVB nazýváme průnik poloroviny AVB a poloroviny BVA.

Jestliže body A, B, V leží v jedné přímce a bod V leží mezi body A, B, pak konvexním úhlem AVB nazýváme každou polorovinu s hraniční přímkou AB. Úhel AVB se nazývá **úhel přímý.**

Jestliže body A, B, V leží v jedné přímce a bod A leží mezi body V, B, pak konvexním úhlem AVB nazýváme

a) každou rovinu, obsahující přímku AB – úhel AVB je **úhel plný**,
b) polopřímku VA – úhel AVB je **úhel nulový**.

Definice 2. Jsou dány tři různé body A, B, V, které neleží v jedné přímce. **Nekonvexním úhlem** AVB nazýváme sjednocení polorovin opačných k polorovinám AVB a BVA.

Definice 3. Jsou dány tři různé body A, B, V, které neleží v jedné přímce. Konvexním úhlem AVB rozumíme množinu všech bodů X roviny ρ, které leží na všech polopřímkách VY, kde bod Y leží na úsečce AB.

Osa úhlu
Osa úhlu AVB je přímka, která prochází vrcholem úhlu a dělí úhel na dva shodné úhly.
Poznámka: V případě konvexního úhlu se někdy osou úhlu rozumí polopřímka VX – zejména v případě, kdy osou úhlu rozumíme množinu všech bodů daného úhlu, které mají od obou ramen úhlu sobě rovné vzdálenosti.

Pomocí osy úhlu přímého můžeme vyvodit pojem úhlu pravého a následně uvést klasifikaci úhlů (zatím bez velikostí) vzhledem k úhlu pravému:
Úhel ostrý – menší než úhel pravý

Úhel pravý
Úhel tupý – větší než úhel pravý a menší než úhel přímý
Úhel přímý.

Dvojice úhlů

Úhly styčné – jsou takové dva úhly, které mají společný vrchol a jedno rameno.
Úhly vedlejší – jsou takové dva úhly, které mají společný vrchol a jedno rameno a druhá ramena úhlů leží na opačných polopřímkách. Sjednocením vedlejších úhlů je úhel přímý.
Úhly vrcholové – jsou takové dva úhly, které mají společný vrchol a jejich ramena leží na opačných polopřímkách. Vrcholové úhly jsou shodné.

Úhly souhlasné a střídavé

Jsou dány dvě různoběžné přímky *a, b* a přímka *p*, které obě přímky protíná (tzv. příčka).

Souhlasné úhly jsou takové úhly, které leží v téže polorovině určené přímkou *p* (v této polorovině mají oba úhly jedno z ramen) a průnikem jejich druhých ramen je polopřímka.
Pokud jsou přímky *a, b* rovnoběžné, jsou odpovídající si souhlasné úhly shodné.
Střídavé úhly jsou takové úhly, které leží v opačných polorovinách s hranicí *p*, průnikem jejich ramen je buď úsečka nebo je průnik prázdný.
Pokud jsou přímky *a, b* rovnoběžné, jsou střídavé úhly shodné.

Poznámka 1. Dětem definice nesdělujeme, avšak pomocí obrázku vytvoříme pojmy v duchu správných definic.

Poznámka 2: Dvojic úhlů střídavých nebo souhlasných užíváme zejména v případě, chcemeli dokázat rovnoběžnost přímek.

Úkoly pro studenty:

1. Popište přesně, jak se přenáší daný úhel k dané polopřímce do dané poloroviny
   a) modelováním pomocí papírových modelů,
   b) konstrukčně pomocí kružítka.
2. Popište přesně, jak porovnáváme úhly
   a) modelováním pomocí papírových modelů,
   b) konstrukčně pomocí kružítka.
3. Popište přesně konstrukci osy úhlu pomocí kružítka.
4. Popište přesně konstrukci pravého úhlu pomocí kružítka.
5. Popište přesně, jak provádíme graficky součet nebo rozdíl dvou úhlů (pomocí modelů i pomocí kružítka)

VELIKOST ÚHLU

Podnět k měření úhlů daly astronomické práce starých Babyloňanů, kteří rozdělili plný úhel na 360°, tj. jednotek úhlové míry. Z Babylonie se kolem roku 200 dostalo dělení úhlu na 360° do Alexandrie.
Velikost rovinného úhlu se odvozuje z délky oblouku AB na jednotkové kružnici.
Úhel AVB má velikost **1 radián** (1 rad), jestliže oblouk AB je dlouhý 1 m a leží-li na kružnici o poloměru m. (Míra oblouková)
Úhel AVB má velikost **1 stupeň**, jestliže je oblouk AB dlouhý (π : 180) m a leží-li na kružnici o poloměru 1 m. (Míra stupňová)
Název stupeň pochází z latinského gradus (schody, žebřík).
Minuta pochází z latinského pars minutae primae, což jsou části prvního dělení.
Vteřina – sekunda – z latinského pars minutae secundae – části druhého dělení.
Převodní vztah mezi radiány a stupni: 1 rad = 50°17´45 ´´.

Poznámka: Označení sekunda se používá k označení jednotky času, označení vteřina se používá k označení jednotky velikosti úhlu (SI).

Velikost úhlu zapisujeme symbolicky |∢AVB| nebo písmeny řecké abecedy α, β, δ, aj.

Ve školské matematice se většinou uvádí 1° jako jedna devadesátina úhlu pravého.

Úhly měříme úhloměrem
Úhloměr má zpravidla dvě stupnice – vnější a vnitřní, které jsou vyznačeny na půlkružnicích vždy od 0°do 180°. Střed půlkružnic je současně středem úhloměru.

Podle velikosti klasifikujeme úhly:

Název úhlu	nulový	ostrý	pravý	tupý	přímý	nekonvexní	plný
velikost	0°	0°<α<90°	90°	90°<α<180°	180°	180°<α<360°	360°

Poznámka: V období Velké francouzské revoluce se byl pravý úhel rozdělen na 100 dílků a jeden díl se nazýval grad, menší jednotky byly decigrad, centigrad, miligrad. Desetinného dělení se užívá i v zeměměřictví a ve vojenství.
Dáje se užívá tzv. dělostřelecký dílec, což je jedna třítisícina přímého úhlu.
Pod pojmem „dílec“ se rozumí zorný úhel, pod nímž je vidět tyč výšky 1 m na vzdálenost 1 km.

Úkoly pro studenty:

1. Bez použití úhloměru narýsujte úhel o velikosti 60°, 45°, 150°.
2. Vysvětlete, jak se sčítají velikosti úhlů, např. 36°47´+57°38´.
3. Vysvětlete, jak se odčítají velikosti úhlů, např. 85°23´-39°48´.
4. Vypočítejte násobek velikosti úhlu, např. 3*29°45´.
5. Načrtněte od ruky úhel, který má velikost 135°, 75°. Pomocí měření zjistěte, jak přesný byl váš odhad.