3. INTEGRÁLNÍ POČET FUNKCÍ NĚKOLIKA PROMĚNNÝCH

Úvodní pojmy:

- *n*-rozměrný interval $I = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times ... \times \langle a_n, b_n \rangle$
- je-li D_i dělení intervalu $\langle a_i, b_i \rangle$, pak $D = D_1 \times D_2 \times ... \times D_n$ je dělení intervalu I
- integrální součet $S(D) = \sum_{i=1}^{P} f(E_i)P(I_i)$ na intervalu I s dělením D s *p*-dílčími intervaly, které obsahují bod E_i, kde $P(I_i)$ je „obsah“ (délka) intervalu I_i
- integrace v Riemanově smyslu

Def. 3.1: Nechť funkce $f(X)$ je integrovatelná na intervalu *I*. Pak všechny posloupnosti $\{ S(D_k) \}_{k=1}^{\infty}$ integrálních součtů funkce $f(X)$ pro dělení D_k intervalu *I*, mají stejnou limitu, kterou označujeme

$$\iint_I ... \int f(X)dX = \lim_{k\to\infty} S(D_k) \qquad (\lim_{k\to\infty} |D_k| = 0)$$

a nazýváme ji *n*-rozměrným integrálem funkce $f(X)$ na *n*-rozměrném intervalu *I*.

Někdy ozn. $\underset{\substack{M \\ \uparrow}}{\int} f(X)dm \leftarrow dx_1.dx_2.dx_3.....$

Množina, na které integrál počítáme (integrál na množině)

Základní vlastnosti integrálu na množině:

1. Nechť funkce $f(X)$ a $g(X)$ jsou integrovatelné na množině *M*. Nechť c_1 a c_2 jsou čísla. Pak také funkce $c_1 f(X) + c_2 g(X)$ je integrovatelná na množině *M* a platí:
$$\int_M [c_1 f(X) + c_2 g(X)] dm = c_1 \int_M f(X)dm + c_2 \int_M g(X)dm.$$
2. Nechť funkce $f(X)$ a $g(X)$ jsou integrovatelné na *M* a pro $\forall\ X \in M$ je $f(X) \le g(X)$. Pak je $\int_M f(X)dm \le \int_M g(X)dm$.

Věta 3.1: (Fubiniova věta pro dvojný integrál)

Nechť funkce $f(x, y)$ je integrovatelná na intervalu $J = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$. Nechť pro každé číslo $x \in \langle a, b \rangle$ $\exists$ integrál $\int_c^d f(x, y)dy$. Pak $\exists$ integrál $I_{12} = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)dy \right] dx$

a platí $I_{12} = \iint_J f(x, y)dxdy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)dy \right] dx$.

Jestliže pro každé číslo $y \in \langle c, d \rangle$ $\exists$ $\int_a^b f(x, y)dx$, pak $I_{21} = \iint\limits_J f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x,y)dx \right] dy$.

Fubiniova věta převádí dvojný integrál na dvojnásobný.

Def. 3.2: Nechť $M \subset E_n$ je ohraničená množina. $\exists$-li n-rozměrný integrál $\iint\limits_M \dots \int dX$, tj. je-li konstantní funkce $f(X) = 1$ integrovatelná na M, pak množinu M nazýváme měřitelnou (v Jordanově smyslu).

Číslo $m_n(M) = \iint\limits_M \dots \int dX$ nazýváme n-rozměrným objemem (mírou) množiny M.

Def. 3.3: Číslo $\mu = \dfrac{\int\limits_M f(X)dm}{m(M)}$ nazýváme střední hodnotou funkce $f(X)$ na množině M, Je-li $m(M) \neq 0$.

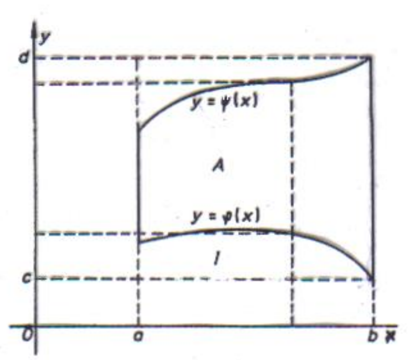
Věta 3.2: (o aditivnosti integrálu)
Nechť A a B jsou měřitelné množiny, které nemají společné vnitřní body. Nechť $C = A \cup B$. Nechť $f(X)$ je integrovatelná na množinách A a B. Pak funkce $f(X)$ je integrovatelná na C a platí:

$$\int\limits_C f(X)dm = \int\limits_A f(X)dm + \int\limits_B f(X)dm.$$

Výpočet dvojných integrálů

Nechť A je elementátní oblast typu $[x, y]$ daná nerovnicemi

$$a \le x \le b$$
$$\varphi(x) \le y \le \psi(x)$$



Věta 3.3: (zobecněná Fubiniova věta)
Nechť funkce $f(x,y)$ je integrovatelná na množině *A*, která je obsažena v intervalu $J=\langle a,b\rangle\times\langle c,d\rangle$. ∃-li pro každé $x\in\langle a,b\rangle$ $\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy$, pak ∃ integrál

$$I_{12}=\int\limits_a^b\left[\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right]dx \text{ a platí } I_{12}=\iint\limits_A f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b\left[\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right]dx \quad (*)$$

Pozn.: Je-li funkce $f(x,y)=\alpha(x)\beta(y)$, pak vztah (*) lze psát $\int\limits_a^b \alpha(x)dx\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)}\beta(y)dy$.

Substituce ve dvojném integrálu

Věta 3.4: Jestliže spojitě diferencovatelné funkce $x=x(u,v),\ y=y(u,v)$ definují vzájemně jednoznačné zobrazení ohraničené a uzavřené oblasti *D* v rovině *xy* na *D** v rovině *uv* a jakobián

$$J=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$ je různý od nuly pro $\forall\ [u,v]\in D^*$, pak

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D^*} f(x(u,v),y(u,v))|J|dudv$$

Př.: Transformace pomocí polárních souřadnic

$$(r,\varphi)\xrightarrow{\Phi}[x,y]$$

$x=r.\cos\varphi$

$y=r.\sin\varphi$

$$J=\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=r$$

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D^*} f(r,\varphi)r\,dr\,d\varphi$$

Aplikace dvojného integrálu

- obsah uzavřené oblasti *D*, ležící v rovině xy $P=\iint\limits_D dxdy=\iint\limits_{D^*} r\,dr\,d\varphi$
- objem tělesa ohraničeného shora grafem spojité funkce $z=f(x,y)$, zdola rovinou $z=0$ a ze stran válcovou plochou vytínající v rovině *xy* měřitelnou oblast *D*:
  $$V=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

- těžiště $T=[x_T, y_T]$ rovinné destičky s hustotou $\rho(x,y)$

  $$x_T=\frac{S_y}{m}=\frac{1}{m}\iint_D x\rho(x,y)dxdy$$

  $$y_T=\frac{S_x}{m}=\frac{1}{m}\iint_D y\rho(x,y)dxdy$$

  kde $m=\iint_D \rho(x,y)dxdy$ je celková hmotnost rovinné destičky a S_x; S_y je statický moment vzhledem k ose *x*, *y*.

- momenty setrvačnosti

  $I_x=\iint_D y^2\rho(x,y)dxdy$ vzhledem k ose *x*

  $I_y=\iint_D x^2\rho(x,y)dxdy$ vzhledem k ose *y*

  $I_P=\iint_D (x^2+y^2)\rho(x,y)dxdy$ vzhledem k počátku (polární moment)

  Je-li plocha dána rovnicí $z=f(x,y)$, $[x,y]\in D$, pak obsah *S* plochy nad oblastí *D* je

  $$S=\iint_D \sqrt{(1+f_x'^2+f_y'^2)}dxdy$$

- pro hmotnost plochy $m(Q)$, statické momenty S_{xy}, S_{xz}, S_{yz} a momenty setrvačnosti I_x, I_y, I_z platí:

  $$m(Q)=\iint_D \rho(x,y)\sqrt{(1+f_x'^2+f_y'^2)}dxdy$$

  $$S_{xy}=\iint_D \rho(x,y)f(x,y)\sqrt{(1+f_x'^2+f_y'^2)}dxdy$$

  $$S_{xz}=\iint_D \rho(x,y)y\sqrt{(1+f_x'^2+f_y'^2)}dxdy$$

  $$S_{yz}=\iint_D x\rho(x,y)\sqrt{(1+f_x'^2+f_y'^2)}dxdy$$

  $$I_x=\iint_D [y^2+f^2(x,y)]\rho(x,y)\sqrt{(1+f_x'^2+f_y'^2)}dxdy$$

  $$I_y=\iint_D [x^2+f^2(x,y)]\rho(x,y)\sqrt{(1+f_x'^2+f_y'^2)}dxdy$$

  $$I_z=\iint_D (x^2+y^2)\rho(x,y)\sqrt{(1+f_x'^2+f_y'^2)}dxdy$$

TROJNÝ INTEGRÁL

Základní vlastnosti:

1. Nechť množina V je sjednocením množin V_1 a V_2, které mají společné body nejvýše na svých hranicích.
   Pak platí:
   $$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{V_1} f(x,y,z)dxdydz + \iiint_{V_2} f(x,y,z)dxdydz$$
   Místo *dxdydz* stručně píšeme *dV*, přičemž integrační oblast i její objem značíme *V*.

