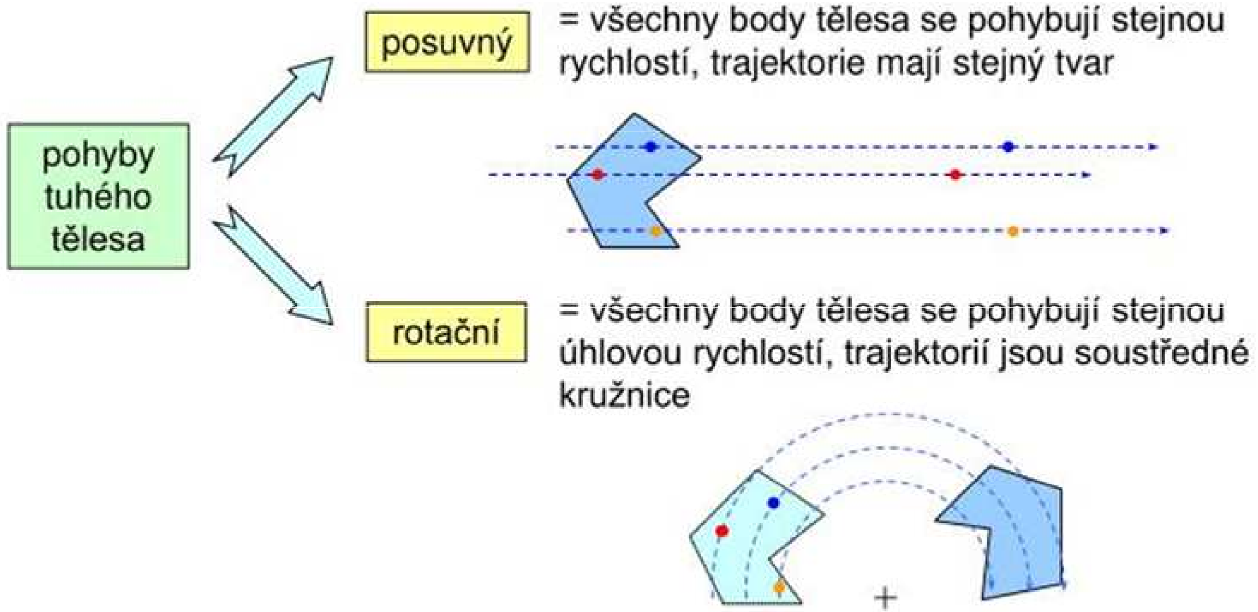
Mechanika tuhého tělesa

Tuhé těleso

Tato část mechaniky se zabývá pohyby tělesa, při kterých těleso nelze nahradit hmotným bodem, tzn. nelze zanedbat jeho rozměry a tvar a musí se uvažovat otáčivý pohyb tělesa. Na těleso působící síly ve skutečnosti mohou mít i deformační účinky. Proto si reálné těleso nahradíme tuhým tělesem, u kterého deformační účinky zanedbáváme.

Tuhé těleso: nemění účinkem vnější síly svůj tvar ani objem. Dokonale tuhá tělesa ve skutečnosti neexistují, existují jen **tělesa „pevná“**, jejichž tvar, resp. objem, se účinkem sil nepatrně mění. Pohyb tuhého tělesa se vždy skládá z **pohybu posuvného** (translace) a **pohybu otáčivého** (rotace).

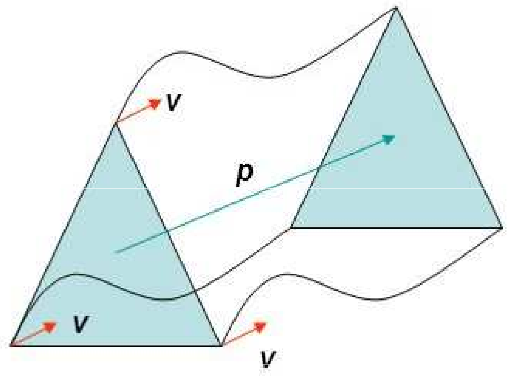


V praxi dochází ke skládání obou pohybů v jeden.

Skládání pohybů není obecně komutativní.

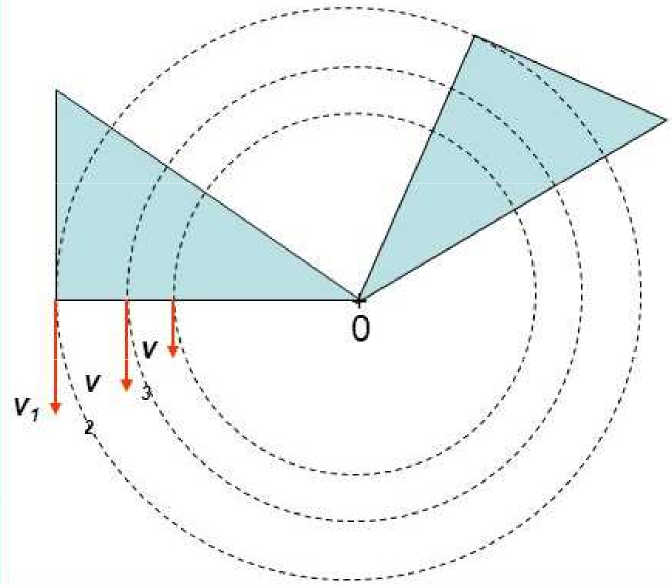
POHYB TUHÉHO TĚLESA

- **translační = posuvný :**
  - všechny body tělesa mají stejnou rychlost a opisují stejné trajektorie
  - každá přímka pevně spojená s tělesem je stále rovnoběžná se svou původní polohou



Tuhé těleso může konat složený pohyb (posuvný i otáčivý současně).

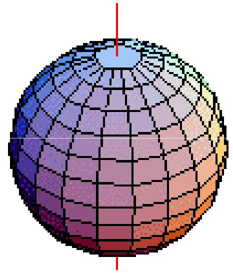
- **rotační = otáčivý :**
  - těleso rotuje kolem pevné osy
  - všechny body mají v daném okamžiku stejnou úhlovou rychlost ω, *ale různou okamžitou rychlost* ($v=r.\omega$)
  - jednotlivé body opisují soustředné kružnice se středem v ose otáčení



Železniční vagón jedoucí po přímé trati, bedna posunovaná po podlaze, píst ve spalovacím motoru, …

Vodovodní kohoutek, dveře, ventilátor, brusný kotouč, CDčko v mechanice počítače, …

Rotační (otáčivý) pohyb



Rotační (otáčivý) pohyb čili otáčení (rotace) kolem osy je takový pohyb tuhého tělesa, při kterém se všechny body tělesa otáčejí kolem jedné společné osy se stejnou úhlovou rychlostí. Otáčivý pohyb může vykonávat i těleso, které není tuhé, pak mluvíme například o diferenciální rotaci.

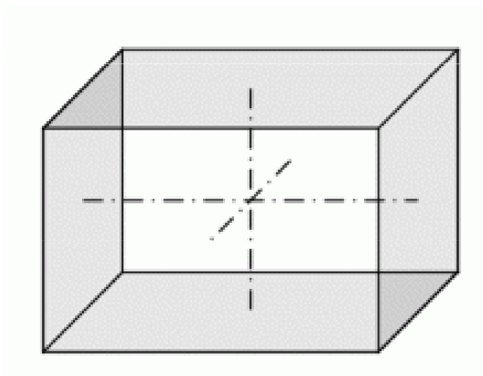
Trajektoriemi jednotlivých bodů tělesa jsou kružnice (nebo jejich části), jejichž středy leží na (okamžité) ose otáčení.

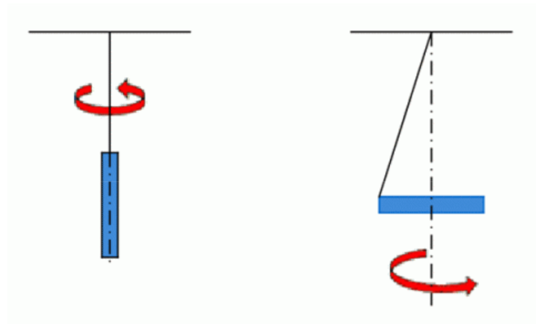
Jako **osa otáčení** se označuje přímka, kolem které se těleso při otáčivém pohybu otáčí. Body tělesa, které na ose leží, zůstávají na svých místech, jejich rychlost je nulová. Při otáčivém pohybu se rozlišuje pohyb kolem **pevné osy** nebo kolem **okamžité (volné) osy**.

Otáčení kolem pevné osy. Všechny body ležící na ose otáčení jsou při tomto pohybu v klidu. Při otáčení kolem pevné osy má osa stálý směr a všechny body tělesa kolem ní opisují kruhové oblouky se středem na ose otáčení. Všechny body tělesa mají stejnou úhlovou rychlost $\omega = d\varphi/dt$ a stejné úhlové zrychlení dané vztahem $\varepsilon = d\omega/dt$.

Při otáčení tělesa kolem nehybné osy působí na jednotlivé body tělesa **setrvačné síly**, směřující od osy otáčení: **odstředivá síla** způsobená nerovnoměrným rozložením hmotnosti vzhledem k ose rotace, a **deviační moment** snažící se vychýlit osu rotace tak, aby hmotnost byla rozložena rovnoměrně i podél osy rotace. Tyto síly jsou vyrovnávány reakcemi v ložiscích os (ložiska jsou tak jedny z nejnamáhanějších strojních součástí). Proto se otáčivé části strojů, kola motorových vozidel apod. vyvažují tak, aby osa otáčení procházela těžištěm.

Pokud osa rotace mění svou polohu v prostoru, je velikost úhlové rychlosti opět dána vztahem $\omega = d\varphi/dt$. V takovém případě se hovoří **o otáčení kolem okamžité (volné) osy**. Při obecném pohybu změní po určité době okamžitá osa rotace svou polohu v prostoru a nová poloha je s předchozí polohou obecně mimoběžná.
Všechny osy souměrnosti tělesa jsou volnými osami. Každé tuhé těleso má alespoň tři volné osy. Volné osy tělesa se protínají v těžišti a jsou navzájem kolmé. Když se těleso otáčí kolek kterékoliv z nich , je výslednice setrvačných sil nulová a stejně je nulový i moment síly.





Prochází–li osa otáčení **těžištěm** tělesa a zároveň má směr některého z hlavních **momentů setrvačnosti** tělesa, otáčí se kolem ní těleso bez toho, aby na ložiska působilo nějakými dodatečnými silami (kromě tíhové síly). Těleso trvale rotuje kolem této osy, dokonce i když k ní není upevněno.

Pro těleso, otáčející se kolem volné osy, platí **zákon setrvačnosti**. Nepůsobí–li na těleso vnější síly, zachovává se úhlová rychlost a také směr osy otáčení vzhledem k inerciální vztažné soustavě.

Otáčení tělesa je stabilní kolem volných os s největším a nejmenším momentem setrvačnosti, nejstabilnější pak kolem osy, vzhledem ke které má těleso největší moment setrvačnosti. Poznatky o volných osách se využívají při konstrukci rotujících součástí strojů a zařízení – rotory, setrvačníky.

Vzájemně si odpovídající veličiny při přímočarém a rotačním pohybu

Všechny veličiny posuvného pohybu mají své protějšky pro rotační pohyb.

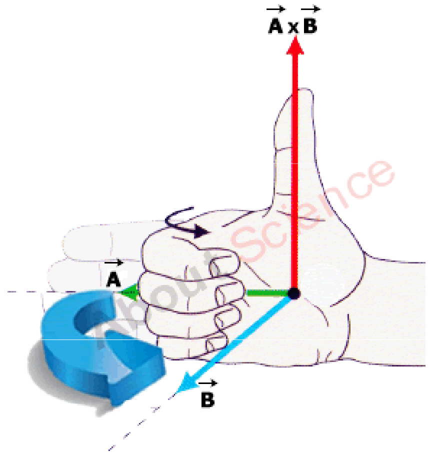
translační pohyb		rotační pohyb	
element dráhy	$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$, $\mathrm{d}s$	element úhlové dráhy	$\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$
rychlost	$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$	úhlová rychlost	$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t}$
zrychlení	$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$	úhlové zrychlení	$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}$
hmotnost	m	moment setrvačnosti	J
síla	$\boldsymbol{F}$	moment síly	$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$
hybnost	$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$	moment hybnosti	$\boldsymbol{L} = J\boldsymbol{\omega}$
I. impulsová věta	$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}$	II. impulsová věta	$\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t}$
pohybová rovnice	$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$	pohybová rovnice	$J\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{M}$
element práce	$\mathrm{d}W = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$	element práce	$\mathrm{d}W = \boldsymbol{M} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}$
výkon	$P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$	výkon	$P = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\omega}$
kinetická energie	$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2$	kinetická energie	$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}J\omega^2$

Přímočarý	Rotační
Souřadnice $\vec{x}$	**Úhel** $\vec{\alpha}$
Rychlost $\vec{v} = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$	**Úhlová rychlost** $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\alpha}(t)}{dt}$
Zrychlení $\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2}$	**Úhlové zrychlení** $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{\alpha}(t)}{dt^2}$
Hybnost $\vec{p} = m\vec{v}$	**Moment hybnosti** $\vec{H} = \vec{r} \times \vec{p}$
Síla $\vec{F} = \frac{d\vec{p}(t)}{dt} = m\vec{a}$	**Moment síly** $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = J\vec{\varepsilon}$
Hmotnost M	**Moment setrvačnosti** J
Energie $E = \frac{mv^2}{2}$	**Energie** $E = \frac{J\omega^2}{2}$

Moment síly vzhledem k ose otáčení

Má-li se těleso uvést do otáčivého pohybu, musí se na něj působit silou. **Otáčivý účinek síly** závisí kromě velikosti a směru působící síly také na **poloze jejího působiště**. Je charakterizován vektorovou fyzikální veličinou nazvanou **moment síly vzhledem k ose otáčení** (**M**), jednotka N.m.

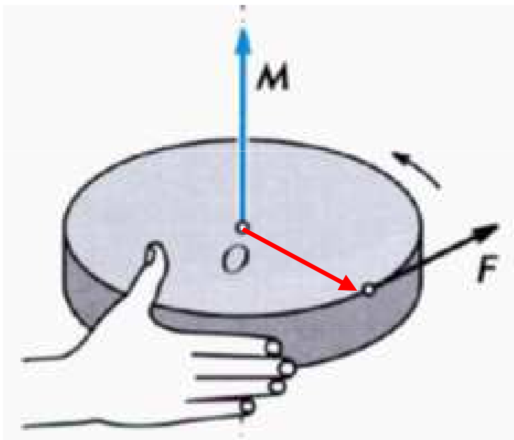
Moment síly *M* lze vyjádřit pomocí vektorového součinu:

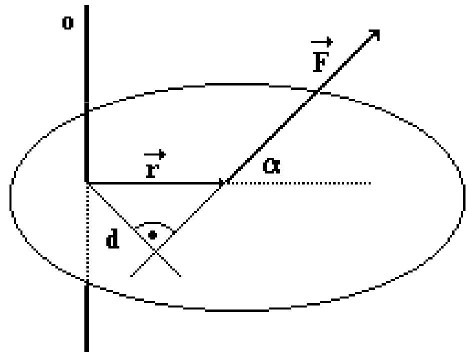


$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

kde ***r*** je polohový vektor působiště síly ***F*** vzhledem k ose otáčení jako počátku.

Směr momentu síly M je určen pravidlem pravé ruky

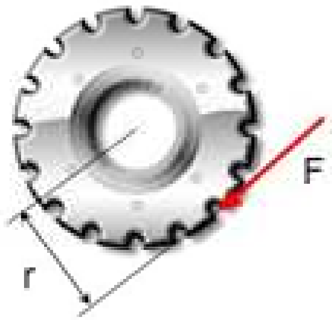


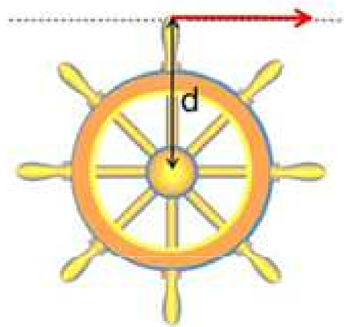


Působí-li síla otáčení tělesa *ve směru hodinových ručiček*, má příslušný moment síly znaménko <u>záporné</u>. Působí-li síla otáčení tělesa *proti směru hodinových ručiček*, moment síly má znaménko <u>kladné</u>.

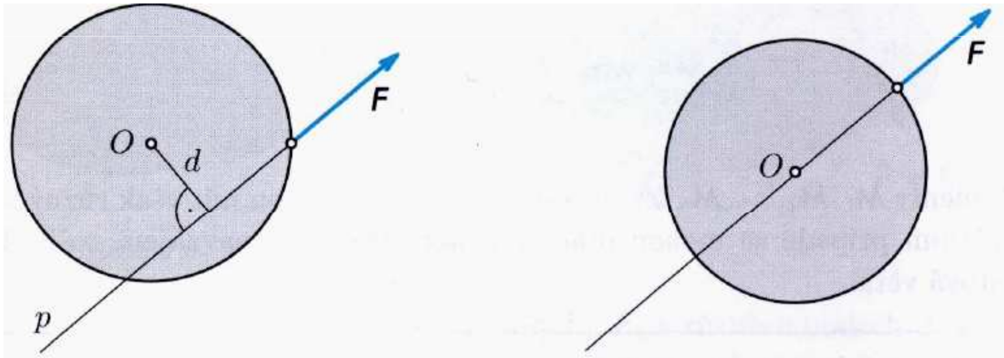
Velikost momentu síly *M* je

$$M = F\,.\,d = F\,.r\,.\sin\alpha$$





Při konstantní síle je velikost momentu **M** tím větší, čím větší je **rameno síly** *d*. <u>Prochází-li vektorová přímka osou otáčení</u>, je d = 0 a **M** = 0 a <u>síla</u> **F** <u>nemá na těleso otáčivý účinek</u>.



Momentová věta

V praxi na těleso působí často současně **více sil.** Potom je jejich celkový otáčivý účinek určen **výsledným momentem**

$$\mathbf{M = M_1 + M_2 + \ldots + M_n}$$

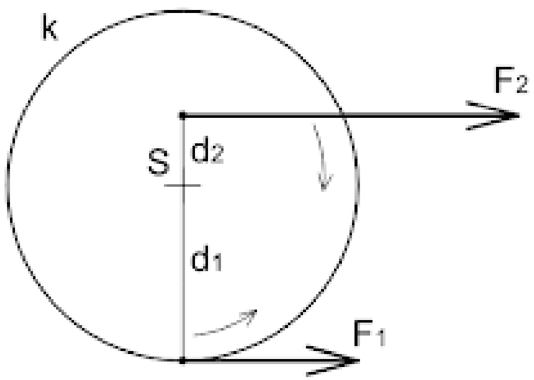
Momentová věta

Momentová věta vyjadřuje rovnováhu sil působících na těleso.

Otáčivý účinek sil působících na tuhé těleso otáčivé kolem nehybné osy se ruší, jestliže vektorový součet momentů všech sil vzhledem k ose otáčení je nulový vektor.

$$\mathbf{M_1 + M_2 + \ldots + M_n = 0}$$

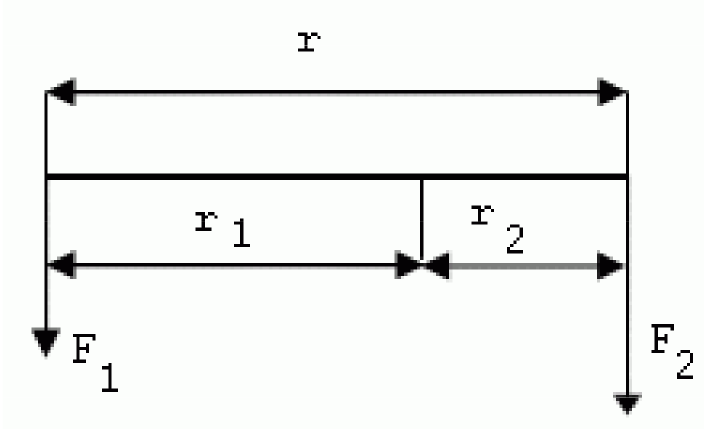
V tomto případě těleso zůstává v klidu nebo rovnoměrném otáčivém pohybu.



$$M = M_1 + M_2 + \ldots + M_n = 0$$
$$F_1 d_1 = -F_2 d_2$$

Příklad

Tyč má délku 1,2 m. Na její koncích jsou zavěšeny závaží s hmotnostmi 5 kg a 7 kg. Kde je třeba tyč podepřít, aby zůstala v rovnováze?



r = 1,2 m
m1 = 5 kg
m2 = 7 kg
F1= 50N
F2= 70N

$50.r_1 = 70.r_2$
$50.r_1 = 70.(1,2-r_1)$
$50.r_1 = 84-70.r_1$
$120.r_1 = 84$

$r_1+r_2=r$
$F_1.r_1 = F_2.r_2$
$r_1 + r_2 = 1,2 \Rightarrow r_2 = 1,2-r_1$

$r_1 = \underline{0,7m}$, $r_2 = \underline{0,5m}$

Příklad

Na uvolnění matice je potřebný moment síly 5 N.m. Jak velkou silou musíme působit, pokud máme klíč dlouhý 10 cm?

M = 5 N.m
R = 10 cm = 0,1m
F = ?

$M = F \bullet r$

$F = M/r = 5/0,1 = \underline{50\ N}$

Dvojice sil

Dvojici sil tvoří dvě stejně velké rovnoběžné síly navzájem opačného směru, které působí ve dvou různých bodech tělesa otáčivého kolem nehybné osy. Obě síly nelze nahradit silou jedinou, jejich výslednice je nulová.

Přesto má dvojice sil na těleso otáčivý účinek, který vyjadřuje fyzikální veličina **moment dvojice sil** (**D**), vektor ležící v ose otáčení.

