Posloupnosti

Def. 4.1.: Posloupností reálných čísel nazýváme zobrazení f množiny všech přirozených čísel **N** do množiny všech reálných čísel **R**. Prvek n $\in$ **N** nazýváme indexem a prvek f(n) = $a_n \in$ **R** nazýváme n-tým členem posloupnosti. Značíme $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Pozn.: Je-li dáno jen několik prvních členů posloupnosti a pro ostatní členy je dán předpis, jak se počítá člen a_n na základě znalosti předchozích členů, říkáme, že tato posloupnost je dána rekurentně.

Def. 4.2.: Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, v níž rozdíl $a_{n+1} - a_n = d$ je konstantní, se nazývá aritmetická. Číslo d se nazývá diference.

Věta 4.1.: Pro aritmetickou posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí:

a) $a_n = \dfrac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$, k=1, 2, ..., n-1

b) $a_n = a_1 + (n-1)d$

c) $a_s = a_r + (s-r)d$

d) Pro součet prvních n členů (= s_n)

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Def. 4.3.: Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, v níž podíl $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$ ($a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$) je konstantní, se nazývá geometrická. Číslo q se nazývá kvocient geometrické posloupnosti.

Věta 4.2.: Pro geometrickou posloupnost platí:

a) $a_n = a_1 q^{n-1}$

b) $a_s = a_r q^{s-r}$

c) $s_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ ($q \neq 1$)

$s_n = n a_1$ (q = 1)

$s_\infty = \dfrac{a_1}{1-q}$ (q < 1) součet nekonečné geometrické řady

Def. 4.4.: Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má vlastní limitu, nebo že je konvergentní k číslu a ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$), jestliže ke každému ε > 0 ∃ n_0 takové, že pro každé n > n_0 je $|a_n - a| < \varepsilon$.

Pozn.: Nemá-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vlastní limitu, pak se nazývá divergentní.

Číselné řady

Def. 4.5.: Je-li $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost čísel, pak se výraz $a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazývá číselná řada. Čísla a_1, a_2, ... se nazývají členy řady.

Def. 4.6.: Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se nazývá konvergentní, konverguje-li posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ jejích částečných součtů. Vlastní limita $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ částečných součtů se nazývá součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.
($s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$)

Věta 4.3.: Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Věta 4.4.: (d'Alembertovo kritérium)
Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy a nechť $0 < k < 1$. Jestliže skoro všechny členy posloupnosti $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ jsou menší, než číslo k, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní.

Věta 4.5.: (limitní d'Alembertovo kritérium)
Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy a nechť $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = b$. Pokud $b < 1$, pak je daná řada konvergentní, je-li $b > 1$, je divergentní.

Věta 4.6.: (Cauchyho odmocninové kritérium)
Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s kladnými členy a nechť $\exists \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$, pak je-li $k < 1$ ($k > 1$), je tato řada konvergentní (divergentní).

Věta 4.7.: (Cauchyho integrální kritérium)
Je-li f(x) spojitá nezáporná nerostoucí funkce na $[N,\infty)$, kde N je přirozené číslo, pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ a $\int_N^{\infty} f(x)dx$ je buď zároveň divergentní, nebo konvergentní.

Mocninné řady

Def. 4.7.: Mocninnou (potenční) řadou nazýváme řadu tvaru

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$, kde a_0, a_1, ... jsou reálné konstanty.

Věta 4.8.: Ke každé mocninné řadě $\exists$ R ($0 \le R \le +\infty$), že pro $\forall$ $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ je řada konvergentní a pro $\forall$ $x \notin (x_0 - R, x_0 + R)$ je řada divergentní. Číslo R se nazývá poloměr konvergence mocninné řady, číslo x_0 se nazývá střed konvergence mocninné řady.

Věta 4.9.: Má-li mocninná řada takové koeficienty a_n, že $\exists \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$, pak tato řada má $R = \frac{1}{q}$ pro $q > 0$. $R = 0$ pro $q = \infty$, $R = \infty$ pro $q = 0$.

Taylorova a MacLaurinova řada

Def. 4.8.: Nechť funkce f(x) má v bodě x_0 derivace všech řádů. Formálně utvořme mocninnou řadu

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$$

Tato řada se nazývá Taylorova řada (T. rozvoj) funkce f(x) v bodě x_0. Je-li speciálně $x_0 = 0$, pak se tato řada nazývá MacLaurinova.

Věta 4.10.: (Taylorova věta)
Jestliže funkce f(x) má na intervalu $[x_0, x_0 + h)$ spojité derivace až do řádu n+1, pak f(x) v bodě $x = x_0 + h$ lze vyjádřit ve tvaru

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + R_{n+1}(h),$$

kde zbytek $R_{n+1}(h) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta h)}{(n+1)!}h^{n+1}$ $\qquad (0 < \vartheta < 1)$