2. Nechť *c* je konstanta a funkce *f* a *g* jsou ohraničené na množině *V*.
   Pak platí:
   $$\iiint_V f(x,y,z)dV + \iiint_V g(x,y,z)dV = \iiint_V [f(x,y,z)+g(x,y,z)]dV \quad \text{a}$$
   $$c.\iiint_V f(x,y,z)dV = \iiint_V c.f(x,y,z)dV\,.$$

Věta 3.5: (Fubiniova)
Nechť $g(x,y,z)$ je spojitá funkce na intervalu $J = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle \times \langle e,f\rangle$.
Pak platí:
$$\iiint_J g(x,y,z)dxdydz = \int_a^b\int_c^d\int_e^f g(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \{\int_c^d \left[\int_e^f g(x,y,z)dz\right]dy\}dx$$
a další záměnou pořadí integrace.

Substituce v trojném integrálu

Nechť zobrazení Φ každému bodu *T* nějaké množiny *G* v E_3 přiřazuje bod $X = \Phi(T)$ opět v E_3. Množinu *G* nazýváme oborem zobrazení Φ.

Zavedeme-li označení $[x_1,x_2,x_3] = \Phi(t_1,t_2,t_3)$

a
$$x_1 = \varphi_1(t_1,t_2,t_3)$$
$$x_2 = \varphi_2(t_1,t_2,t_3)$$
$$x_3 = \varphi_3(t_1,t_2,t_3)\,.$$

Předpokládáme, že funkce $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ mají spojité parciální derivace.

Determinant
$$D_\Phi(T) = \frac{D(x_1,x_2,x_3)}{D(t_1,t_2,t_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1(T)}{\partial t_1} & \frac{\partial\varphi_1(T)}{\partial t_2} & \frac{\partial\varphi_1(T)}{\partial t_3} \\ \frac{\partial\varphi_2(T)}{\partial t_1} & \frac{\partial\varphi_2(T)}{\partial t_2} & \frac{\partial\varphi_2(T)}{\partial t_3} \\ \frac{\partial\varphi_3(T)}{\partial t_1} & \frac{\partial\varphi_3(T)}{\partial t_2} & \frac{\partial\varphi_3(T)}{\partial t_3} \end{vmatrix}$$

nazýváme funkčním *Jacobiovým determinantem* („jakobiánem“).

Pro substituci v trojném integrálu za určitých předpokladů platí:

$$\iiint_{\Phi(T)} f(x)dx = \iiint_{G} f(\Phi(T))\left|D_{\Phi}(T)\right|dT$$

Pozn.: Polární souřadnice:

$x = r.\cos\upsilon\cos\varphi$

$y = r.\cos\upsilon\sin\varphi$ pak $D_{\Phi}(r_1,\varphi,\upsilon) = r^2\cos\upsilon$

$z = r.\sin\upsilon$

Pozn.: Cylindrické souřadnice:

$x = r.\cos\varphi$

$y = r.\sin\varphi$ pak $D_{\Phi}(r,\varphi,u) = r$

$z = u$

Aplikace trojného integrálu

- hmotnost *m* tělesa *V*, které má v bodě $[x,y,z]\in V$ hustotu *ρ(x,y,z)* se vypočte
  $m = \iiint_V \rho(x,y,z)dxdydz.$

- pro těžiště:

$$x_0 = \frac{1}{m}\iiint_V x\rho(x,y,z)dxdydz$$

$$y_0 = \frac{1}{m}\iiint_V y\rho(x,y,z)dxdydz$$

$$z_0 = \frac{1}{m}\iiint_V z\rho(x,y,z)dxdydz$$

- pro moment setrvačnosti:
  k ose *o*:

$$I_0 = \iiint_V R^2\rho(x,y,z)dxdydz$$

k osám *x*: $I_x = \iiint_V (y^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz$

y: $I_y = \iiint_V (x^2+z^2)\rho(x,y,z)dxdydz$

z: $I_z = \iiint_V (x^2+y^2)\rho(x,y,z)dxdydz$