Směr momentu dvojice sil

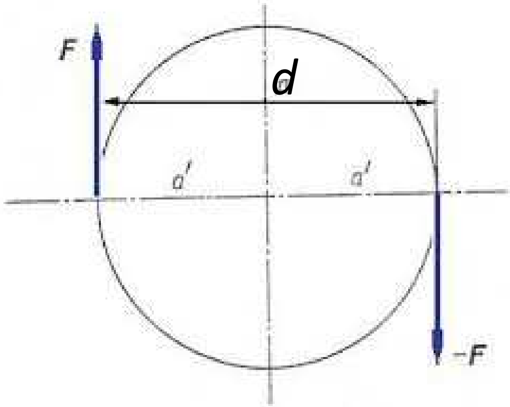
určuje se pravidlem pravé ruky.

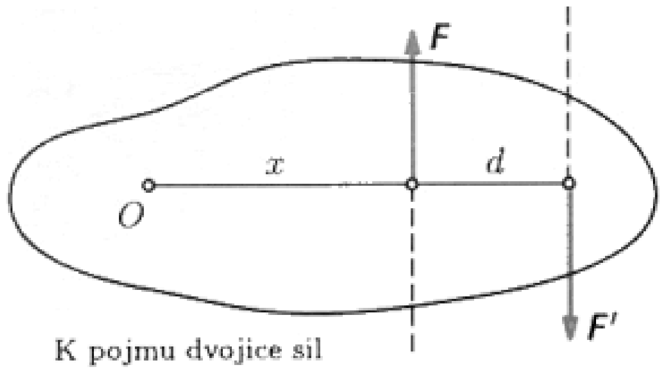
Velikost momentu dvojice sil

je rovna součinu velikosti jedné síly a kolmé vzdálenosti vektorových přímek obou sil (= **rameno dvojice si**l, *d*)

$$D = F \,.\, d$$

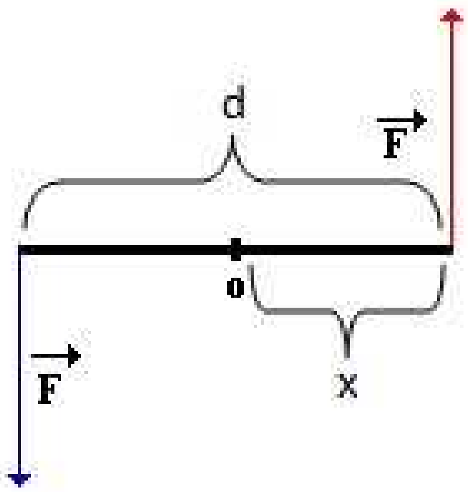
Moment dvojice sil nezávisí na vzdálenosti sil od osy otáčení.





K pojmu dvojice sil

Osa otáčení leží mezi působišti obou sil



$M = M_1 + M_2$

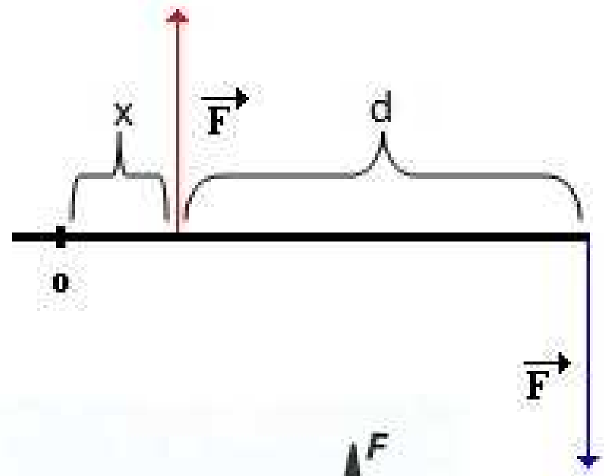
$M = \mathbf{F} \cdot (d - x) + \mathbf{F} \cdot x$

$M = F.d - F.x + F.x$

$M = F.d$

$\mathbf{|M| = F \times d}$

Osa otáčení leží mimo působiště obou sil



$M = \mathbf{M_1} + \mathbf{M_2}$

$M = - M_1 + M_2$

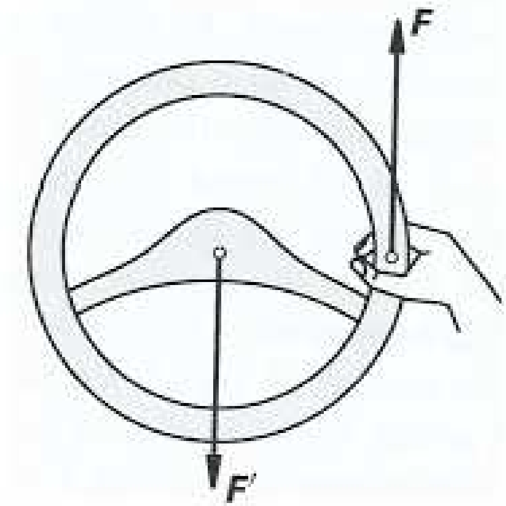
$M = - F \cdot (d+x) + F \cdot x$

$M = - F.d - F.x + F.x$

$M = - F.d$

$\mathbf{|M| = F \times d}$

Osa otáčení leží v působišti jedné síly



$M = \mathbf{M_1} + \mathbf{M_2}$

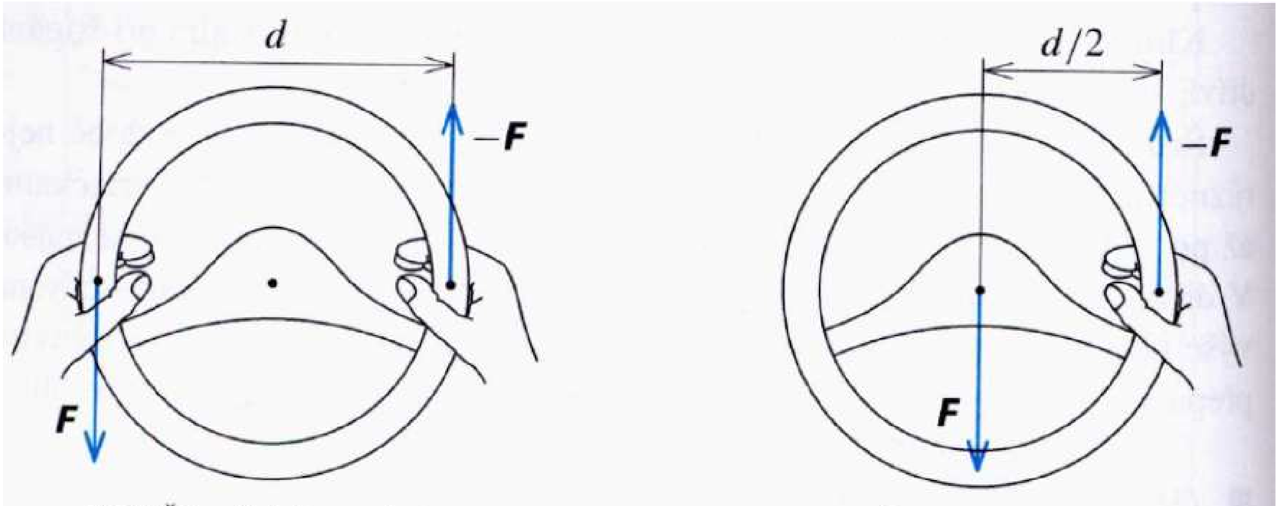
$M = - F.d + F \cdot 0$

$M = - F.d$

$\mathbf{|M| = F \times d}$

Moment dvojice sil

při použití jedné síly je moment poloviční (jedna ruka na volantu)

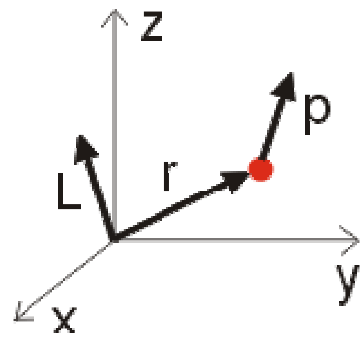


2.65 Řízení oběma rukama

2.66 Řízení jednou rukou

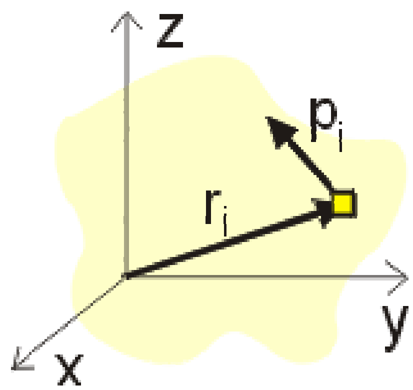
Moment hybnosti (impulsmoment, točivost)

Moment hybnosti L je vektorová fyzikální veličina, <u>charakterizující schopnost tělesa udržovat otáčivý pohyb</u>, určuje se <u>vzhledem k bodu nebo ose</u>.



Moment hybnosti hmotného bodu vzhledem k počátku soustavy souřadnic je <u>vektor</u> určený vektorovým součinem jeho průvodiče **r** a hybnosti **p**

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$



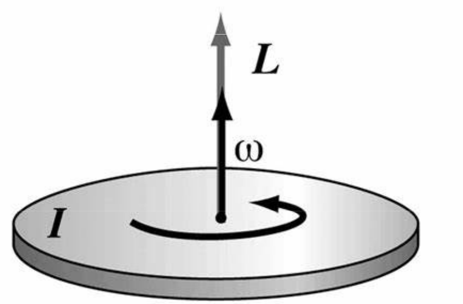
Moment hybnosti tělesa bychom mohli určit tak, že bychom těleso rozdělili na velké množství malých částí a sečetli jejich momenty hybnosti vzhledem k vybrané soustavě souřadnic.

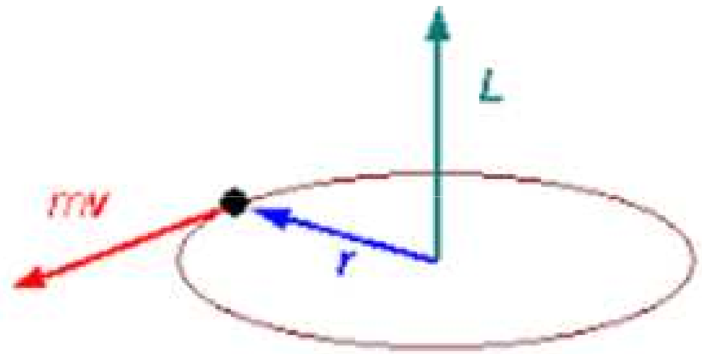
$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

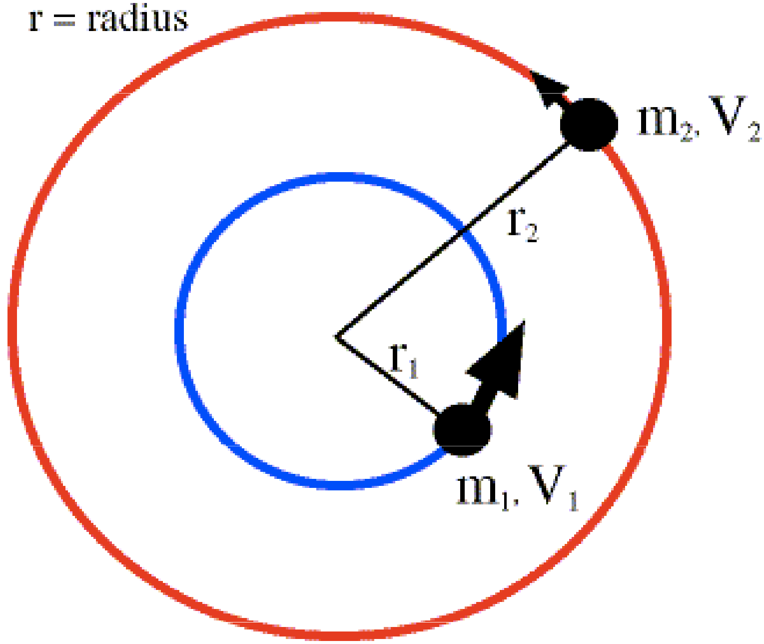
Moment hybnosti tělesa vzhledem k ose

$$L = I\omega = mr^2 \frac{v}{r} = p \cdot r$$

$$L = rp\sin\varphi = rp_t = r_\perp p$$







Druhá věta impulsová vyjadřuje skutečnost, že časová změna momentu hybnosti je rovna celkovému momentu síly působícímu na těleso.

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{M}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{L}_i = \frac{\mathrm{d}\mathbf{L}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(rp)}{dt} = M = rF$$

Důsledkem druhé impulsové věty je **zákon zachování momentu hybnosti** v izolované soustavě.

Zákon zachování momentu hybnosti

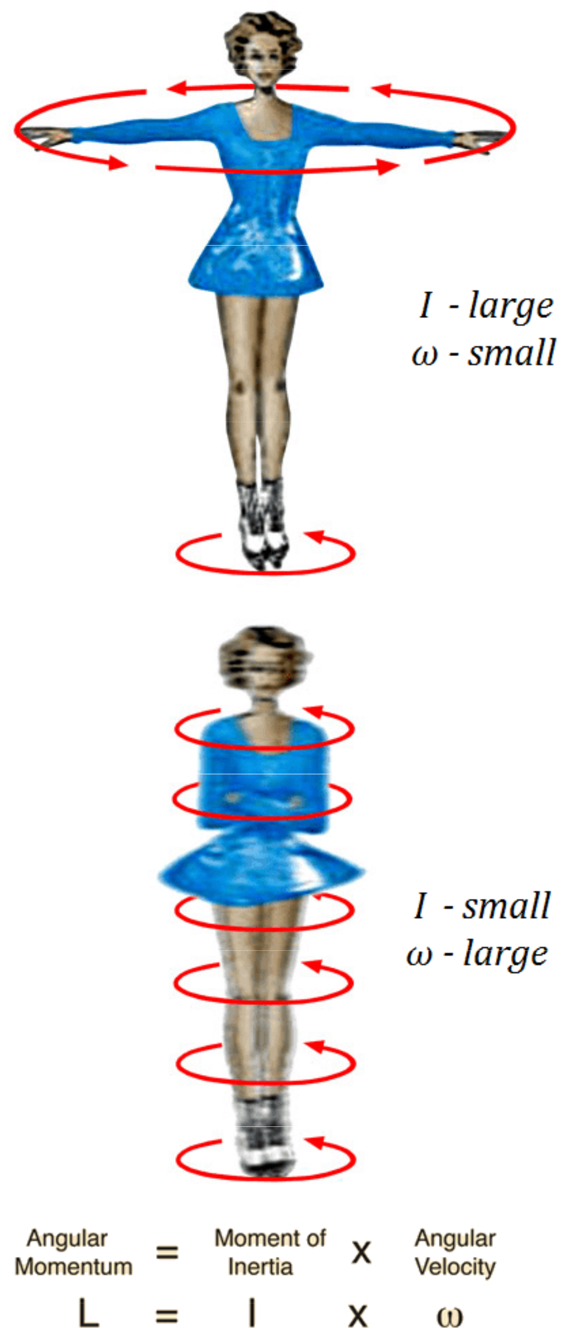
<u>Jestliže na tuhé těleso nepůsobí vnější síly nebo je-li výslednice otáčivých momentů vnějších sil rovna nule, pak moment hybnosti tuhého tělesa zůstává stejný tj. zachovává si velikost i směr.</u>.

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \implies \mathbf{L} = \text{konst.}$$

$$0 = J_1\,\omega_1 + J_2\,\omega_2$$

Pohyb krasobruslaře při piruetě. Při připažení se zmenší moment setrvačnosti, rychlost otáčení naroste tak, aby celkový moment hybnosti zůstal zachován. Upažením se naopak zvětší moment setrvačnosti a úhlová rychlost úměrně tomu poklesne.

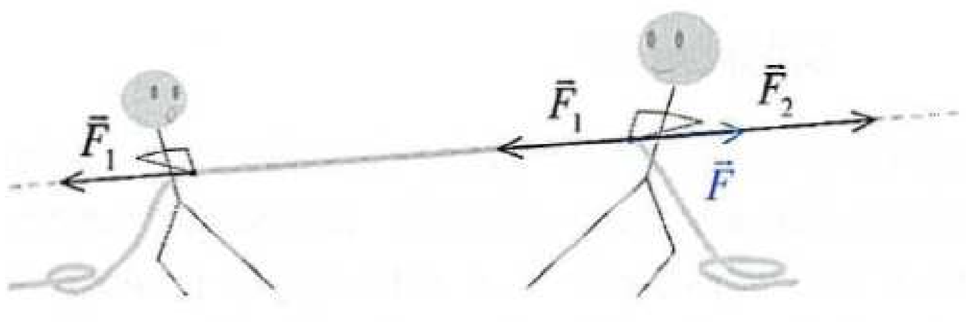
Také u **převodovky** platí, že čím vyšší rychlostní stupeň je zařazený, tím menší točivý moment se dostává na kola. Ale zase stoupají otáčky kola a tím roste i rychlost auta či motocyklu.



Skládání sil

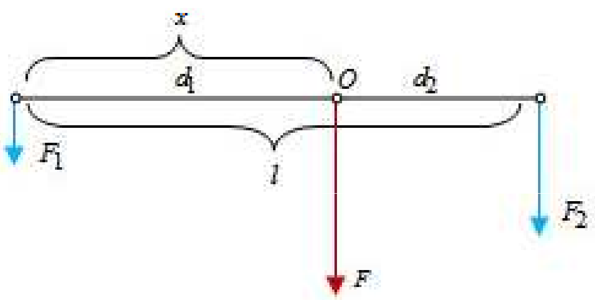
Skládání dvou rovnoběžných sil působících v různých bodech a ležících ve stejné přímce.

Mají-li dvě síly **F**1 a **F**2 různá působiště, ale obě leží v téže přímce, můžeme kteroukoliv z nich posunout do působiště druhé síly a najít výslednici podle vztahu **F** = **F**1 + **F**2. Výslednou sílu **F** můžeme také posunout do libovolného působiště, které leží na vektorové přímce, tj. přímce proložené vektorem **F**.

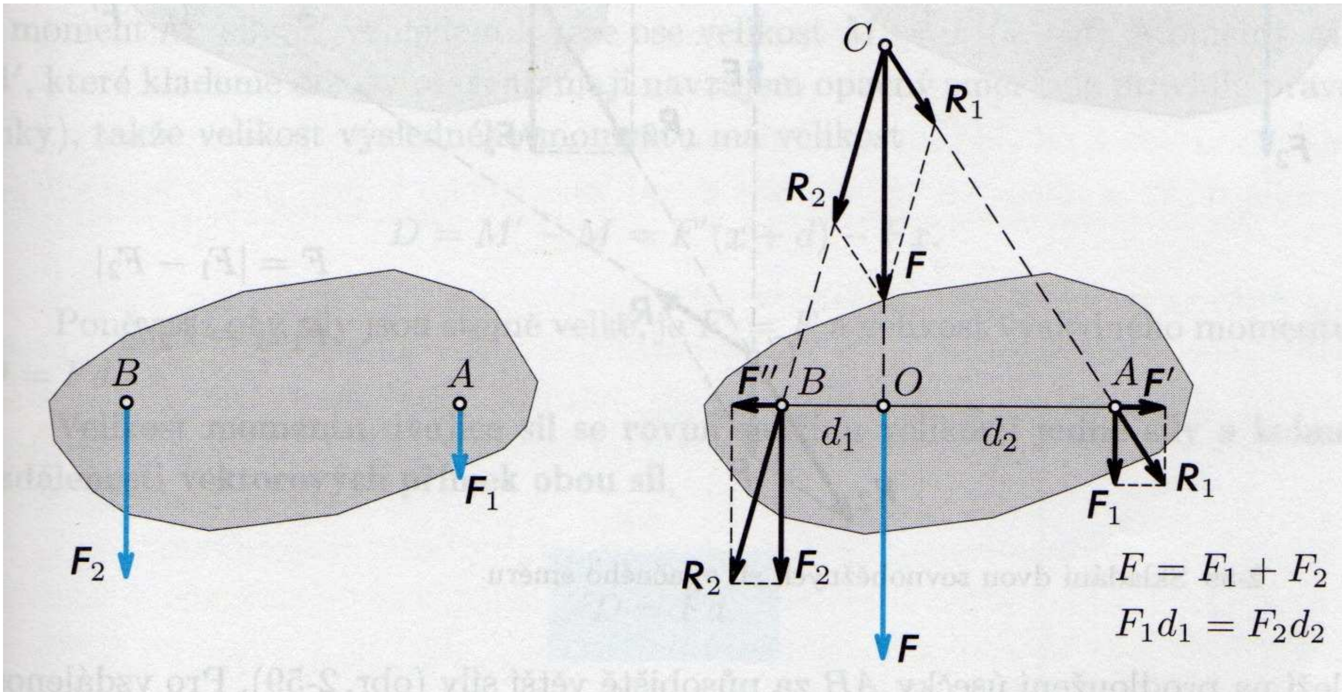


Skládání dvou rovnoběžných sil stejného směru působících v různých bodech

Obě síly nejdříve přeneseme do společného bodu, kterým je průsečík jejich vektorových přímek, pak síly složíme doplněním na vektorový rovnoběžník a výslednou sílu **F** můžeme umístit do libovolného bodu její vektorové přímky síly, např. do bodu O.

