Def. 2.14.
Existuje-li vlastní limita

$$f'(x_0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Je-li *f* (x) definována na okolí bodu x_0, říkáme, že funkce *f* má **derivaci v bodě x_0.**
Funkce *f* , která má v bodě x_0 derivaci, se nazývá <u>diferencovatelná</u>.

Věta 2.9.
Má-li funkce *f* v bodě x_0 vlastní derivaci, pak funkce *f* je spojitá v bodě x_0.

Def. 2.15.
Má-li funkce *f* derivaci v každém bodě intervalu (a, b) říkáme, že funkce *f* má **derivaci na intervalu (a, b)**. Funkce, která je definována v každém bodě x intervalu (a, b) a jejíž funkční hodnota v bodě x є (a, b) je *f ´*(x) se nazývá derivace funkce *f* na intervalu (a, b) a značí se *f ´*.

Věta 2.10.
Derivace konstanty (tj. *f* (x) = k) je rovna nule (tj. *f ´* (x) = 0).

Věta 2.11.
Mají-li funkce u, v v bodě x_0 derivaci pak současně platí:

$(u \pm v)' = u' \pm v'$ $\qquad$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $\qquad$ pro $\forall\ (x_0) \neq 0$.

$(u \cdot v)' = u'v \pm uv'$

Věta 2.12.
Jestliže funkce *u* = *g* (x) má derivaci v bodě x_0 a funkce *y* = *f* (u) má derivaci v bodě $u_0 = g(x_0)$, pak složená funkce y = *f* (*g*(x)) má derivaci v bodě x_0
a platí:

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Věta 2.13.
Jestliže funkce *y* = *f* (x) má derivaci v bodě x_0, pak přírůstek Δy funkce lze vyjádřit ve tvaru $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \omega(\Delta x) \cdot \Delta x$, kde ω je funkce pro níž $\lim_{\Delta x \to 0} \omega(\Delta x) = 0$.

Def. 2.16. Funkci $f'(x_0)\Delta x$ proměnné Δx nazýváme diferenciálem funkce *f* v bodě x_0 a označujeme df(x)/x_0.

Funkce	Derivace funkce	Podmínky
k	0	k = konst
x	1	x є **R**
x^n	nx^{n-1}	x є **R**
x^{-n}	$-nx^{-n-1}$	x ? 0
a^x	$a^x \ln a$	a > 0
e^x	e^x	x є **R**
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	x > 0, a > 0, a ? 0
ln x	$\frac{1}{x}$	x > 0
sin x	cos x	x є **R**
cos x	- sin x	x є **R**
tg x	$\frac{1}{\cos^2 x}$	x ? $(2k + 1)\frac{\pi}{2}$ k = 0, ± 1,…
cotg x	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	x ? $2k\frac{\pi}{2}$
arcsin x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	x є (-1, 1)
arccos x	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	x є (-1, 1)
arctg x	$\frac{1}{1+x^2}$	x є **R**
arccotg x	$-\frac{1}{1+x^2}$	x є **R**

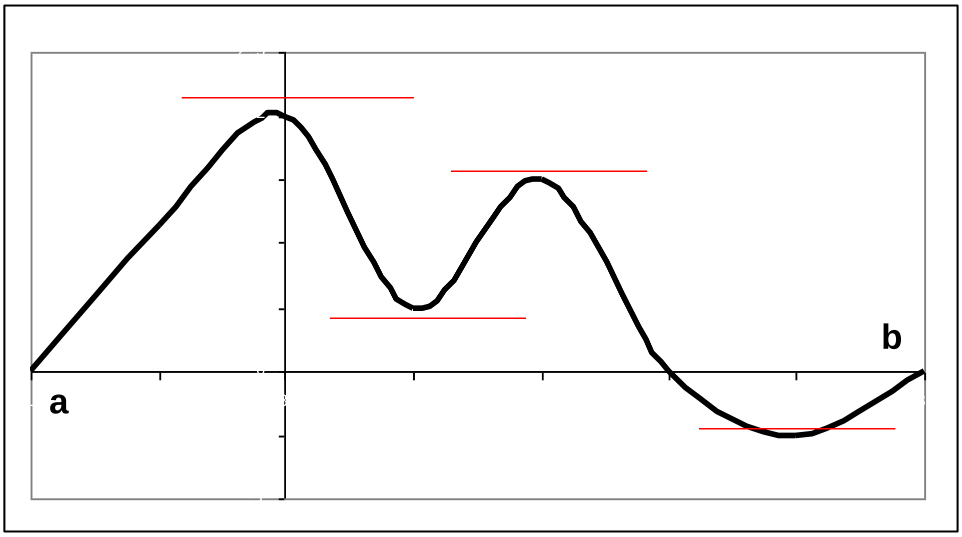
Věta 2.14. Rollova věta

Nechť funkce *f* má tyto vlastnosti:

a) je spojitá na uzavřeném intervalu <a, b>

b) v každém bodě <a, b> má derivaci

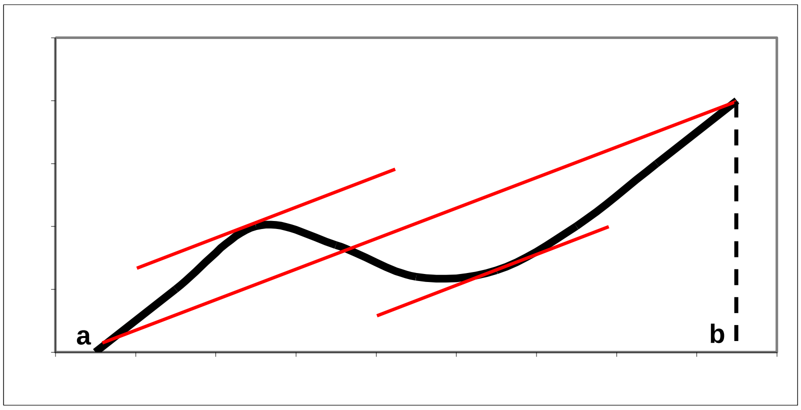
c) v krajních bodech $f(a) = f(b)$
pak existuje v (a, b) aspoň jeden bod ξ, pro nějž $f'(\xi) = 0$.



Věta 2.15. Lagrangeova věta o střední hodnotě
Nechť funkce *f* má tyto vlastnosti

a) je spojitá v <a, b>
b) v každém bodě <a, b> má derivaci

Pak v intervalu (a,b) existuje aspoň jeden bod ξ pro nějž $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$.



Věta 2.16.
Má-li funkce *f* v bodě x_0 kladnou, respektive zápornou derivaci, pak je v tomto bodě rostoucí, respektive klesající.

Def. 2.17.

Říkáme, že funkce *f* má v bodě x_0 **lokální maximum** (resp. lokální minimum), existuje takové δ – okolí bodu x_0, že pro všechny body $x \neq x_0$ z tohoto okolí platí $f(x) \leq f(x_0)$, (resp. $f(x) \geq f(x_0)$).

Pokud je splněna ostrá nerovnost, nazýváme **extrém ostrým**.

Věta 2.17.

Má-li funkce *f* v bodě x_0 lokální extrém a existuje v tomto bodě derivace, pak platí

$f'(x_0) = 0$.

Věta 2.18.

Má-li funkce *f* v bodě x_0 n-tou derivaci (n ≥ 1) a platí-li

$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ a $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.

Pak je-li

a) je-li n-sudé a $f^{(n)}(x_0) > 0$ má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum,
$f^{(n)}(x_0) < 0$ má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.

b) je-li n-liché a $f^{(n)}(x_0) > 0$ je funkce f v bodě x_0 rostoucí,
$f^{(n)}(x_0) < 0$ je funkce f v bodě x_0 klesající.

Def. 2.18.

Říkáme, že funkce *f* má v bodě x_0 **inflexní (sedlový) bod**, mění-li se v něm funkce z konkávní na konvexní nebo naopak.

Věta 2.19.

Je-li x_0 inflexní (sedlový) bod funkce f a má-li funkce f v tomto bodě druhou derivaci, pak $f''(x_0) = 0$.

Věta 2.20.

Jestliže na celém okolí bodu x_0 je $f''(x_0) > 0$ pak je funkce f v bodě x_0 ryze konvexní, je-li $f''(x_0) < 0$ je funkce f v bodě x_0 ryze konkávní.

Pozn.:

Přímka $y = kx + q$ je asymptotou funkce f v bodě +∞ (-∞), právě když existují konenčné limity $\lim_{x\to+\infty} (f(x)-kx) = q$, (resp. $\lim_{x\to-\infty} (f(x)-kx) = q$).

Věta 2.21. L´Hospitalovo pravidlo

a) Nechť $\lim_{x\to c} f(x) = 0$, $\lim_{x\to c} g(x) = 0$ *nebo* $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$.

b) Nechť existuje $\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$.

Pak platí $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$.