

Def. 1.6.

Báze $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ Eukl. vektorového prostoru nazveme ortonormální pokud platí:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0 \quad \text{pro } i \neq j$$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = 1 \quad \text{pro } \forall i$$

Pozn.

Vektor $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \in E_3$ je možno v ortonormální bázi vyjádřit

$$\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3$$

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$$

$$\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$$

$$\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$$

Vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ obvykle značíme $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. (v Kartézském souř. systému)

Pak $\vec{u} = u_1 \vec{i} + u_2 \vec{j} + u_3 \vec{k}$, kde $u_1 \vec{i}, u_2 \vec{j}, u_3 \vec{k} \dots$ ozn. složky vektoru.

Koeficienty lin. kombinace u_1, u_2, u_3 ozn. jako souřadnice vektoru.

Pravotočivá (kladná), levotočivá (záporná) báze.

VEKTORY V GEOMETRII

Geom. vektor – množina všech orientovaných úseček, které mají stejnou délku a jsou souhlasně rovnoběžné.

Def. 1.7.

Dva nenulové vektory \vec{a}, \vec{b} se nazývají **kolineární**, jestliže jejich umístění jsou rovnoběžná.

Def. 1.8.

Tři nebo více nenulových vektorů se nazývají **koplanární**, jestliže každý z nich je rovnoběžný s touž rovinou.

Věta 1.6.

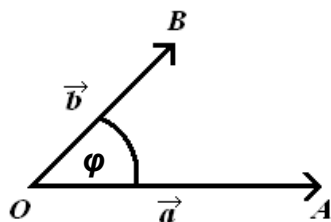
Dva nenulové vektory \vec{a}, \vec{b} jsou lineárně závislé, právě když jsou kolineární.

Věta 1.7.

Tři nenulové vektory v prostoru jsou lineárně závislé, právě když jsou koplanární.

Def. 1.9.

Úhlem φ dvou nenulových nekolineárních vektorů \vec{a} , \vec{b} nazýváme dutý úhel polopřímek \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} .

**Def. 1.10.**

Skalárním součinem $\vec{a} \cdot \vec{b}$ definujeme výraz $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$.

Def. 1.11.

Vektorový součin $\vec{a} \times \vec{b}$ je vektor \vec{c} , pro který platí:

- $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$
- $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$
- vektor \vec{c} je orientován tak, že vektory \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} tvoří kladnou (pravotočivou) bázi.

Věta 1.8.

Pro vektorový součin $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ daných souřadnicemi v ortonormální bázi platí:

$$\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \cdot \vec{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \cdot \vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \cdot \vec{k}$$

Věta 1.9.

Vektorový součin má tyto vlastnosti:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$k \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (k \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (k \cdot \vec{b})$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

Def. 1.12.

Smíšeným součinem 3 vektorů $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nazýváme $[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Věta 1.10.

Pro smíšený součin daných vektorů v ortonormální bázi platí:

$$[\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Def. 1.13.

Dvojným součinem tří vektorů $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nazýváme vektor:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} &= \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \\ &= \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{a}(\vec{b} \cdot \vec{c}) \end{aligned}$$

Pozn. Transformace souřadnic vektoru – máme

$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ v bázi $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ (souřadnice vektoru \vec{v} bázi nečárkované)

$\vec{v} = (v'_1, v'_2, v'_3)$ v bázi $(\vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \vec{u}'_3)$ (souřadnice toho stejného vektoru v bázi čárkované)

Nyní souřadnice vektorů čárkované báze v nečárkované bázi:

$$\vec{u}'_1, \vec{u}'_2, \vec{u}'_3 \text{ v bázi } (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3): \quad \vec{u}'_1 = (u_{1_1}, u_{1_2}, u_{1_3})$$

$$\vec{u}'_2 = (u_{2_1}, u_{2_2}, u_{2_3})$$

$$\vec{u}'_3 = (u_{3_1}, u_{3_2}, u_{3_3})$$

Pak pro přechod mezi souřadnicemi nečárkovanými a čárkovanými vektoru \vec{v} platí:

$$v_1 = v'_1 u_{1_1} + v'_2 u_{2_1} + v'_3 u_{3_1}$$

$$v_2 = v'_1 u_{1_2} + v'_2 u_{2_2} + v'_3 u_{3_2}$$

$$v_3 = v'_1 u_{1_3} + v'_2 u_{2_3} + v'_3 u_{3_3}$$