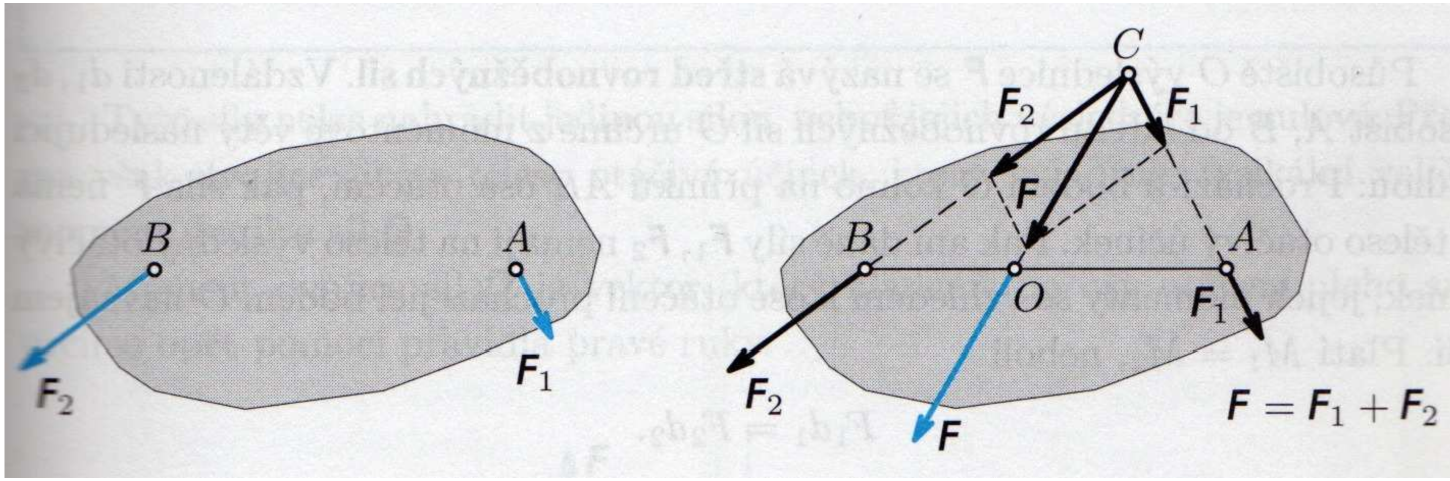


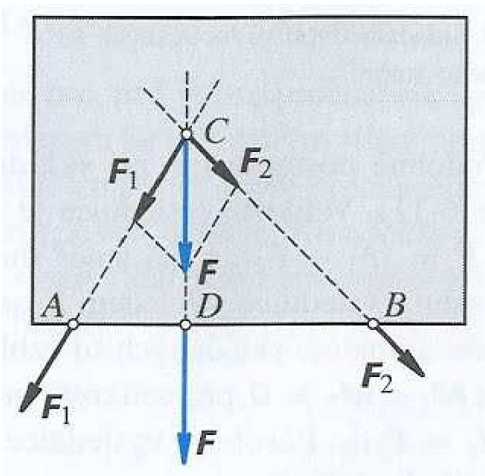
$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

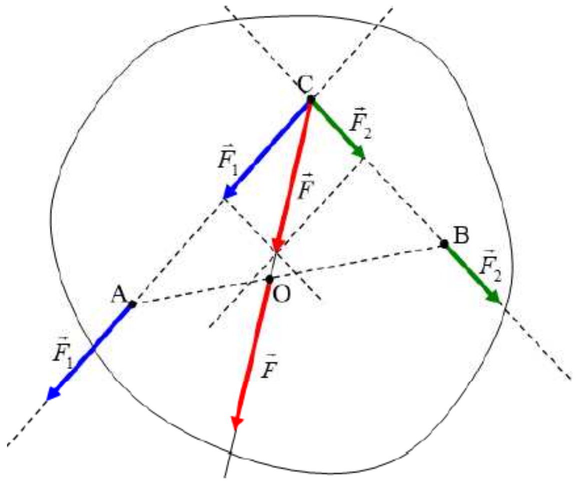


Skládání dvou různoběžných sil působících v různých bodech

Síly **F**1, **F**2 přeneseme po jejich vektorových přímkách do společného působiště, kde je složíme pomocí vektorového rovnoběžníku. Výslednou sílu pak přeneseme po vektorové přímce tak, aby měla působiště na spojnici působišť sil **F**1, **F**2. Působiště O výslednice **F** se jmenuje **střed sil**.



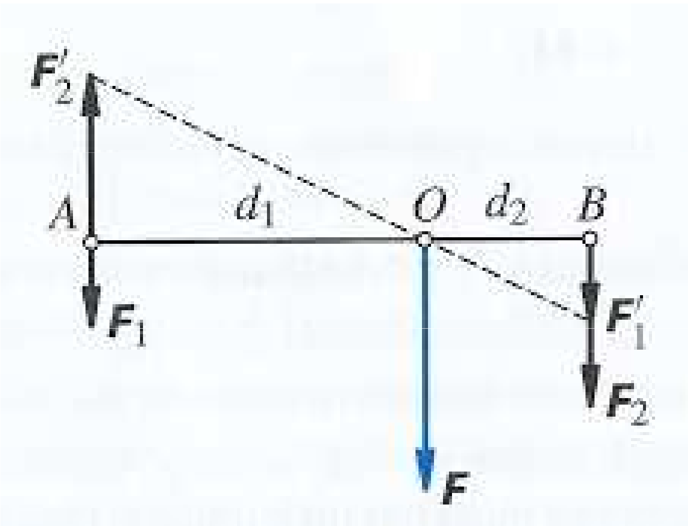


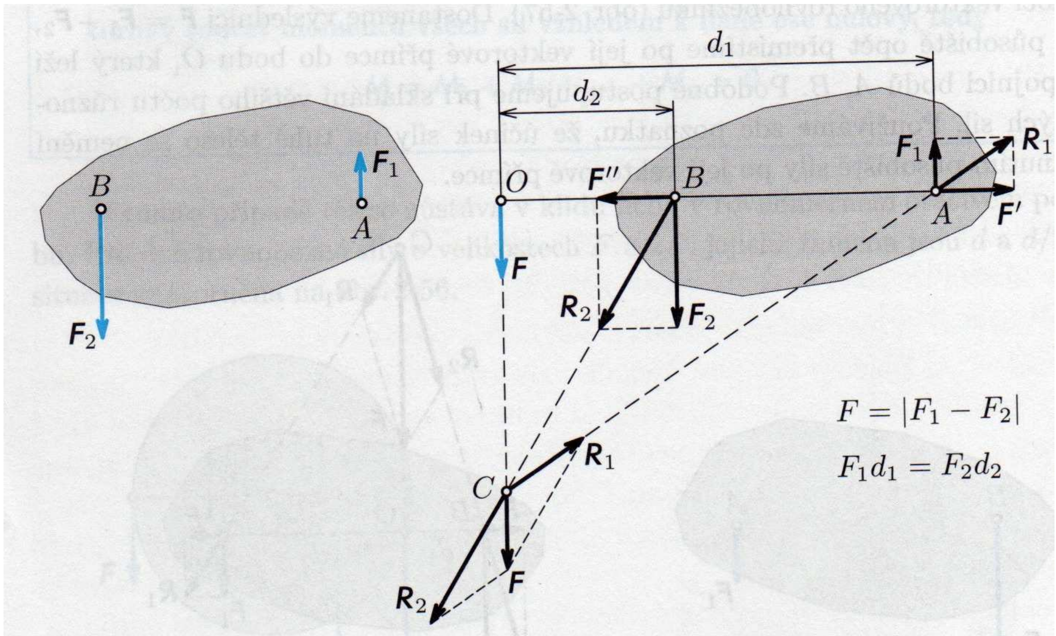


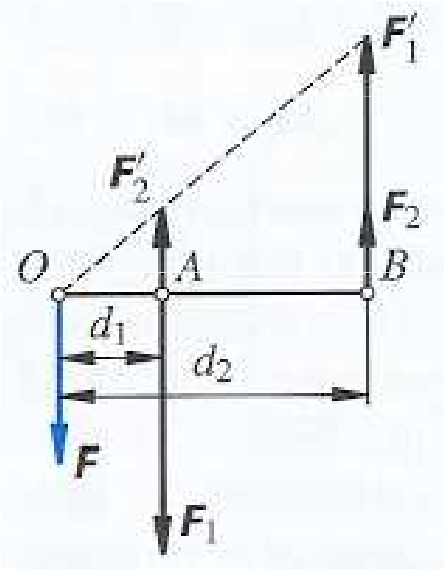
Skládání dvou rovnoběžných sil opačného směru působících v různých bodech

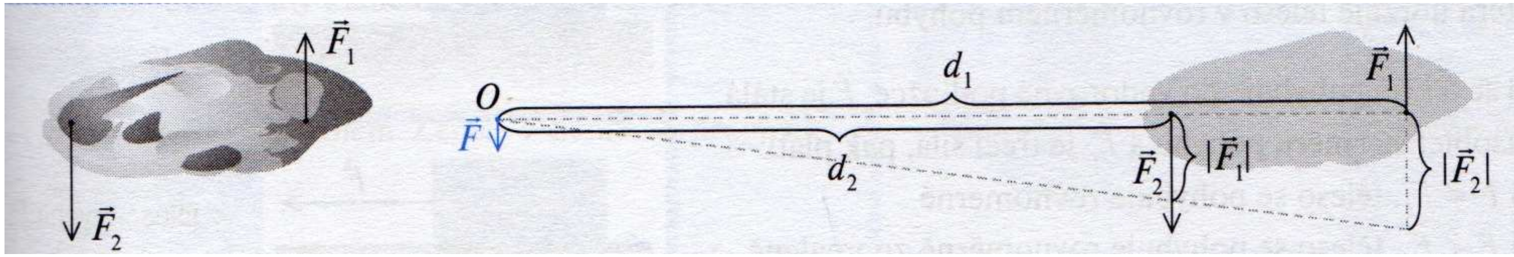
Skládání dvou rovnoběžných sil opačného směru působících v různých bodech na pevné těleso. Výslednice má velikost **F** = **F**2 - **F**1, leží vně obou sil na straně větší síly, s níž je souhlasně rovnoběžná. Vzdálenost působiště výslednice od působišť obou sil je v obraceném poměru sil:

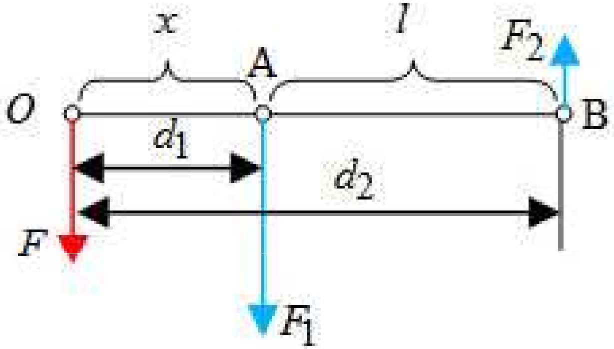
$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1}$$









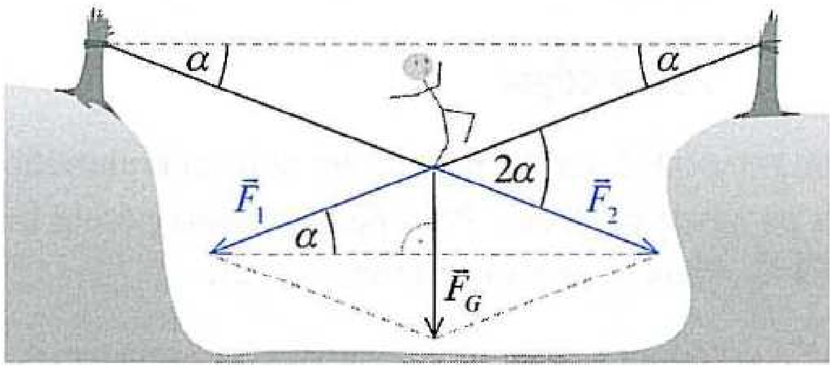


$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

$$x = \frac{F_2 \cdot l}{F_1 - F_2}$$

Rozklad síly do dvou různoběžných sil působících v různých bodech

Rozklad síly **F**g provedeme tak, že počátečním bodem vektoru **F**g vedeme přímky danými směry. Složky **F**1, **F**2 tvoří strany vektorového rovnoběžníku a vycházejí z působiště síly **F**g, která je úhlopříčkou rovnoběžníku.



$\mathbf{F_G = F_1 + F_2}$

$\mathbf{F_G} / 2 = F_1.\sin\alpha$

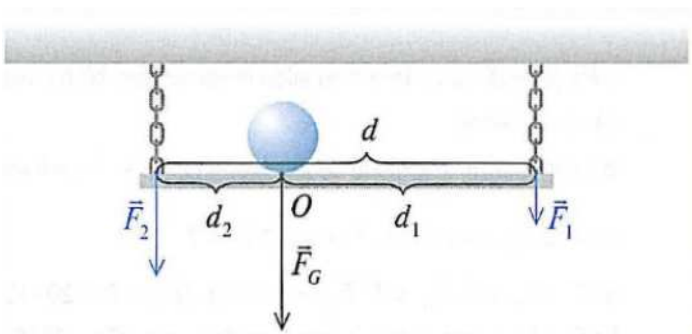
$\mathbf{F_1 = F_2}$

Rozklad síly do dvou rovnoběžných složek působících v různých bodech

Známe-li vzdálenosti působišť obou složek d_1, d_2 od síly **F**g, kterou rozkládáme, pak velikosti složek určíme z rovnic:

$$F_G = F_1 + F_2$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

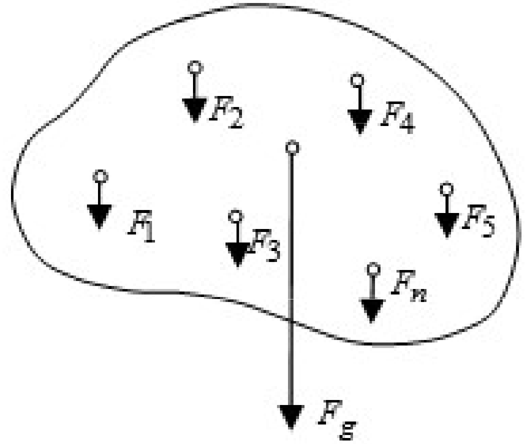


$F_1 = d_2/d \cdot F_G$

$F_2 = d_1/d \cdot F_G$

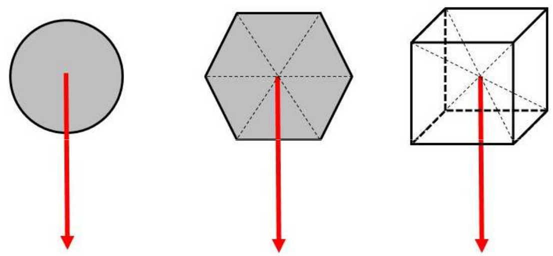
$F_1 d_1 = F_2 d_2$

Těžiště (hmotný střed) tuhého tělesa

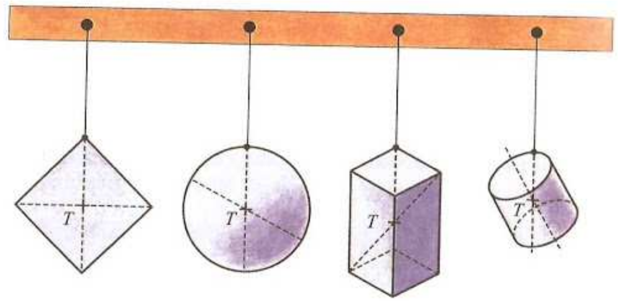


Těžiště tuhého tělesa je **působiště tíhové síly** působící na těleso v homogenním tíhovém poli.

Poloha těžiště závisí na rozložení hmoty v tělese. Pravidelná stejnorodá tělesa (krychle, koule, apod.) mají těžiště ve **středu souměrnosti**.

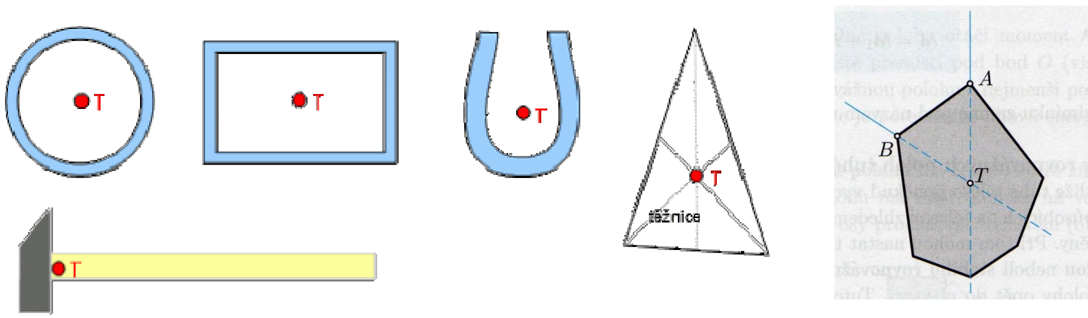


Osově souměrná stejnorodá tělesa (válec, kužel) mají těžiště na **ose souměrnosti**.



U dutých těles, prstenců, obručí a prázdných nádob může těžiště ležet mimo hmotu tělesa.

Jestliže spojíme dvě tělesa v jedno těleso, bude těžiště ležet vždy na úsečce spojující těžiště obou dílčích částí.



Určení polohy těžiště

1. *odhadem*: u stejnorodého geometrického pravidelného tělesa leží těžiště v jeho geometrickém středu (geometrickém těžišti)

2. *experimentálně*: u stejnorodého geometricky nepravidelného tělesa leží těžiště v průsečíku těžnic při postupném zavěšení tělesa v nejméně dvou různých bodech

3. *výpočtem* (jednotlivé souřadnice x_T, y_T, z_T těžiště T se počítají nezávisle na sobě):

$$x_T = \frac{\int x \cdot dm}{m}$$

a to jako podíl integrace *x*-ové souřadnice bodu tělesa podle hmotnosti pro celou hmotnost tělesa *m* (statický moment) a hmotnosti tělesa.

$$x_T = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

Analogické vztahy platí i pro osu y (svislý směr).

Příklad

Určete souřadnice těžiště tří hmotných bodů:

$$x_T(m_1 + m_2) = x_1 m_1 + x_2 m_2$$

$M_1[1, 4]$ $m_1 = 6$ kg

$M_2[13, 1]$ $m_2 = 4$ kg

$M_3[10, 19]$ $m_3 = 5$ kg

$x_T = (6.1 + 4.13 + 5.10)/(6 + 4 + 5) = 36/5 = 7{,}2$

$y_T = (6.4 + 4.1 + 5.19)/(6 + 4 + 5) = 41/5 = 8{,}2$

<u>T[7,2; 8,2]</u>

U některých strojů je velmi důležité, aby jeho **strojní součásti byly zavěšeny nebo upevněny v těžišti**. Tak např. řemenice, ozubená kola, oběžná kola turbín, odstředivá čerpadla apod. musí být upevněna v ose otáčení, jinak vznikají <u>nevyvážené odstředivé síly</u>, které součástky rychle opotřebovávají.

Rovnováha tuhého tělesa

Tuhé těleso je v rovnovážné poloze, jestliže se pohybový účinek všech sil působících na těleso navzájem ruší a těleso je v klidu. Např.
Těleso zavěšené nad těžištěm tak, že těžnice prochází bodem závěsu, tíhová síla působící na těleso se ruší pevností závěsu.
U tělesa podepřeného pod těžištěm, tíhová síla se ruší pevností opory.

Podmínky rovnováhy tuhého tělesa
Aby bylo těleso v rovnovážné poloze musí být splněny 2 základní podmínky:

Podmínka rovnováhy sil: Těleso je v rovnovážné poloze, je-li výslednice sil působících na těleso nulová.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n = 0$$

Podmínka rovnováhy momentů sil: Těleso otáčivé kolem nehybné osy je v rovnovážné poloze, je-li výsledný moment všech sil působících na těleso nulový (momentová věta).

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \ldots + \mathbf{M}_n = 0$$

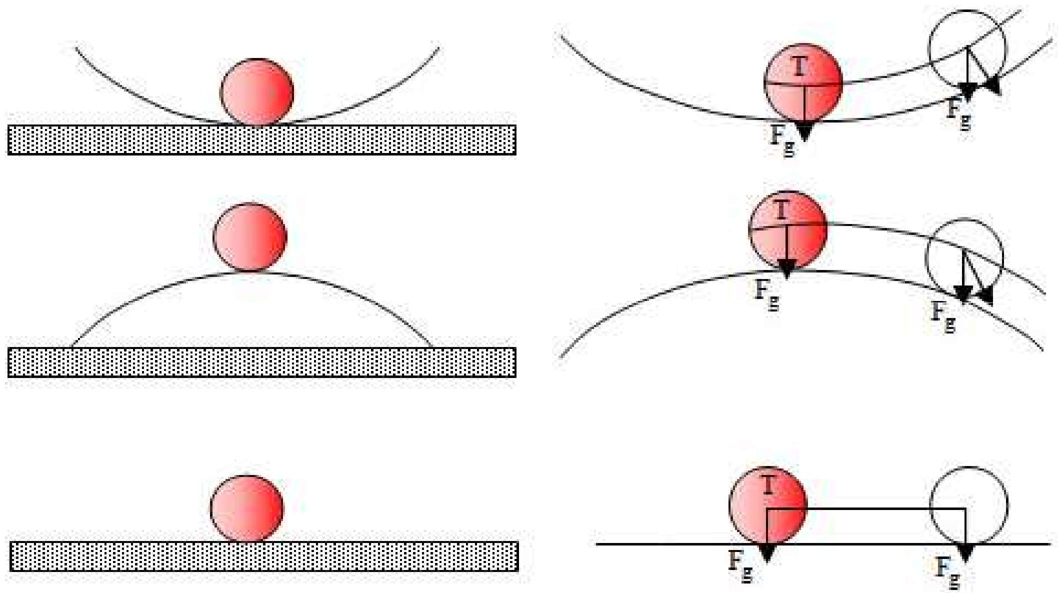
Rovnovážné polohy tuhého tělesa

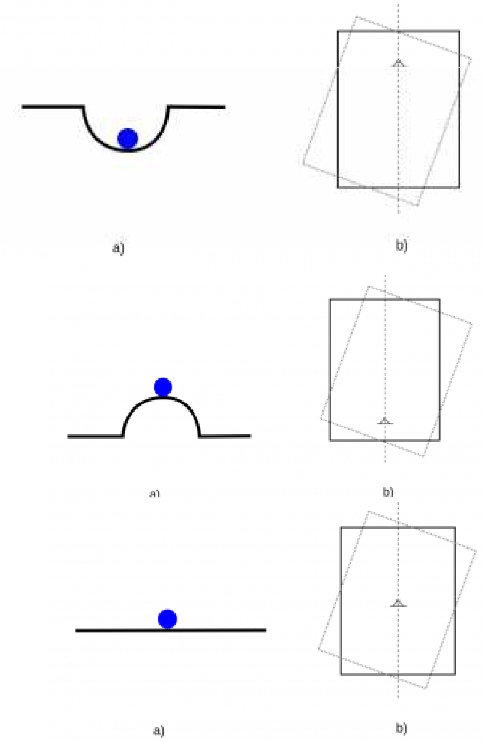
Tuhé těleso je v **rovnovážné poloze**, jestliže Tělesa upevněná v těžišti nekonají ani posuvný, ani otáčivý pohyb, jsou v rovnováze.

