# Podobnost geometrických útvarů

## Irena Budínová

**Motivace:**

- Časté použití v běžném životě – plány, mapy, výkresy, střihy na oděvy, zvětšování, zmenšování (např. kopírky), fotografie, různých formátů zhotovené z téhož negativu, projekce (diaprojektor, zpětný projektor, vizualizér), zlatý řez. V prostoru – modely (města, stavby, automobily, vláčky apod.). Reklamní letáky – ukázat.

- Dokonalejší pochopení geometrických zobrazení.

**Učivo:**

- Podobnost, pochopení definice, vyhledávání podobných útvarů v rovině.
- Poměr podobnosti, určování poměru podobnosti.
- Užití podobnosti – dělení úsečky v daném poměru, zvětšování, zmenšování geom. útvarů v daném poměru (v rovině).
- Užití při konstrukci plánů.
- Řešení úloh.

**Metody práce:**

- Manipulativní činnosti, kreslení obrázků ve čtvercových sítích s různým modulem, určování poměru podobnosti výpočtem z naměřených údajů.

**Definice:**

Dva geometrické útvary v rovině nazveme podobné, jestliže poměry délek každých dvou odpovídajících si stran tohoto útvaru jsou rovny témuž nezápornému číslu *k* většímu než 0. Odpovídající si úhly v podobných útvarech jsou shodné. Číslo *k* se nazývá poměr podobnosti.

Slovo „odpovídajících si“ je důležité – můžeme nakreslit obrázky, kdy některé strany jsou dokonce shodné a útvary podobné nejsou.

Obr 1 – pětiúhelník

**Podobnost trojúhelníků**

Dva trojúhelníky jsou podobné, jestliže se sobě rovnají poměry každých dvou odpovídajících si stran a odpovídající si úhly jsou shodné.

Obr. 2

**Věty o podobnosti trojúhelníků**

1. Věta sss

   Dva trojúhelníky jsou podobné, jestliže se rovnají poměry délek všech dvojic odpovídajících si stran.

   Obr. 3

2. Věta sus

   Dva trojúhelníky jsou podobné, jestliže se sobě rovnají poměry délek dvou dvojic odpovídajících si stran a shodují se v úhlu těmito stranami sevřeném.

   Obr. 4

3. Věta uu

   Dva trojúhelníky jsou podobné, jestliže se shodují ve dvou vnitřních úhlech.

   Obr. 5

4. Věta Ssu

   Dva trojúhelníky jsou podobné, jestliže se sobě rovnají poměry délek dvou dvojic odpovídajících si stran a shodují se v úhlu proti delší z těchto stran.

   Obr. 6

**Užití podobnosti**

1. Rozdělení úsečky na *n* shodných dílů   obr. 7

Rozdělte úsečku AB na 7 sodných dílů.

2. Rozdělení úsečky v daném poměru   obr. 8

Rozdělte úsečku AB v poměru 3 : 5.

3. Rozdělte úsečku AB v poměru zlatého řezu.

   Zlatý řez – úloha, kdy je třeba rozdělit úsečku na dvě části tak, aby poměr delší části ke kratší části byl roven poměru celé úsečky k delší části.

   Obr. 9

   Poměr zlatého řezu $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

Význam v umění, architektuře, fotografii apod.

4. Měřítko plánu a mapy

   Práce s atlasem, automapu, vyhledávání měřítek map,

   Strojírenské výkresy: zmenšení 1 : 2, 1 : 5, 1 : 10, 1 : 50, 1 : 100

   zvětšení: 2 : 1, 5 : 1, 10 : 1

   Stavební výkresy: 1 : 2, 1 : 5, 1 : 10, 1 : 20. 1 : 25, 1 : 50, 1 : 100, 1 : 200, 1 : 500

   Tři typy úloh – výpočet na délky mapě, ve skutečnosti, měřítka.

5. Vyvození goniometrických funkcí ostrého úhlu

   Obr 10

   Počítání poměrů, vyvození funkce

6. Důkazy matematických vět – např. věty Euklidovy, věty o lichoběžníku aj.

7. Řešení zajímavých a nestandardních úloh.

   - Vypočtěte výšku smrku, jestliže délka jeho stínu v určitém okamžiku je 34 metry a v tomto okamžiku délka stínu tyče vysoké 1 metr je 1,7 m.

   - Narýsujte ostroúhlý trojúhelník ABC a sestrojte všechny jeho výšky. Označte paty výšek body X, Y, Z a průsečík výšek označte O. Zapište alespoň pět dvojic podobných trojúhelníků. (Existuje 12 dvojic podobných trojúhelníků)

**Stejnolehlost**

Stejnolehlost je zařazena do učiva tříd s rozšířenou výukou matematiky a na víceletá gymnázia.

Je dán bod S a reálné číslo $\kappa \neq 0$. (kappa) Stejnolehlost neboli homotetie se středem S a koeficientem $\kappa$ je zobrazení, které

1. Každému bodu X roviny $X \neq S$ přiřazuje bod X´ tak, že platí $|SX'| = \kappa\, |SX|$,
   přitom pro $\kappa > 0$ leží bod X´ na polopřímce SX,

   pro $\kappa < 0$ leží bod X´ na polopřímce opačné k polopřímce SX.

2. Bodu S přiřadí bod S´= S (jediný samodružný bod).

   Bod S se nazývá střed stejnolehlosti, $\kappa$ se nazývá koeficient stejnolehlosti.

   Obr.11

Ukázka – obraz úsečky, přímky, trojúhelníku, kružnice ve stejnolehlosti

**Vlastnosti stejnolehlosti**

Přímka, která spojuje dva stejnolehlé body, prochází středem stejnolehlosti.

Stejnolehlost zobrazuje každou přímku na přímku s ní rovnoběžnou.

Stejnolehlé úsečky leží na rovnoběžných přímkách.

Každé dvě úsečky, které nejsou shodné a leží na rovnoběžných přímkách, jsou stejnolehlé dvěma způsoby.

obr. 12

Dva stejnolehlé úhly jsou shodné.

Dva útvary, které jsou stejnolehlé, jsou podobné.

Každé dvě kružnice, které nejsou shodné, jsou stejnolehlé dvěma způsoby.

Obr. 13

Diskuse vzhledem ke $\kappa$ :

$\kappa = 0$ (0 je vyloučena v definici) – obraz každého bodu by byl střed stejnolehlosti

$\kappa = 1$ - každý vzor splyne se svým obrazem

$\kappa = -1$ - středová souměrnost

$\kappa > 1$ - zvětšení

$0 < \kappa < 1$ - zmenšení.

**Užití stejnolehlosti**

Důkazy matematických vět (např. věta o těžnicích v trojúhelníku)

Konstrukční úlohy: Daný útvar zmenšete tak, aby každá jeho strana měla poloviční délku.