

1. Souřadnice, vektory

Def. 1.1.

Uspořádané n -tice reálných čísel (a_1, \dots, a_n) se nazývají **n -rozměrné vektory**

$\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$, když jsou pro ně definovány právě:

- a) rovnost $\vec{a} = \vec{b}$
je právě když $a_i = b_i$ pro každé $i = 1, \dots, n$
- b) součet $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$
pak $c_i = a_i + b_i$ pro každé $i = 1, \dots, n$
- c) násobení skalárem $\vec{d} = k \cdot \vec{a}$
pak $d_i = k \cdot a_i$ pro každé $i = 1, \dots, n$
- d) nulový vektor $\vec{0} = (0, 0, \dots, 0)$
opačný vektor $-\vec{a} = (-1) \cdot \vec{a}$

Čísla a_i se nazývají **souřadnicemi vektoru \vec{a}** .

Věta 1.1.

Pro počítání s n -rozměrnými vektory platí tato pravidla.

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$	komutativnost
$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$	asociativnost
$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$	
$k_1 \cdot (k_2 \cdot \vec{a}) = (k_1 \cdot k_2) \cdot \vec{a}$	asociativnost násobení skalárem
$k \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b}$	distributivnost
$(k_1 + k_2) \cdot \vec{a} = k_1 \cdot \vec{a} + k_2 \cdot \vec{a}$	distributivnost
$k \cdot \vec{a} = \vec{0}$	platí když
	1. $k = 0$ $\vec{a} \neq \vec{0}$
	2. $k \neq 0$ $\vec{a} = \vec{0}$
	3. $k = 0$ $\vec{a} = \vec{0}$

Def. 1.2.

Množina všech n -rozměrných vektorů s operacemi sčítání vektorů a násobením vektoru se skalárem se nazývá **n -rozměrný vektorový prostor V_n** .

Def. 1.3.

Řekneme, že vektor $\vec{b} \in V_n$ je **lineární kombinací** vektorů $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p$, když jej lze vyjádřit ve tvaru: $\vec{b} = k_1 \cdot \vec{a}_1 + \dots + k_p \cdot \vec{a}_p$

kde k_i jsou vhodná čísla, tzv. koeficienty lineární kombinace.

Není-li možno žádný z vektorů $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p \in V_n$ vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních vektorů, říkáme, že tyto vektory jsou **lineárně nezávislé**.

Věta 1.2.

Je-li v soustavě n -dim. vektorů i vektor $\vec{0}$, pak je tato soustava lineárně závislá.

Věta 1.3.

Soustava vektorů $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p \in V_n$ je lineárně závislá právě tehdy když

$$k_1 \cdot \vec{a}_1 + k_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + k_p \cdot \vec{a}_p = \vec{0}; \text{ a alespoň jeden z koeficientů } k_i \text{ je různý od nuly.}$$

Def. 1.4.

Každá soustava n lineárně nezávislých vektorů $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in V_n$ se nazývá **báze** vektorového prostoru V_n .

Věta 1.4.

Každý vektorový prostor má aspoň jednu bázi.

Každý vektor $\vec{a} \in V_n$ lze vyjádřit jako lineární kombinací vektorů báze. Každá soustava $n + 1$ vektorů v prostoru V_n je lineárně závislá.

Příklad: báze

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0, 0)$$

$$\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, 0)$$

.

.

.

$$\vec{e}_{n-1} = (0, 0, 0, \dots, 1, 0)$$

$$\vec{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1)$$

kde \vec{e}_i jsou tzv. základní jednotkové vektory.

Def. 1.5.

Vektorový prostor E_n nazveme **Euklidovským** je-li navíc definována operace

skalárního násobení vektorů $\vec{u} \cdot \vec{v} = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ a platí

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

komutativnost

$$(\vec{k} \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot (\vec{k} \cdot \vec{u}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{k}$$

asociativnost

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{z} = \vec{u} \cdot \vec{z} + \vec{v} \cdot \vec{z}$$

distributivnost

$$\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$$

$$\vec{v}^2$$

Velikost vektoru

$$u = |\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

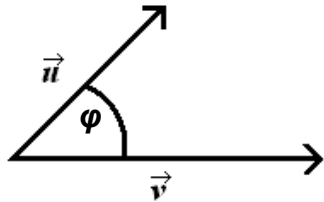
Pokud $|\vec{u}| = 1$, nazveme vektor \vec{u} **jednotkový**.

Vektory \vec{u} a \vec{v} jsou navzájem **kolmé (ortogonální)**, je-li $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Operaci $\vec{u} \cdot \vec{v}$ definujeme vztahem

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

Pozn. geometrický popis



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u \cdot v \cdot \cos\varphi$$