1. **Stabilní (stálá)**: těleso se po vychýlení vrací zpět do rovnovážné polohy.

2. **Labilní (vratká)**: u tělesa se po vychýlení zvětšuje výchylka, těleso se samo do rovnovážné polohy nevrátí, tíhová síla působí na zvětšování výchylky.

3**. Indiferentní (volná)**: těleso po vychýlení zůstává v nové poloze, výška těžiště nad zemským povrchem se nemění.



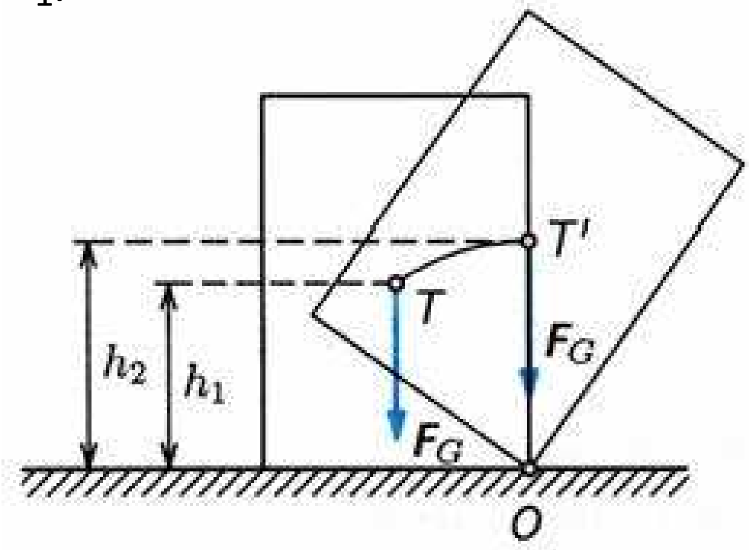


Stabilita mechanické soustavy

Stabilita je schopnost tělesa odolávat převrácení. *Těleso podepřené na ploše* je ve stálé rovnovážné poloze, jestliže svislá **těžnice** prochází podstavou tělesa. Stabilita je tím větší, čím se těžiště nachází níže. Veličinou udávající míru stability (stálosti rovnovážné polohy) mechanické soustavy (někdy zkráceně nazývanou stabilita) je rozdíl potenciální energie tělesa mezi vratkou a stálou rovnovážnou polohou, neboli minimální množství práce, které je třeba vykonat, aby se soustava ze stálé rovnovážné polohy dostala do vratké rovnovážné polohy. V tomto smyslu např. stabilita tuhého tělesa v tíhovém poli závisí přímo úměrně na hmotnosti tělesa, nepřímo úměrně na výšce těžiště ve stálé poloze a přímo úměrně na výšce těžiště ve vratké poloze.

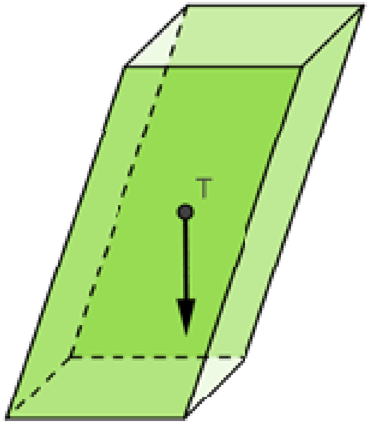
$$W = F_g.(h_2 - h_1) = m.g.(h_2 - h_1)$$

Stabilita podepřeného tělesa je tím větší, čím větší je hmotnost tělesa, čím níže je jeho těžiště a čím větší vzdálenost svislé těžnice od překlápěcí hrany. Proto mají velkou stabilitu zejména těžká tělesa s nízko položeným těžištěm a s velkou plochou podstavy.



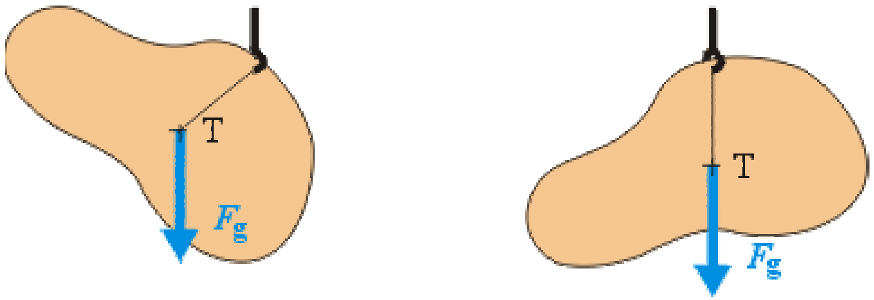
Z tohoto důvodu se např. ke strojům zhotovují litinové podstavce se základnou o velkém plošném obsahu. Stavby mívají betonové základy zapuštěné do země.

Stojící těleso je ve stabilní poloze jen tehdy, probíhá–li svislá přímka spuštěná z těžiště základnou tělesa. Jestliže by svislá přímka jdoucí těžištěm nesměřovala nad základnu, těleso by se převrhlo. Stejným způsobem můžeme vysvětlit stabilitu šikmé věže v Pise nebo v Bologni.



Jako míra stability jednoho tělesa se v některých případech namísto potenciální energie používá minimální moment síly, který je potřeba k tomu, aby těleso překlopil do polohy, ze které se již nevrátí do polohy původní. U **těles zavěšených** v libovolném bodě dokud není těžiště kolmo pod bodem zavěšení (osou otáčení), působí na těleso moment tíhové síly (ta má působiště v těžišti), který těleso stáčí dolů.

Jakmile je těžiště kolmo pod bodem zavěšení je moment tíhové síly nulový a těleso se již neotáčí.



Příklad

Žulový čtyřboký pravidelný hranol (ρ = 2500 kg.m^{-3}) má podstavovou hranu 60 cm a výšku 80 cm. Jakou práci musíme vykonat, abychom hranol překlopili z rovnovážné stabilní polohy do vratké polohy. Hranol je postaven na čtvercové podstavě.

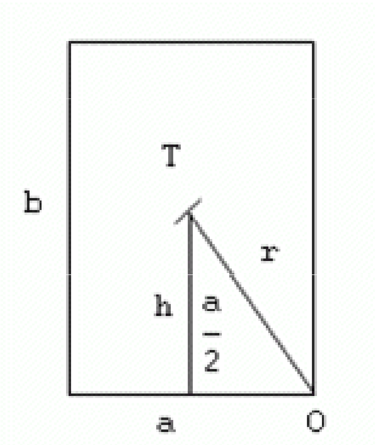
$$h = \frac{b}{2} = \frac{0{,}8m}{2} = 0{,}4\,m, \quad r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2} = \sqrt{(0{,}3m)^2 + (0{,}4m)^2} = 0{,}5m$$

ρ = 2500 kg.m^{-3}

a = 60 cm = 0,6 m

b = 80 cm = 0,8 m

W = ?



$$W = m.g.(r-h)$$
$$W = V.\rho.g.(r-h)$$
$$W = a^2.b.\rho.g.(r-h)$$
$$W = (0{,}6m)^2.0{,}8m.2500kg.m^{-3}10\,m.s^{-2}(0{,}5m - 0{,}4m) = 720\,J$$
$$W = \underline{720\,J}$$

Kinetická energie tuhého tělesa

Celkovou kinetickou energii určíme jako součet kinetických energií všech *n* hmotných bodů soustavy.

$$E_K = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 + \cdots + \frac{1}{2}m_n v_n^2$$

$$E_K = \frac{1}{2}m_1 v^2 + \frac{1}{2}m_2 v^2 + \cdots + \frac{1}{2}m_n v^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + \cdots + m_n)v^2$$

Při **otáčivém pohybu** soustavy hmotných bodů kolem nehybné osy opisují jednotlivé hmotné body kružnice, jejichž středy leží na ose otáčení. Celkovou kinetickou energii opět určíme jako součet kinetických energií všech *n* hmotných bodů soustavy.

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 \qquad E_k = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \frac{1}{2} J\omega^2$$

Kombinace pohybů **posuvného** a **otáčivého**

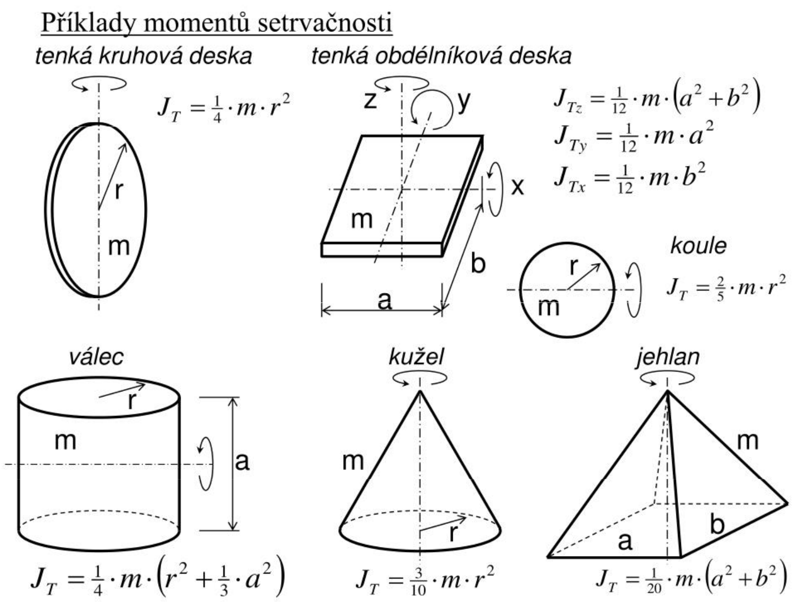
$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$

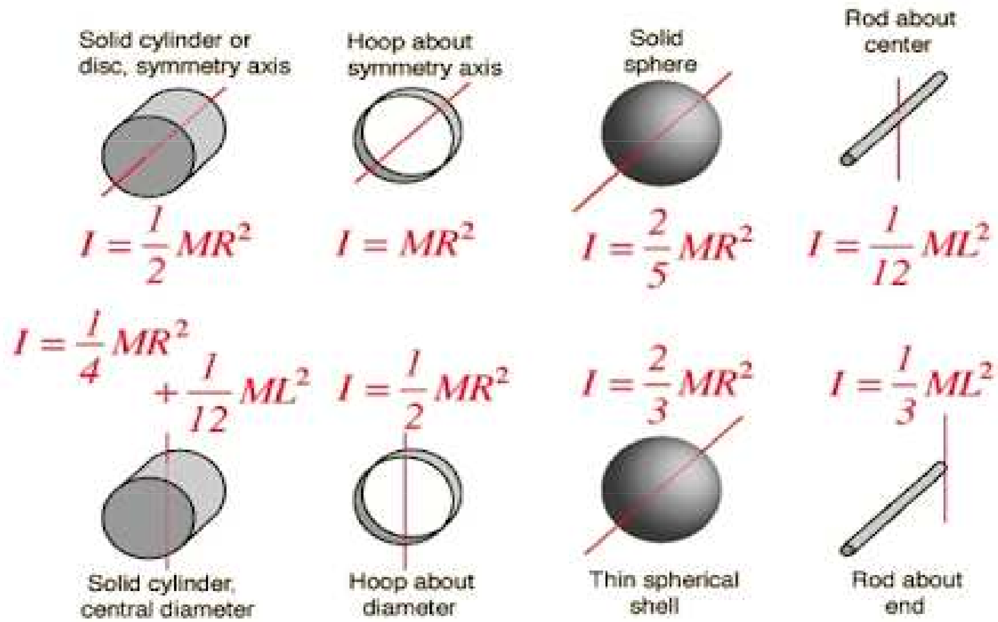
Moment setrvačnosti

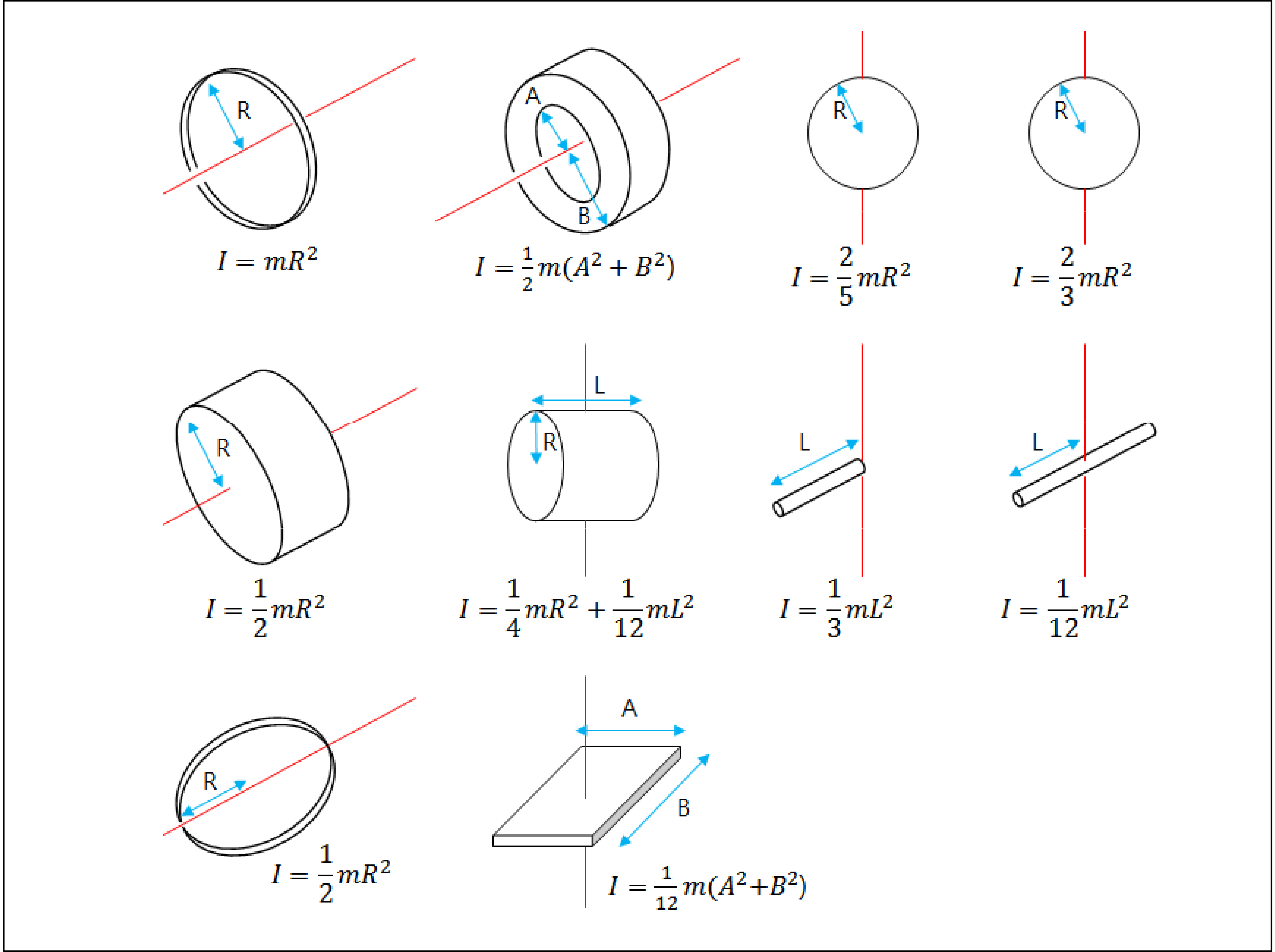
Moment setrvačnosti (J, kg.m^2) je fyzikální veličina, která <u>vyjadřuje míru setrvačnosti tělesa při otáčivém pohybu</u>. Její velikost závisí na rozložení hmoty v tělese vzhledem k ose otáčení. Body (části) tělesa s větší hmotností a umístěné dál od osy mají větší moment setrvačnosti.

$$J = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots + m_n r_n^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

$$I = \int_M r^2 \mathrm{d}m$$ (integrace se provádí přes celé těleso o celkové hmotnosti M).

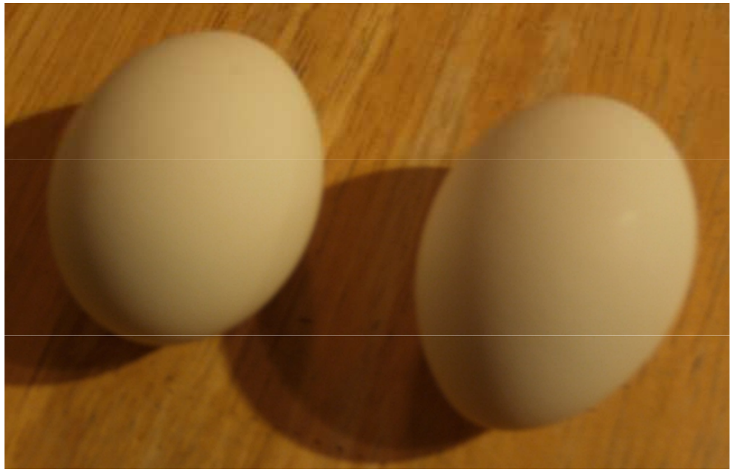


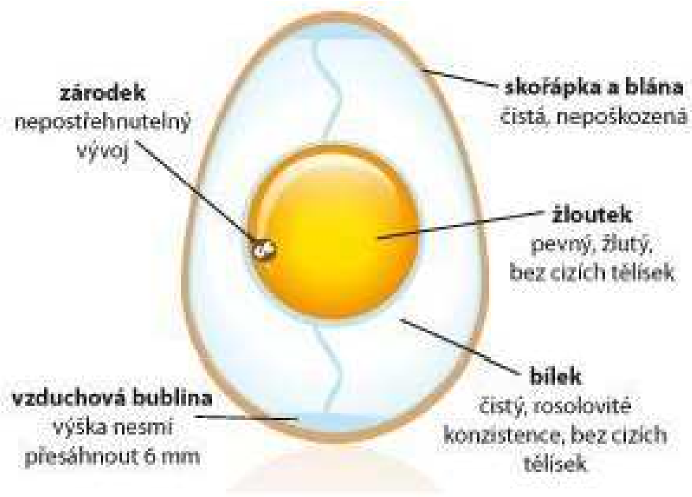



R
$I = mR^2$
A
B
$I = \frac{1}{2}m(A^2 + B^2)$
R
$I = \frac{2}{5}mR^2$
R
$I = \frac{2}{3}mR^2$
R
$I = \frac{1}{2}mR^2$
L
R
$I = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mL^2$
L
$I = \frac{1}{3}mL^2$
L
$I = \frac{1}{12}mL^2$
R
$I = \frac{1}{2}mR^2$
A
B
$I = \frac{1}{12}m(A^2+B^2)$

Příklad

Máme syrové a uvařené vajíčko. Lze je navzájem odlišit, aniž bychom některé z nich museli rozbít ?





Obě vajíčka roztočíme. Vlivem setrvačnosti (odstředívé síly) bude mít kapalný obsah syrového vajíčka tendenci být co nejdále od osy rotace (žloutek se pohybuje pomaleji), což zvýší velikost **momentu setrvačnosti**. Aby se zachoval moment hybnosti při absenci vnějšího točivého momentu, bude mít syrové vajíčko menší úhlovou rychlost.

Setrvačník, gyroskopický jev

Gyroskop (**setrvačník**) je těžké kolo otáčející se v ložiscích s nepatrným třením. Otáčející se setrvačník má moment hybnosti, takže jeho osa bez působení vnějších sil udržuje stále stejný směr (klade odpor na změnu osy jeho rotace vlivem momentu setrvačnosti) v inerciálním prostoru. Přesnost gyroskopu závisí na stabilitě udržení jeho otáček. Tomuto jevu se říká **gyroskopický efekt** a dochází k němu hlavně v případech, kdy je hmotnost setrvačníku soustředěná po obvodu. Čím větší průměr rotoru, tím je gyroskopický efekt větší. Gyroskopický efekt se také zvyšuje s otáčkami rotoru - tedy čím větší rychlost, tím je gyroskopický efekt silnější.

Kinetická energie E_k vázaná v rotujícím setrvačníku se vypočte:

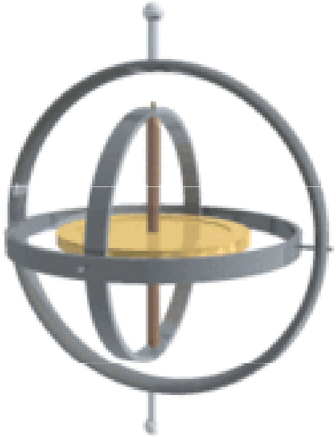
$$E_k = \frac{1}{2} J\omega^2$$

kde J je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose otáčení, ω je úhlová rychlost, s kterou se těleso otáčí. Protože je úhlová rychlost přímo úměrná frekvenci (ω = 2.π.f):

$$E_k = 2\pi^2 J f^2$$

Jedno z nejstarších využití setrvačníku byl hrnčířský kruh. Známé je využití v dětských hračkách (setrvačníková autíčka, na principu setrvačníku pracuje i káča a jojo).

Používá se často pro **stabilizaci otáček strojů s nepravidelným chodem**, jako jsou parní stroje nebo spalovací motory. Stabilizaci otáček u převážné většiny současných strojních zařízení poháněných (velmi často asynchronními) elektromotory do jisté míry zajišťují tyto motory samotné, coby setrvačník zde působí zejména rotor elektromotoru.



Ke **stabilizaci směru a polohy** je hojně využíván např. v letectví (tzv. umělý horizont), jako gyrokompas v navigaci lodí, v navigaci torpéd, balistických raket, vesmírných stanic, satelitů atd.

Setrvačníky se ve světě používají pro průmyslovou **akumulaci** elektrické **energie**. Principu akumulace energie v setrvačníku využívají v průmyslu i některé velké kovoobráběcí a tvářecí stroje určené pro obrábění a tváření kovů za tepla i za studena.

Steinerova věta

Steinerova věta umožňuje vypočítat moment setrvačnosti tělesa rotujícího kolem osy, která neprochází jeho těžištěm.

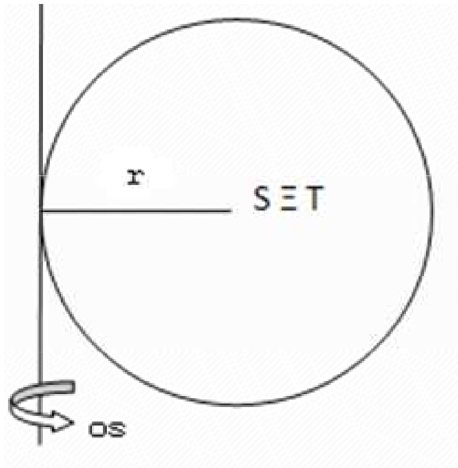
$$J = J_T + m r_T^2$$

Lze tak například vypočítat moment setrvačnosti tělesa složeného z několika základních těles se známými momenty setrvačnosti a vzdálenost jejich těžišť od těžiště složeného tělesa.

Příklad

Vypočtěte moment setrvačnosti plné homogenní koule o poloměru r = 10 cm, hmotnosti 25 kg vzhledem k ose, která se dotýká povrchu koule.

r = 10 cm = 0,1m
m = 25kg
d = r = 0,1m



$$I = I_0 + m.d^2$$

$$I = \frac{2}{5} m.r^2 + m.d^2$$

$$I = \frac{7}{5} m.r^2$$

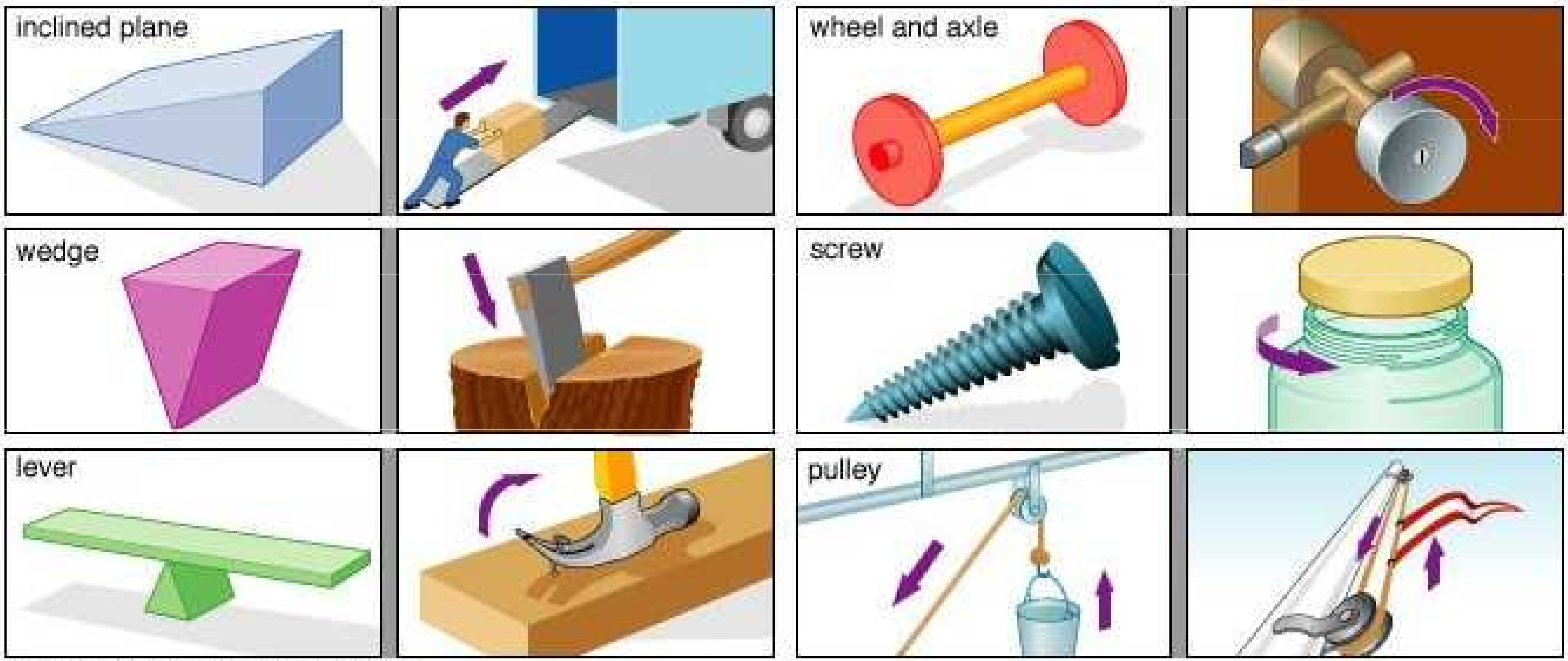
$$I = \frac{7}{5} 25kg.(0,1m)^2 = 0,35kg.m^2$$

$$I = 0,35kg.m^2$$

Jednoduché stroje založené na rovnováze momentů sil

Mechanická zařízení jimiž lze měnit směr síly, přenášet působiště síly a nebo měnit velikost síly za účelem překonání určité síly.

Zlaté pravidlo mechaniky vyjadřuje zákon zachování energie: „Vynaložená práce (součin síly a posunutí jejího působiště) se rovná práci spotřebované na posunutí břemene, co se ušetří na vynaložené síle, je třeba přidat na dráze (při zanedbaném tření).“



Páka

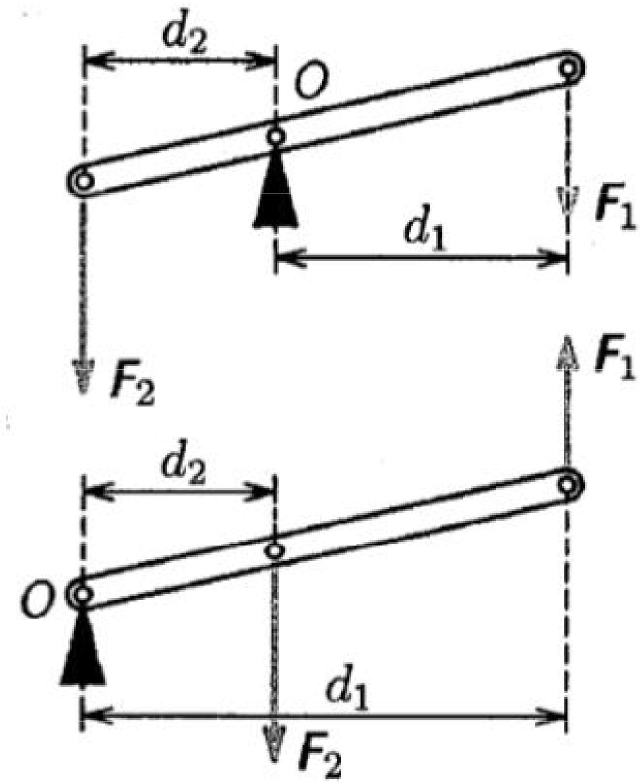
Jednozvratná páka: síly působí na stejné straně od osy otáčení, mají však opačný směr.
Dvojzvratná páka: síly působí na obou stranách od bodu otáčení.

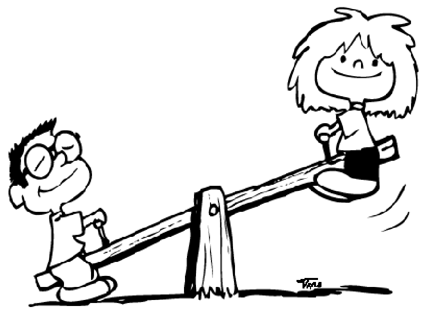
Rovnováha na páce nastane, právě když součin ramene síly a velikosti síly na levé straně se rovná součinu ramene síly a velikosti síly na pravé straně.

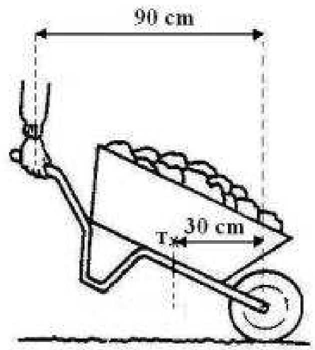
$$d_1 \cdot F_1 = d_2 \cdot F_2$$

Páka se začne otáčet ve směru síly, jejíž součin s délkou ramene (moment síly) je větší.

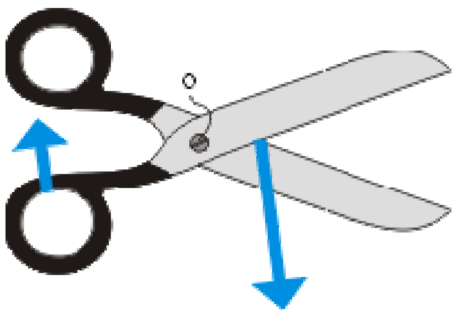
Různé druhy páčidel a kleští se používají většinou ke **zvětšení síly**, kterou působíme na nějaký předmět.



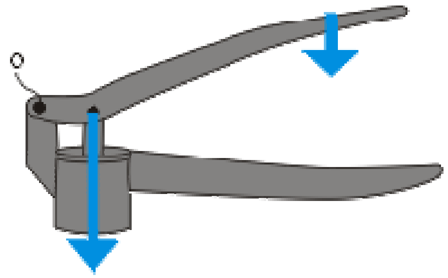




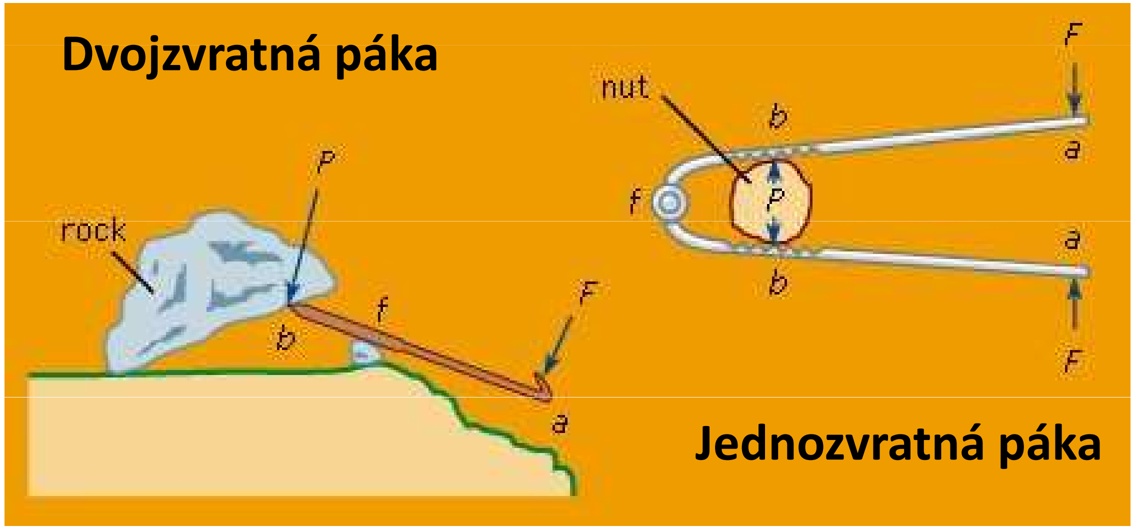
Dvojzvratná páka



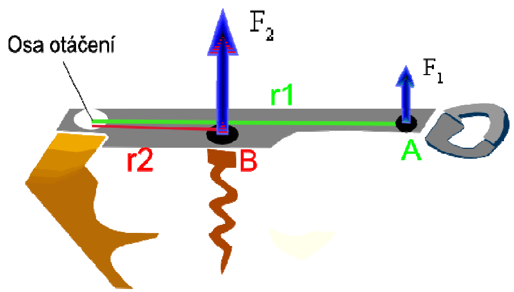
Jednozvratná páka



Jednozvratná páka



Jednozvratná páka -
Otvírák na víno



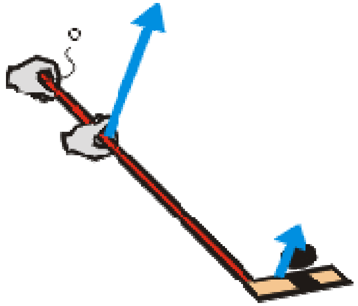
$Ma = F1 * r1$
$Mb = F2 * r2$

A,B = momentové body

Moment síly - Ma, Mb
- fyz. vel. vyjadřující
míru otáčivého účinku

Dvojzvratná páka

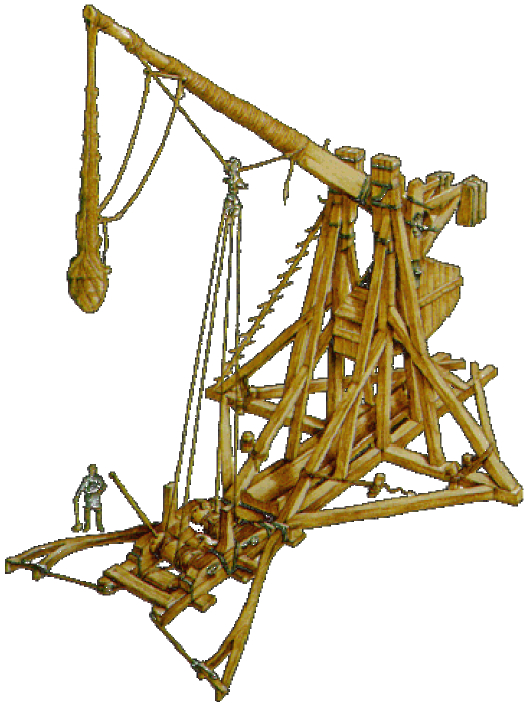
Hokejka je v podstatě také pákou. Neslouží ke zvětšení síly, ale ke zvýšení rychlosti (puk odpálený hokejkou se pohybuje mnohem rychleji než kdybychom ho házeli rukou). Síla, kterou přitom působí konec hokejky na puk je naopak menší než síla rukou působící na hokejku (delší rameno síly).



Jednozvratná páka

Dvojzvratná páka

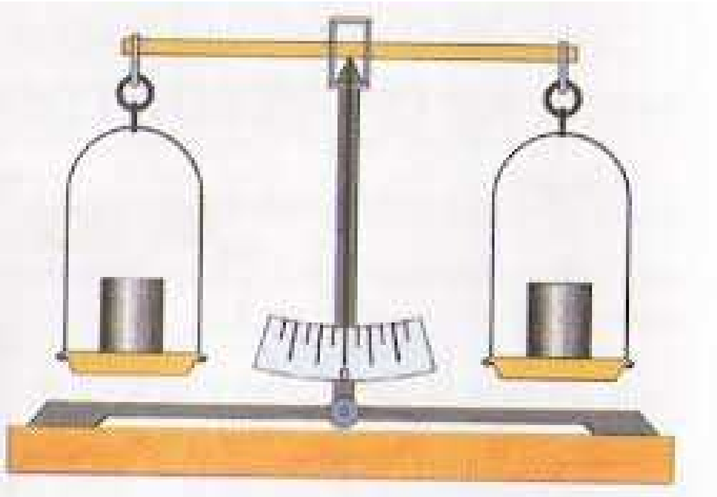
Dvojzvratná páka



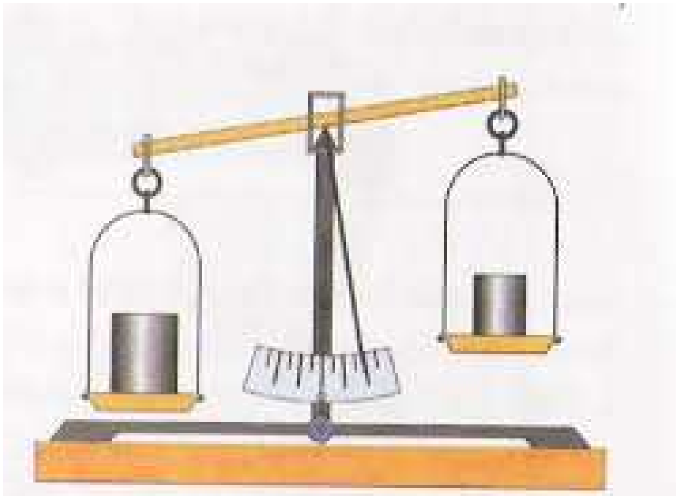
Dvojzvratná páka

Váhy

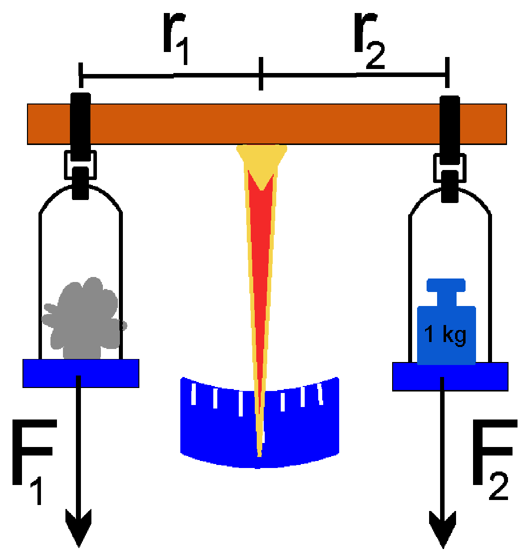
Vážení je porovnávání tíhy těles za účelem stanovení hmotnosti. Rovnost tíhy (působící na závěs vah) znamená tedy i rovnost tíhové síly (kterou působí tíhové pole na vážená tělesa) a tedy i rovnost jejich hmotností. Účelem vážení je najít takové závaží známé hmotnosti, které bude mít stejný silový účinek na váhy jako zkoumané těleso.



Obr. 1.89 Tělesa stejné hmotnosti



Obr. 1.90 Tělesa různé hmotnosti



Rovnoramenné váhy pracují na principu dvouramenné páky (vahadla) se stejně dlouhými rameny. Na konci ramen bývají zavěšeny misky, jedna na vážený předmět a druhá na závaží. Uprostřed páky je svislý jazýček, který umožňuje přesně odečíst, kdy jsou obě strany v rovnováze.

Také **nerovnoramenné váhy** pracují na principu dvouramenné páky, jenže délky obou ramen jsou různé. Toho lze využít dvojím způsobem:

Délky obou ramen mohou být v ***pevném poměru*** **1:*n***. V tomto případě bude platit $l_1 = n.l_2$ a váha bude v rovnováze, když bude hmotnost závaží rovna jedné n-tině hmotnosti váženého zboží. Tak jsou konstruovány tak zvané **decimálky**, (n = 10) váhy na objemné zboží například v pytlích (obilí, brambory, uhlí atd.).

Délka jednoho z ramen může být ***proměnná***, v se jediné závaží posouvá po delším rameni páky tak dlouho, až je váha v rovnováze. Pro hmotnost váženého zboží pak platí vztah $F_2 = k.l_1$ (hodnoty F_1 a l_2 jsou konstantní) a na rameni může být nanesena lineární stupnice hmotností. Na tomto principu fungují tak zvané **přezmeny**.

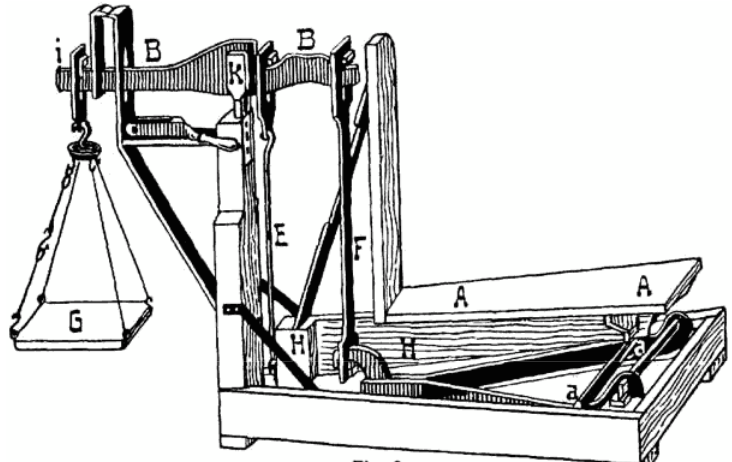
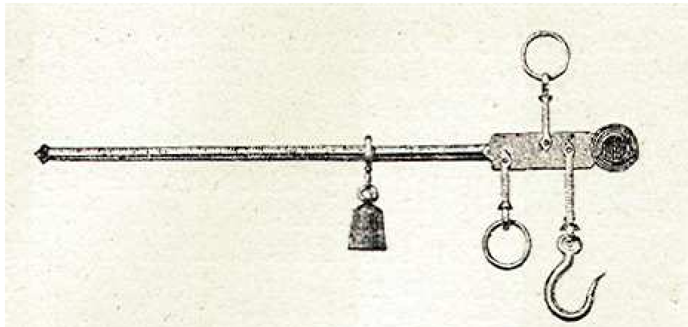


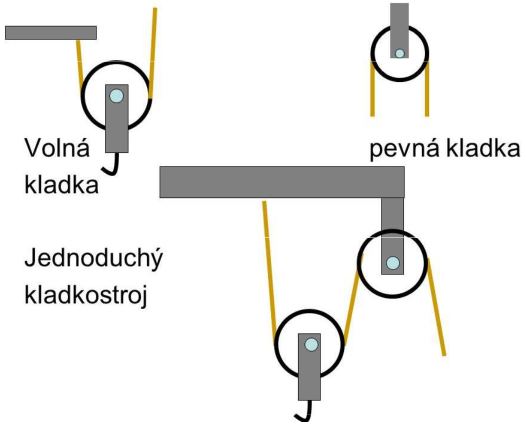
Fig. 6.

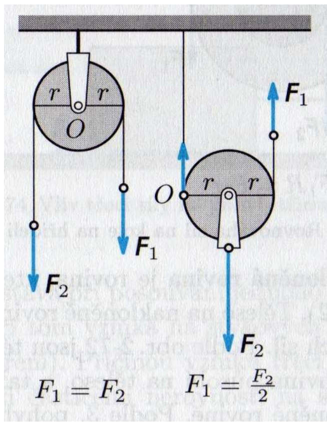

Balance romaine.

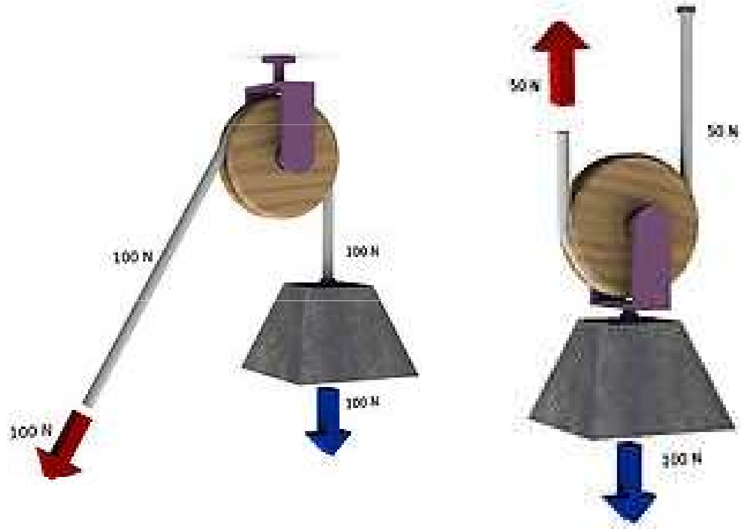
Kladka

Rovnováha sil na **kladce pevné** nastane tehdy, jestliže na obou koncích lana působí stejně velké síly $F_1 = F_2$. Síla, kterou těleso zvedáme, je rovna tíze zavěšeného tělesa.

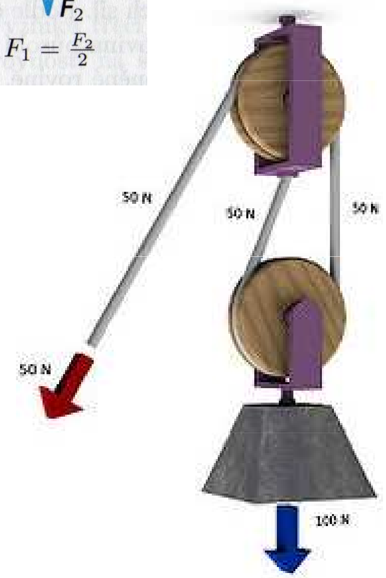
Na **kladce volné** působí na obou koncích lana síly poloviční, než je součet tíhy kladky volné a závaží na ní zavěšeného **F1 = F2 = G/2**. Síla, kterou těleso zvedáme, je rovna polovině tíhy zavěšeného tělesa.

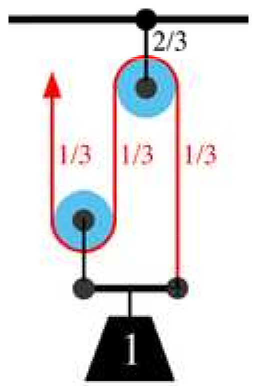


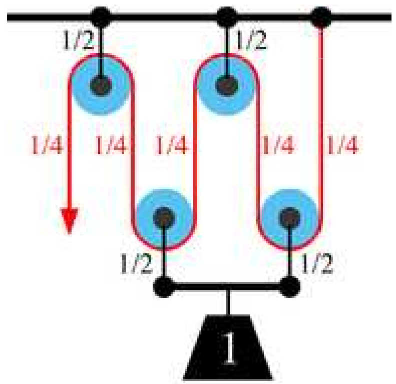




Jednoduchý kladkostroj se skládá z jedné kladky volné a jedné kladky pevné. Síla, kterou působíme na konec lana, je rovna polovině tíhy břemene, platí vztah **F = G/2**.







V technické praxi se kladky používají u nejrůznějších mechanismů, od zavěšení hodinového závaží až po velká zdvihadla, stavební, důlní a těžební stroje, dále pro napínání drátů elektrického vedení, vypínání plachtoví na jachtách, při stavbách drátěných ohrad či plotů apod.

Kladka jako každý jednoduchý stroj práci neušetří, spíše naopak musíme do kladky vložit větší práci, než jakou chceme, aby kladka vykonala, jelikož část vložené práce se ztratí třením. Účinnost kladky je tak vždy menší než 1.

Nejběžnější a nejznámější stroje u nichž jsou použity kladky:

jeřáb
výtah nebo zdviž
vrátek - nejčastěji používaný na stavbách (kupř. při hloubení kopaných studní či opravách střech domů apod.)
těžní věž
napínák drátů a lan

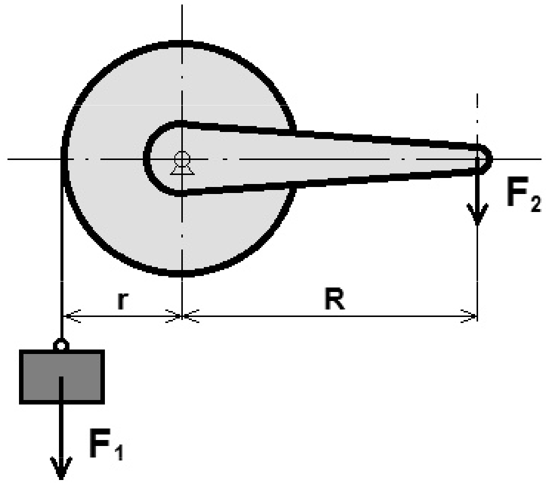
Kolo na hřídeli

Kolo na hřídeli je jednoduchý stroj, jehož základem jsou dvě pevně spojené části (větší a menší kolo, kolo a hřídel), která se otáčejí kolem jedné osy.

Působí-li na větší kolo síla člověka nebo stroje, pak menší kolo působí větší silou na těleso (břemeno). Kolo na hřídeli je založeno na principu páky. Oproti páce se kolo na hřídeli liší především možností otáčení o 360°.

Podmínka rovnováhy na kole na hřídeli:

$$F_1 . r = F_2 . R$$



kde F_1 je síla působící na menší kolo o poloměru r, F_2 je síla působící na větší kolo o poloměru R.

Kolo na hřídeli lze najít v nástrojích jako rumpál, klíč na utahování, pedály kol, kohoutky na vodu, ap.

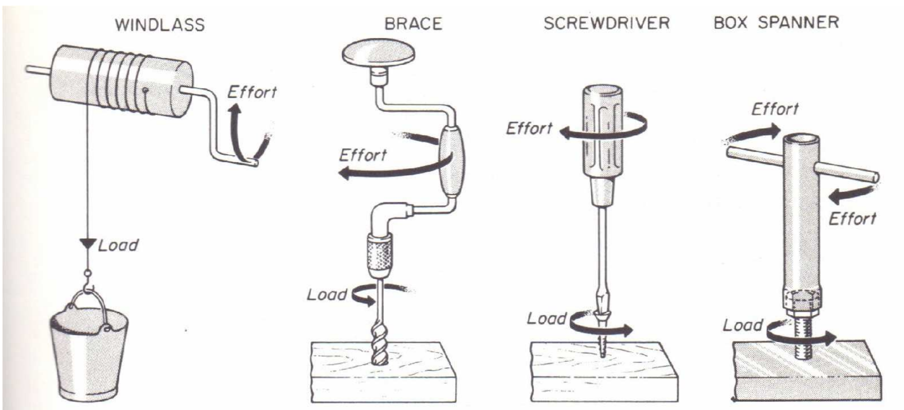
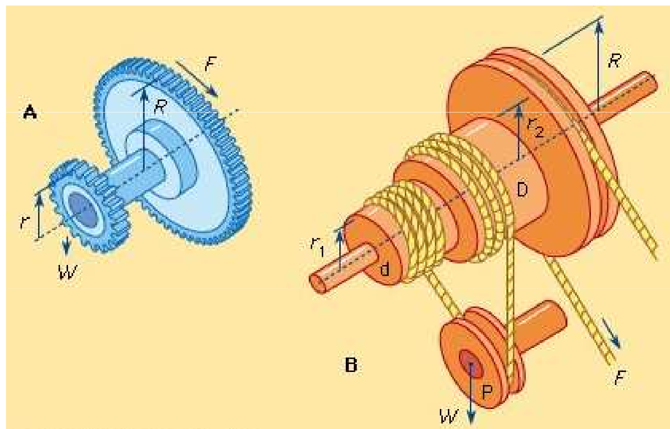
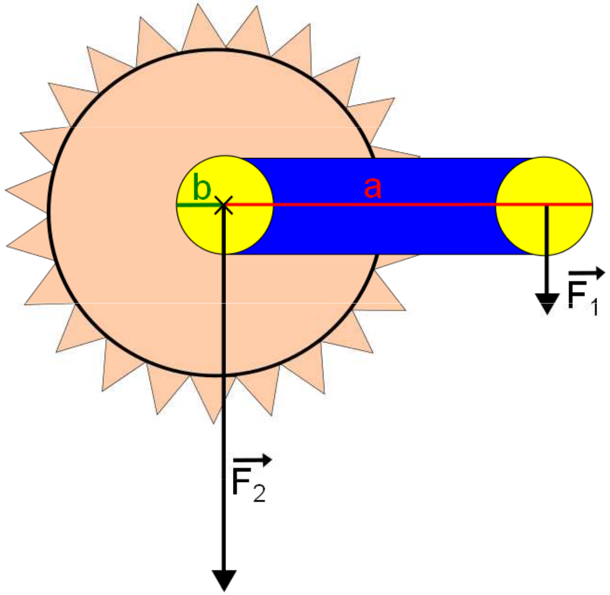


Fig. 8.14. Applications of the wheel and axle principle



Klika je rukojeť k otevírání a zavírání dveří, oken a dalších obdobných mechanismů. Pracuje na jednoduchém principu, podobném kolu na hřídeli, kde moment síly vyvinutý (obvykle lidskou rukou) na kliku otáčí mechanismem dveřního či okenního zámku apod.



Příklad

Kolem na hřídeli, které má poloměr hřídele 10 cm a poloměr kola 50 cm, zdvíháme břemeno. Na obvodě kola působíme silou 120 N tak, že lano táhneme rovnoměrným pohybem rychlostí 80 $cm \cdot s^{-1}$. Jak těžké je břemeno a za jak dlouho toto břemeno zdvihneme o 1,6 m? Třecí sílu mezi lanem a hřídelí lze zanedbat.

F = 120 N
R = 50 cm = 0,5 m
v = 80 $cm \cdot s^{-1}$ = 0,8 $m.s^{-1}$
r = 10 cm = 0,1 m
h = 1,6 m
m = ?
t = ?

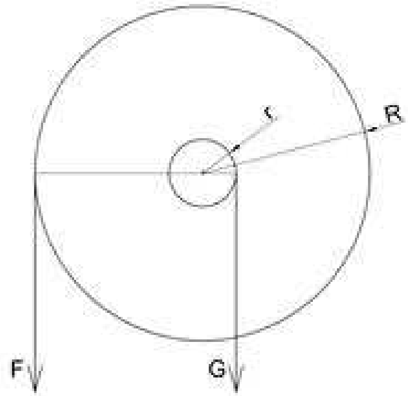
$$F \cdot R = G \cdot r$$

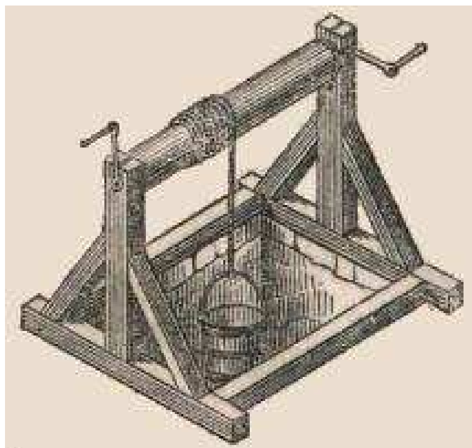
$$v = \omega \cdot R \wedge v' = \omega \cdot r$$

$$h = v' \cdot t$$

$$G = \frac{F \cdot R}{r} \Rightarrow G = \underline{600\ N}$$

$$t = \frac{h}{v \cdot \frac{r}{R}} \Rightarrow t = \underline{10\ s}$$





Nakloněná rovina

Nakloněná rovina je jednoduchý stroj, jehož jedinou částí je rovina nakloněná vzhledem k vodorovnému směru, po níž se pohybuje těleso. Specifickou formou nakloněné roviny je **závit šroubu** představující nakloněnou rovinu navinutou na válec. Také **klín** představuje v podstatě variantu nakloněné roviny.

<u>Nakloněná rovina zmenší sílu potřebnou ke zvednutí tělesa (břemene). Velikost potřebné síly závisí na sklonu roviny, neboli na poměru délky k výšce nakloněné roviny. Nezmenšuje však množství práce potřebné k vykonání pohybu.</u>

$$\boldsymbol{F = F_G \frac{h}{s}}$$

F – působící síla na těleso

$\boldsymbol{F_G}$ – tíhová síla

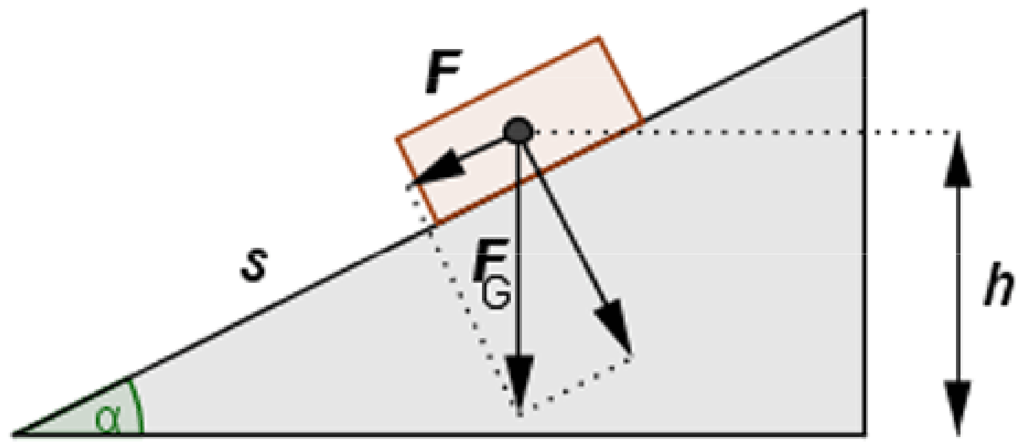
$$\boldsymbol{F_G = m.g}$$

m – hmotnost tělesa

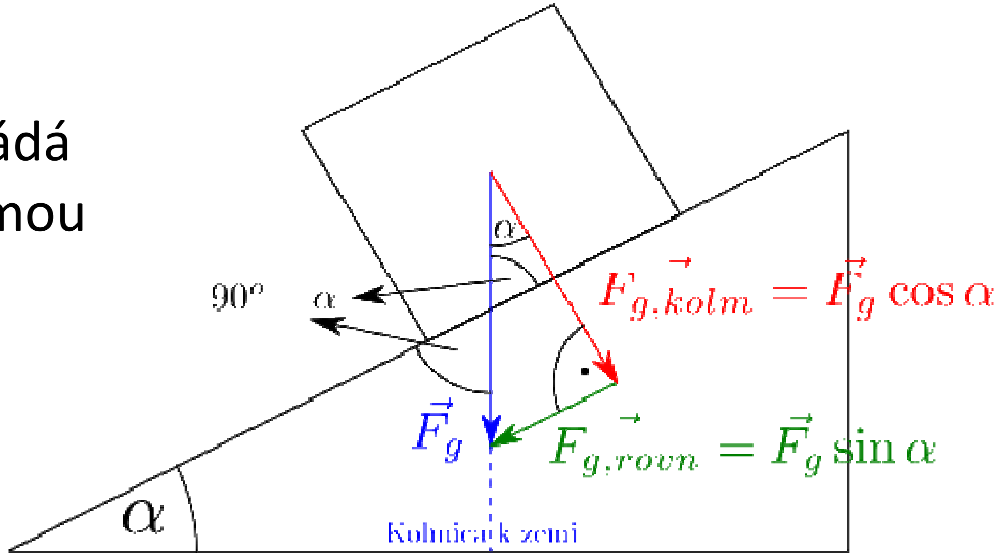
g – gravitační zrychlení

s – délka nakloněné roviny

h – výškový rozdíl



Rozklad tíhové síly na nakloněné rovině



Tíhová síla se na nakloněné rovině rozkládá na dvě kolmé složky, rovnoběžnou a kolmou s nakloněnou rovinou.

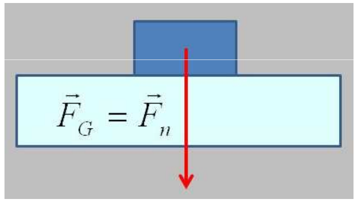
$F_g = m \cdot g$

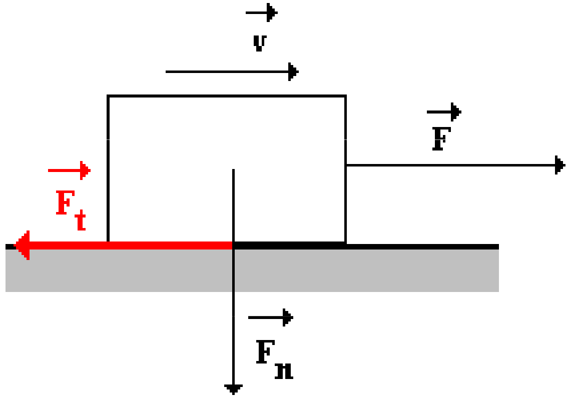
$F_{gk} = F_g \cdot \cos(\alpha) = m \cdot g \cdot \cos(\alpha)$

$F_{gr} = F_g \cdot \sin(\alpha) = m \cdot g \cdot \sin(\alpha)$

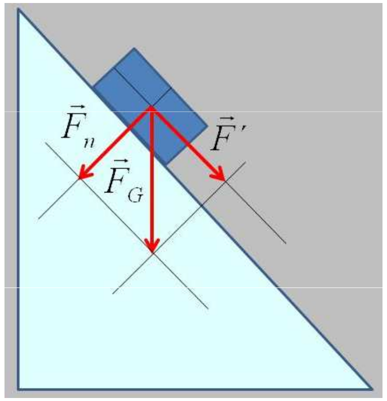
Normálová síla (F_n) je síla kolmá k podložce.

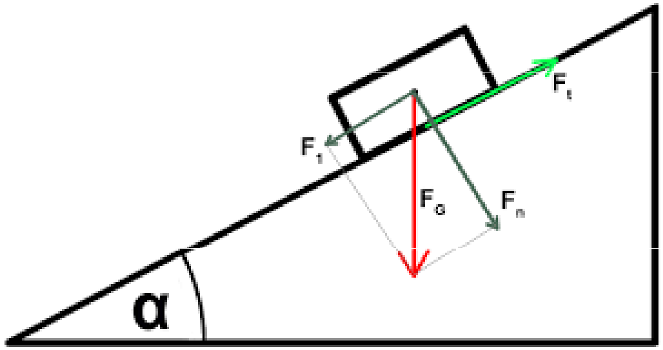
V případě **vodorovné podložky** je totožná se silou tíhovou.



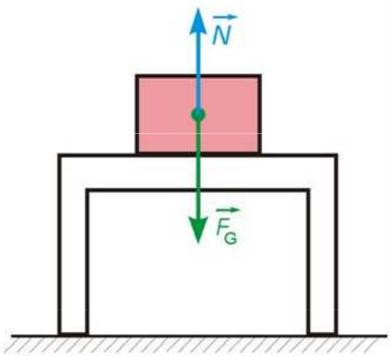


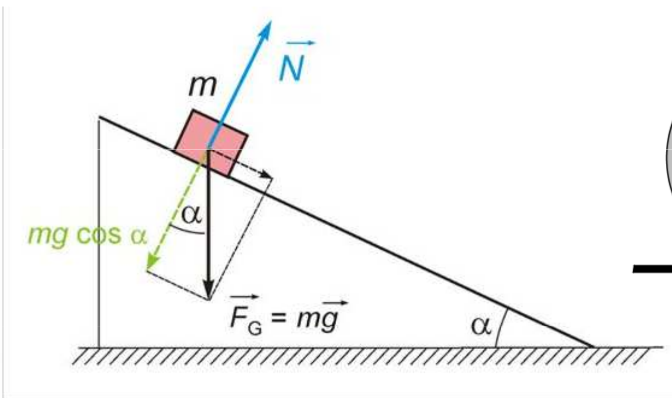
Na **nakloněné rovině** je složkou tíhové síly kolmou k podložce

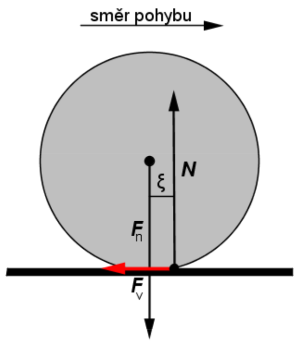




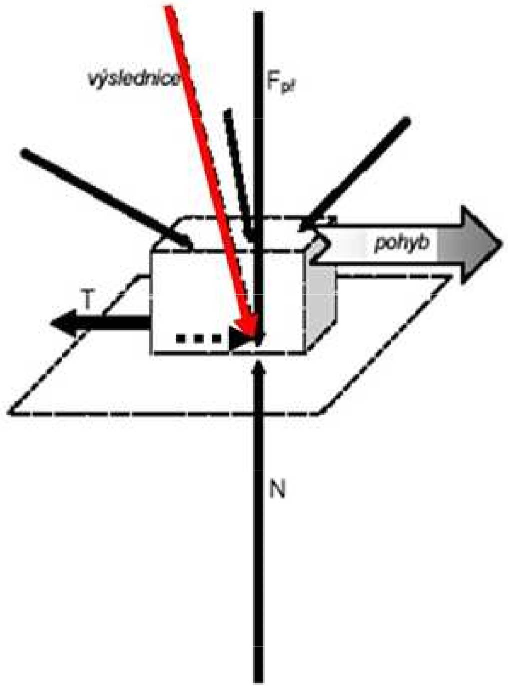
Normálová reakce je reakcí (dle 3. Newtonova zákona) na normálovou sílu, je ztotožňována s **reakcí podložky** na tíhovou sílu (vodorovná podložka), resp. na složku tíhové síly kolmou k podložce (nakloněná rovina)



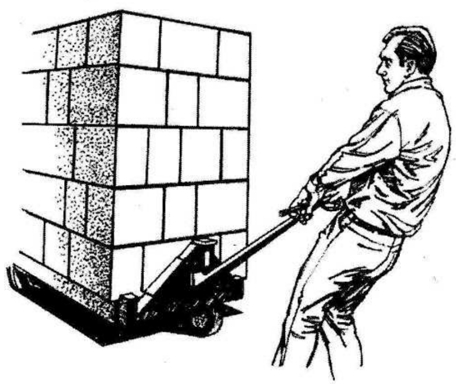


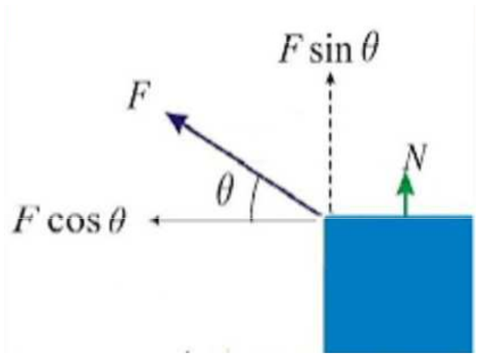


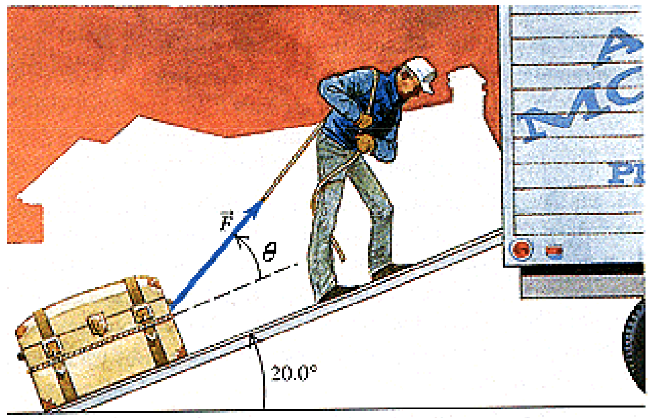
Přítlačná síla je složka výslednice všech sil působících na těleso, mající kolmý směr ke směru pohybu. Podle zákona akce a reakce je přítlačná síla rovna příslušné normálové reakci působící opačným směrem.



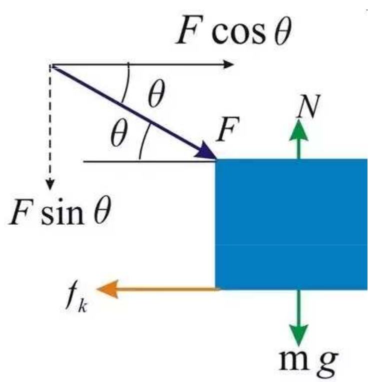
Působení tažné (vlečné) síly F

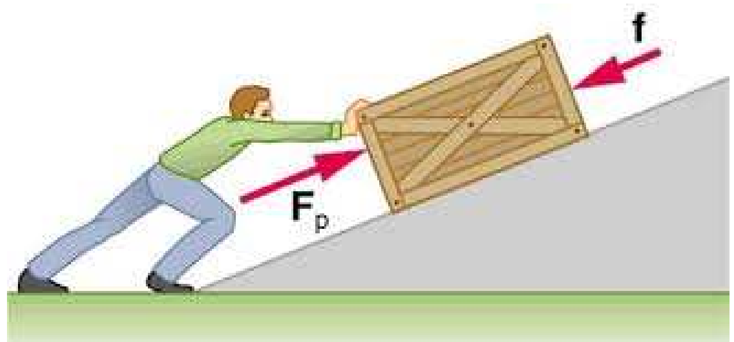


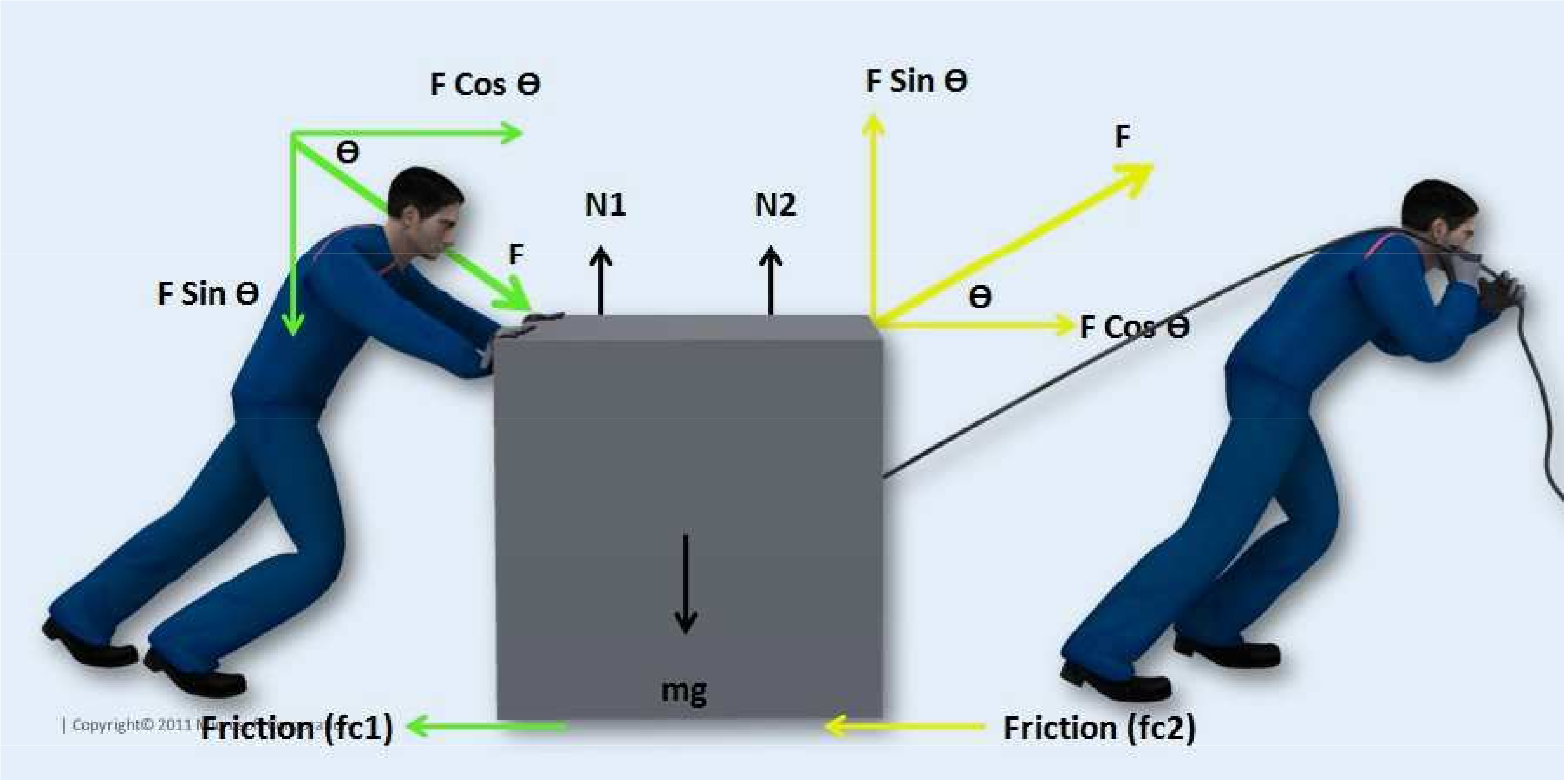


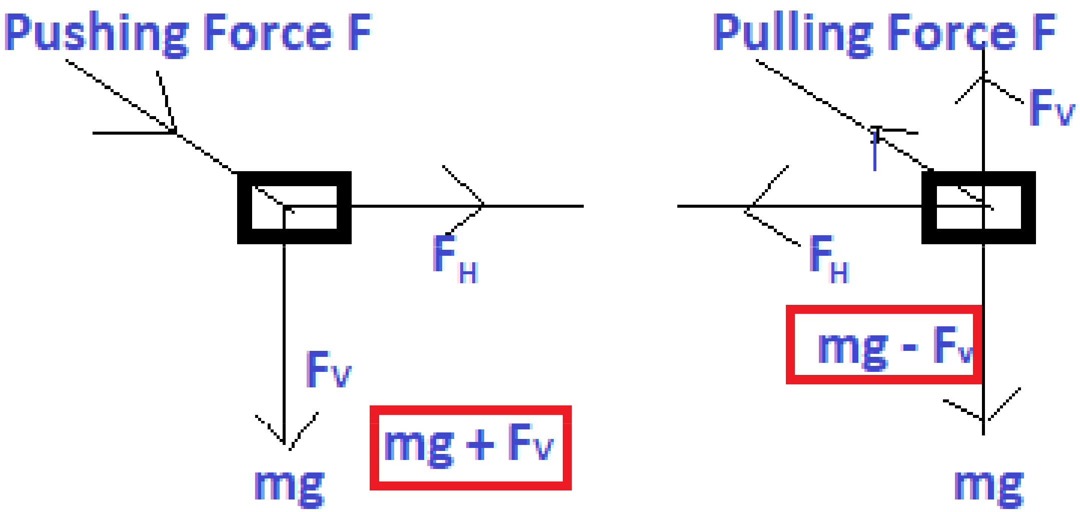


Působení tlačné síly F



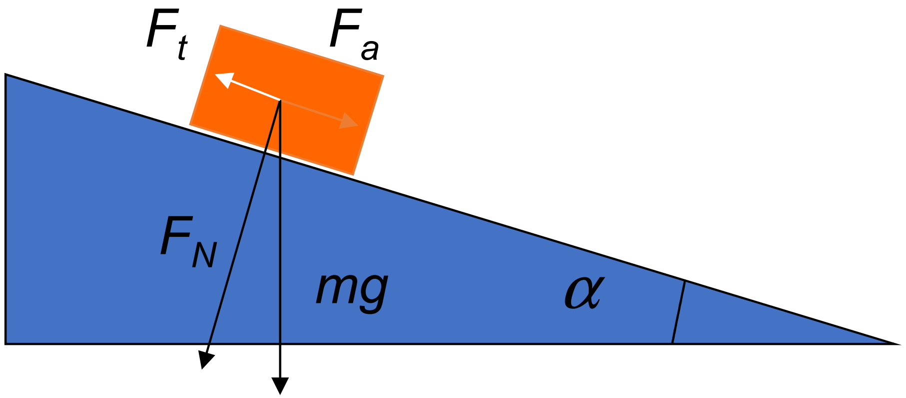



F Cos ϴ
ϴ
F Sin ϴ
F
N1
N2
F Sin ϴ
F
ϴ
F Cos ϴ
mg
Friction (fc1)
Friction (fc2)


Pushing Force F
Pulling Force F
Fv
FH
FH
mg - Fv
Fv
mg
mg + Fv
mg

Síla působící podél nakloněné roviny:

$$F_a - F_t = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha = mg\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)$$



Je-li zrychlení nulové (těleso klouže po nakloněné rovině rovnoměrně, což nastane při **kritickém úhlu náklonu** α_k, platí

$$a = g\left(\sin\alpha - \mu\cos\alpha\right)$$

$$\mu = tg\,\alpha_k$$

Příklad

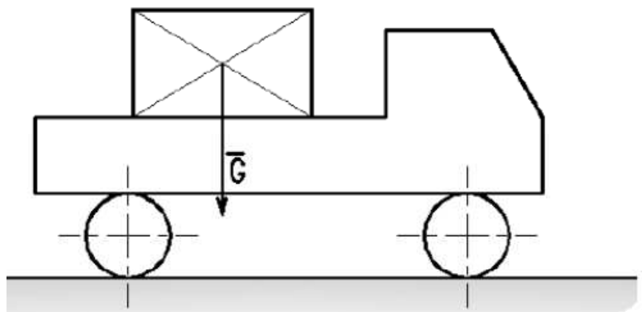
Nákladní automobil dopravuje na své ložné ploše nezajištěné břemeno o hmotnosti m. Součinitel tření mezi korbou a břemenem je *f* = 0,4. Stanovte, s jakým největším zpožděním může automobil brzdit, aby se břemeno neposunulo.

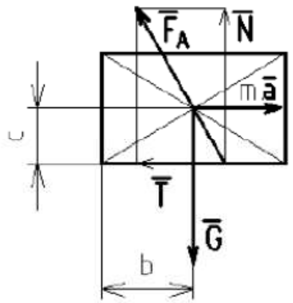
$T = m.a$

$F_N = m.g$

$T = F_N .fm.a = m.g.f$

$a = g.f = 9{,}81.0{,}4 = \underline{3{,}9\ m.s^{-1}}$



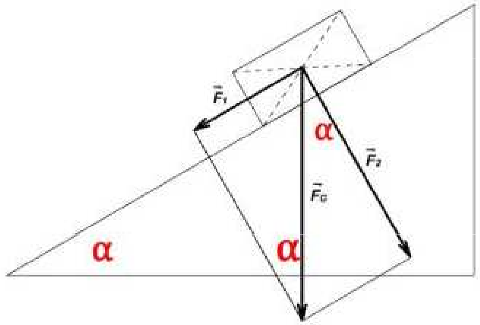


Příklad č.4: Urči součinitel smykového tření mezi tělesem a povrchem nakloněné roviny, která svírá úhel 20° s vodorovnou rovinou, po které se toto těleso pohybuje rovnoměrně přímočaře.

$\alpha = 30°; F_1 = F_t$

$F_1 = m \cdot g \cdot sin\alpha$

$F_t = f \cdot F_2 = f \cdot m \cdot g \cdot cos\alpha$



$$f = \frac{F_1}{F_2} = \frac{m \cdot g \cdot sin\alpha}{m \cdot g \cdot cos\alpha} = \frac{sin\alpha}{cos\alpha} = tg\alpha$$

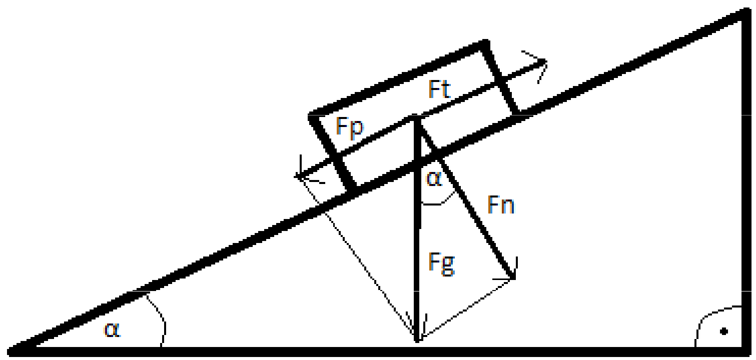
$f = tg20° \doteq 0{,}36$ Součinitel smykového tření je přibližně 0,36.

Příklad

Kostka, na niž působí tíhová síla o velikosti 20 N spočívá na nakloněné rovině o úhlu sklonu α = 30°. Koeficient statického tření je f_s = 0,25, koeficient dynamického tření f_d = 0,15. a) Jaká je nejmenší velikost síly F_1 rovnoběžné s nakloněnou rovinou, která zabrání kostce ve skluzu? b) Jaká je nejmenší hodnota F_2, při níž se začne kostka pohybovat po nakloněné rovině vzhůru? c) Při jaké hodnotě F_3 bude kostka stoupat stálou rychlostí?

G=20N
α=30°
fs=0,25
fd=0,15

Fp=Fg*sinα=10N
Fn=Fg*cosα=8,66N



$$F_1 + f_s G\cos\alpha = G\sin\alpha$$

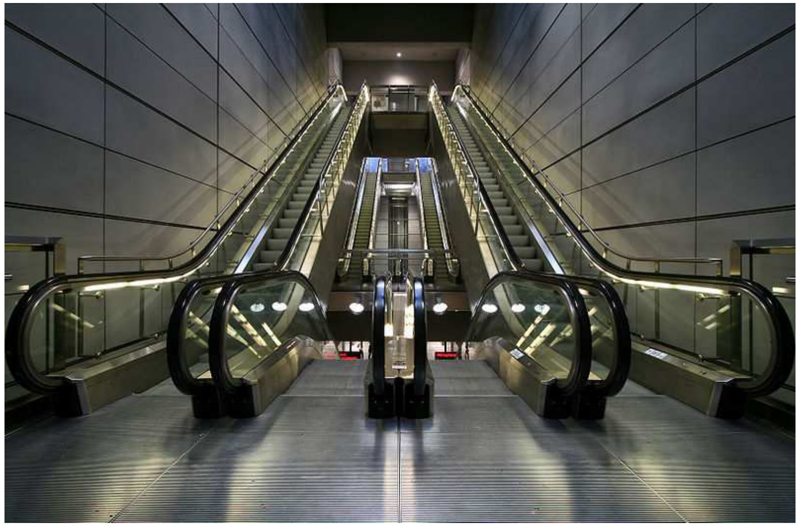
$$f_s G\cos\alpha + G\sin\alpha = F_2$$

$$f_d G\cos\alpha + G\sin\alpha = F_3$$

F_1 = G.(sinα – f_s.cosα) = 20.(sin 30° – 0.25.cos 30°) = <u>5, 7 N</u>

F_2 = G.(sinα + f_s.cosα) = 20.(sin 30° + 0.25.cos 30°) = <u>14,3 N</u>

F_3 = G.(sinα + f_d.cosα) = 20.(sin 30° + 0.15.cos 30°) = <u>12,6 N</u>

Příklad

Vozíčkář o hmotnosti 75 kg musí na svém vozíku o hmotnosti 58 kg překonat převýšení 90 cm po nakloněné rovině o délce 146 cm. Jakou práci musí vozíčkář vykonat?

$m_1 = 75$ kg
$m_2 = 58$ kg
$h = 90$ cm $= 0{,}9$ m
$s = 146$ cm $= 1{,}46$ m
$W = ?$

$m = m_1 + m_2 = 75 + 58 = 133$ kg

$F = F_G \frac{h}{s}$

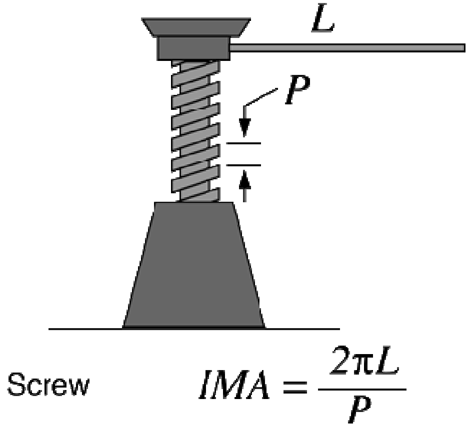
$F_G = m \,.\, g = 133 \,.\, 10 = 1\,330$ N

$F = 1\,330 \frac{0{,}9}{1{,}46} = 819{,}9$ N

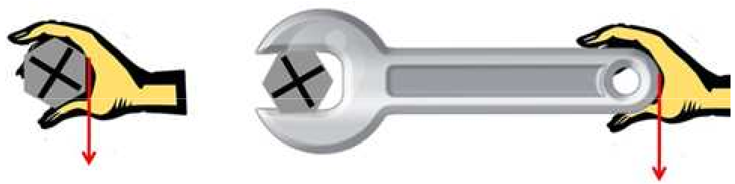
$W = F \,.\, s = 819{,}9 \,.\, 1{,}46 = 1\,197$ J $= \underline{1{,}2 \text{ kJ}}$

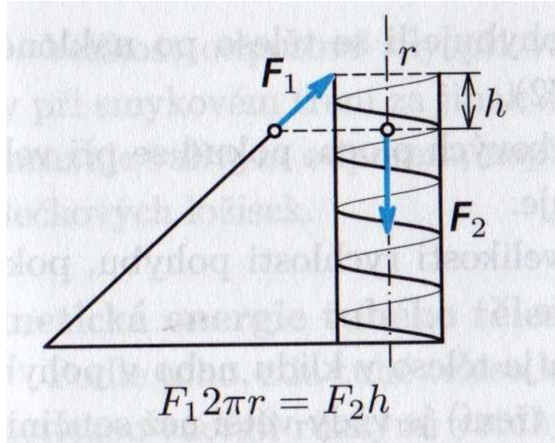
Šroub

Síla F působí na obvodu kružnice, jejímž poloměrem r je buď poloměr hlavice, resp. je roven délce klíče. Při jedné otočce vykoná síla F práci 2.π.r.F. Šroubem překonáváme tíhu F_g, záporná práce je F_g.h. Odtud



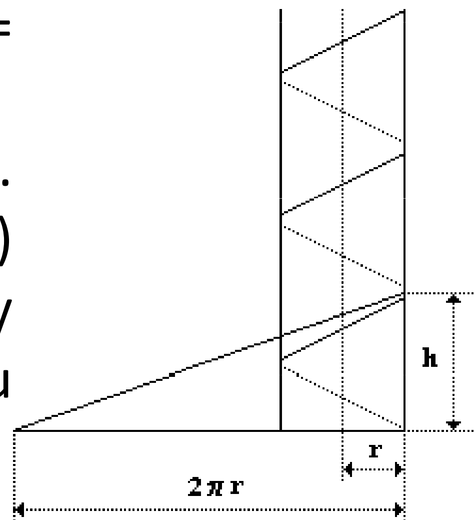
$$2.\pi.r.F = F_g.h$$



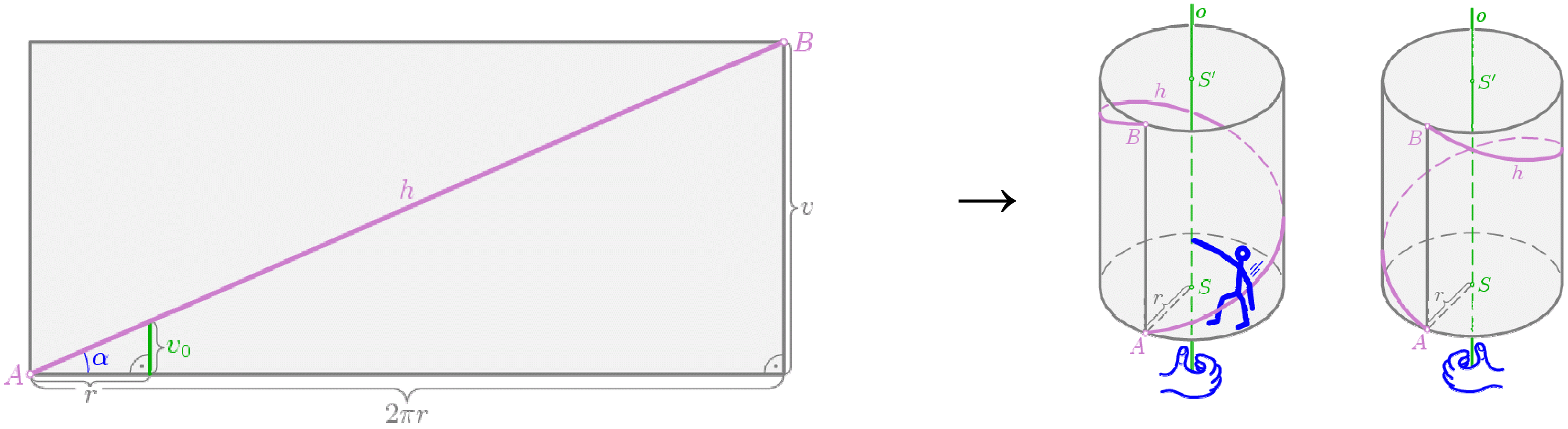


V **dynamice** lze šroubovici lze také chápat jako nakloněnou rovinu navinutou na válec.

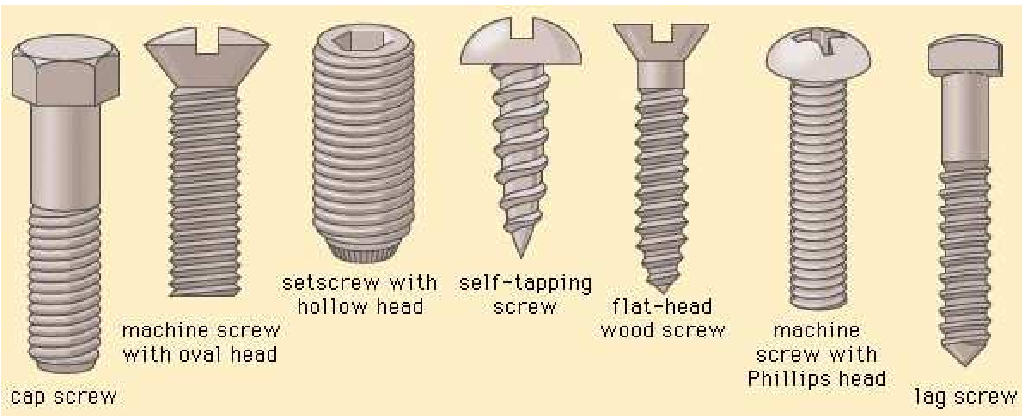
Při utahování šroubu působí síla **F_1** podél závitu o délce l = 2.π.*r*, kde *r* je poloměr šroubovice.
Při jednom otočení šroubu vykoná tato síla **práci** $W_1 = F_1.2.\pi.r$.
Při tom se šroub, který působí na matici (hmoždinku, dřevo, …) silou, posune o výšku závitu *h*. Práce vykonaná šroubem je tedy $W_2 = F_2.h$. Neuvažujeme-li odporové síly, dostáváme podmínku **rovnováhy sil** na šroubu ve tvaru $\underline{F_1.2.\pi.r = F_2.\ h}$.



Šroubovice jako nakloněná rovina navinutá na válec



r je poloměr šroubovice *h*, *o* je osa šroubovice, *v* je výška závitu, *α* je sklon šroubovice, tan *α* je spád šroubovice (stejný v každém bodě – křivka konstantního spádu), v_0 je redukovaná výška závitu (parametr šroubovice); platí: $v_0/v=r/(2\pi r)$, a tedy $v_0=v/(2\pi)=cca\ v/6$.



Příklad

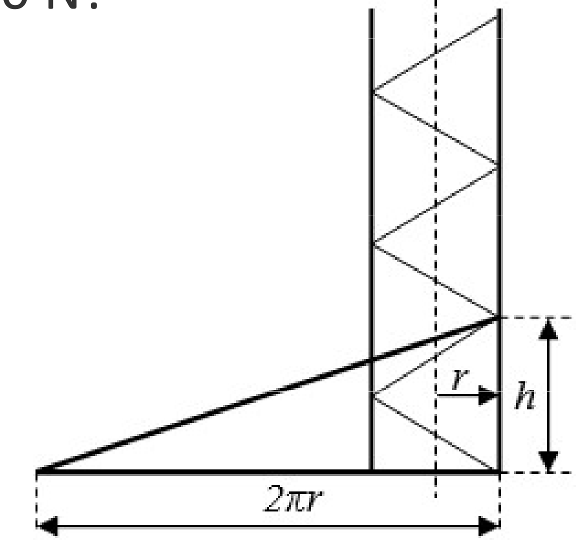
Jak velká je maximální tíha břemene, které lze zvednout šroubem o poloměru 30 cm a se stoupáním závitu 1 mm při působení síly 500 N?

F = 500 N
r = 0,3 m
h = 0,001 m
G = ?

$$G \cdot h = F \cdot 2\pi \cdot r$$

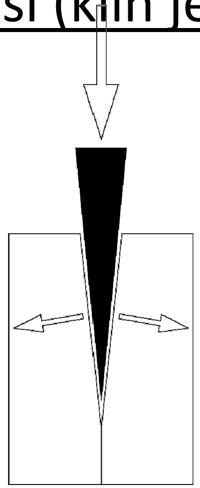
$$G = \frac{F \cdot 2\pi \cdot r}{h} \Rightarrow G = 942\ 000\ \text{N}$$

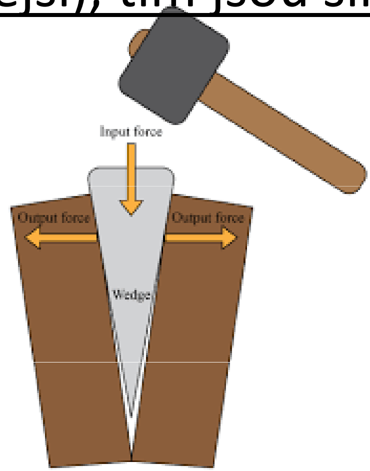
G = <u>942 kN</u>

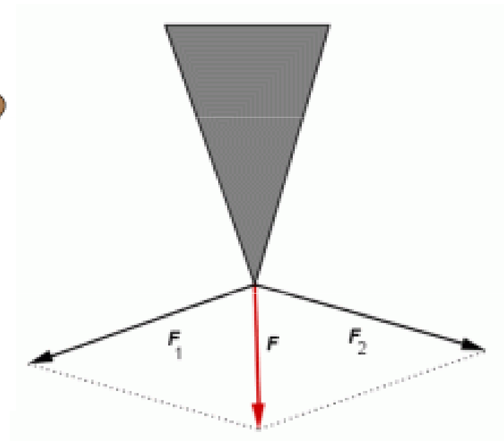


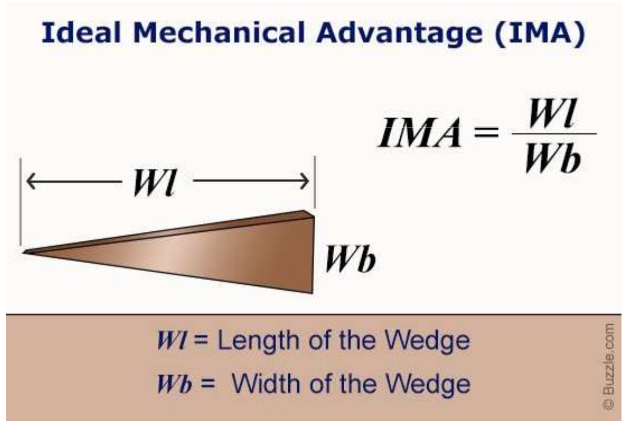
Klín

Klín je jednoduchý stroj, založený na principu nakloněné roviny, jehož jedinou částí je těleso s průřezem ve tvaru trojúhelníku (trojboký hranol, kužel, jehlan). Síla, která působí na podstavu klínu, se rozloží ve směru kolmém na boční stěny. Velikost silových složek závisí na úhlu, který svírají boční stěny, čím je tento úhel menší (klín je ostřejší), tím jsou síly větší.

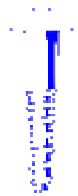








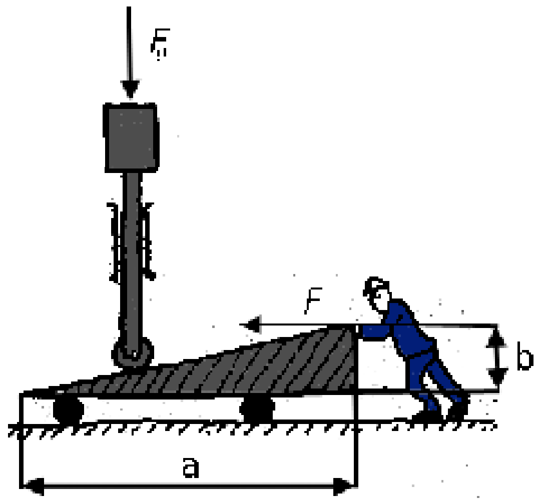
Klín můžeme použít jako součást řezných nástrojů obráběcích strojů, zahradnického náčiní (motyka, rýč, pluh), nože, sekery, jehly, ...



vrut
(klín společně se šroubem)

Hlodavé zuby
(řezáky)

Klín jako zarážka



Síla *F* působící na klín vyrovnává tíhu podkládaného tělesa ve stejném poměru, jako jsou rozměry klínu

$$\frac{F_g}{F} = \frac{a}{b}$$

Klín, který se nedá silou působící na boky vymáčknout, je **samosvorný** (samodržný). Pro samosvorný klín platí

$$\frac{b}{a} < 2f$$

kde *f* je součinitel smykového tření. V praxi se poměr *b/a* (úkos) volí značně menší. Samodržné klíny musí být ty, které se používají jako zarážky, podpěry.

Mechanika kontinua

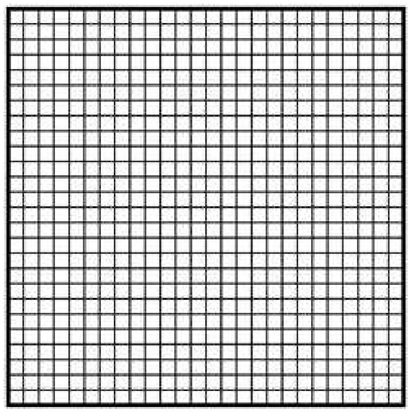
Struktura pevných látek

Pevné látky jsou látky, které si zachovávají svůj tvar, na rozdíl od kapalných a plynných látek. Dělí se na krystalické a amorfní.

Krystalické látky

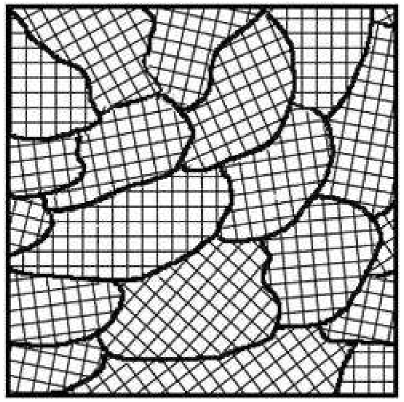
mají pravidelné uspořádání částic (atomů, molekul, iontů) , z nichž jsou složeny; vyskytují se buď jako monokrystaly nebo polykrystaly.

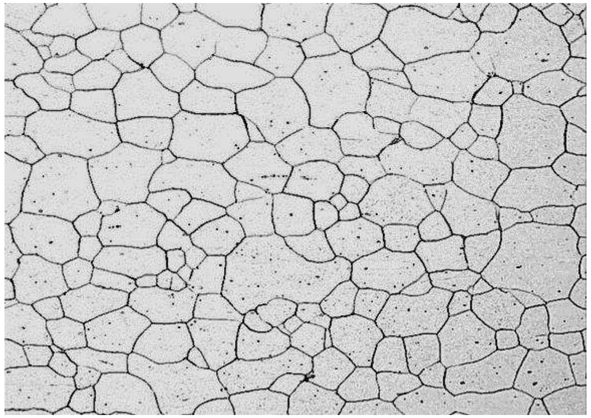
Monokrystaly mají pravidelné uspořádání částic uvnitř monokrystalu a dalekodosahové uspořádání. Pravidelné uspořádání částic dává monokrystalům pravidelný geometrický tvar. Typickou vlastností monokrystalů je **anizotropie** - tj. některé fyzikální vlastnosti látek jsou závislé na směru vzhledem ke stavbě krystalu (např. štípání slídy nebo křemene v určitých rovinách jde mnohem snáze než ve směrech jiných, …). Monokrystaly tvoří např. jsou NaCl, SiO_2, diamant,…



Krystaly sádrovce, Naica (Mexiko)

Polykrystaly tvoří většina pevných látek (všechny kovy, zeminy, prach,…), skládají se z velkého počtu drobných krystalů – zrn (10µm - několik milimetrů), uvnitř zrn jsou částice uspořádány pravidelně, poloha zrn je však náhodná. Různá orientace zrn u polykrystalických látek způsobuje, že jsou **izotropní**, tj. polykrystaly látky mají ve všech směrech uvnitř krystalu stejné vlastnosti (např. roztažnost při zahřívání).

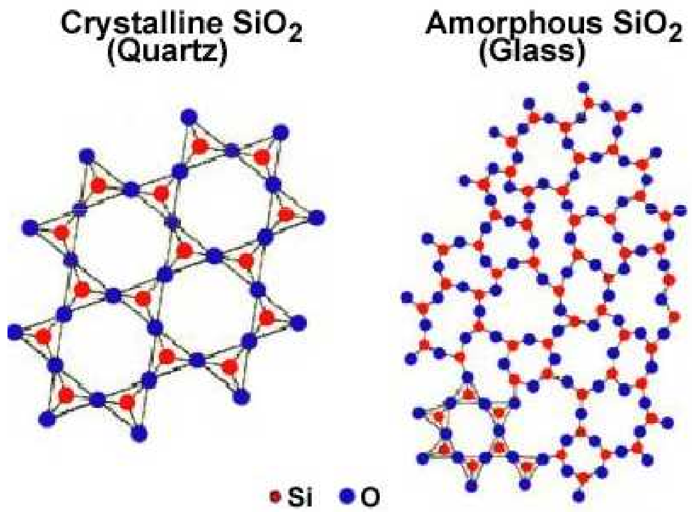


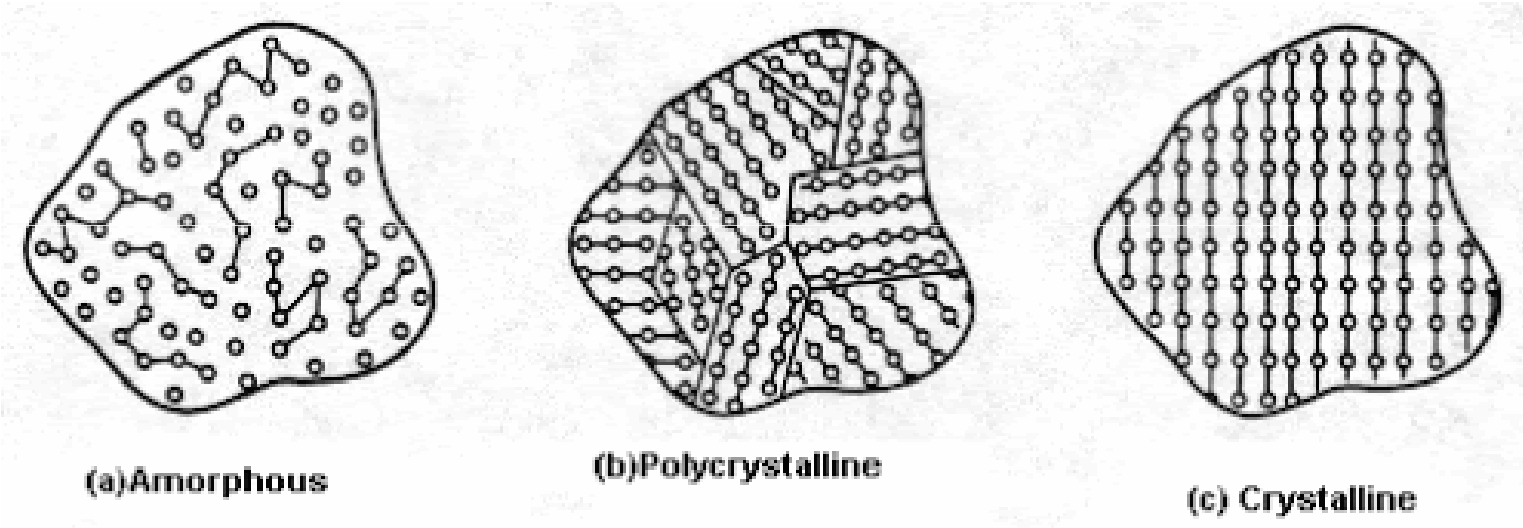


ocel

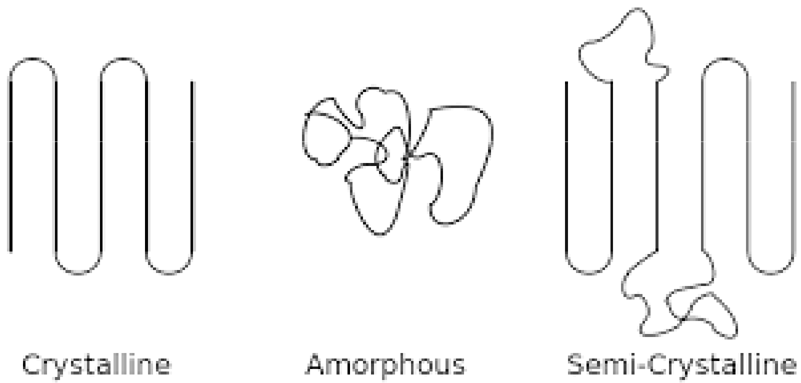
Amorfní látky

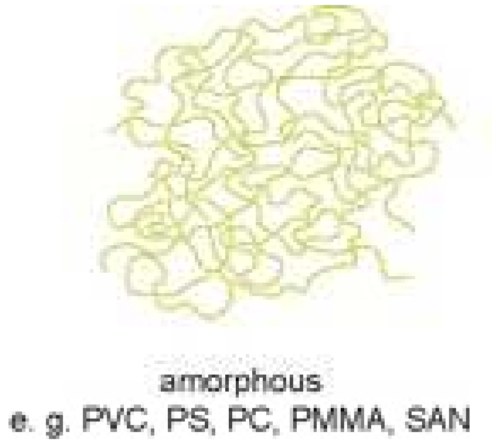
periodické uspořádání částic je omezeno na vzdálenost do zhruba 10^{-8} m, na větších vzdálenostech je pravidelnost uspořádání porušena. Amorfní látky se vyznačují krátkodosahovým uspřádáním. Patří sem sklo, pryskyřice, vosk, asfalt, pasty, …





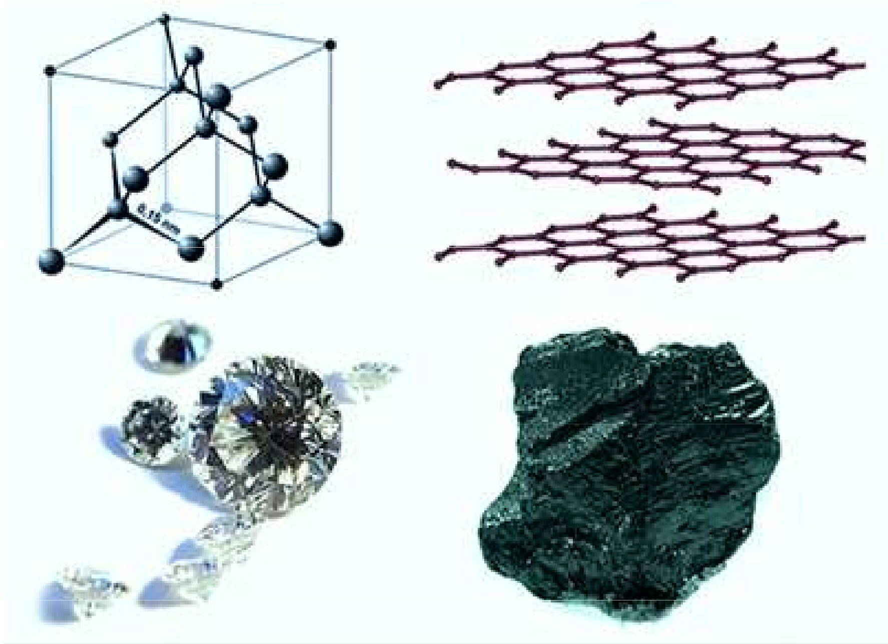
Polymery - tvoří zvláštní skupinu amorfních látek organického původu (kaučuk, bavlna, celulóza, bílkoviny, termoplasty, …). Jejich dlouhé makromolekuly jsou často navzájem propleteny, stočeny do klubíček nebo vytvářejí sítě.



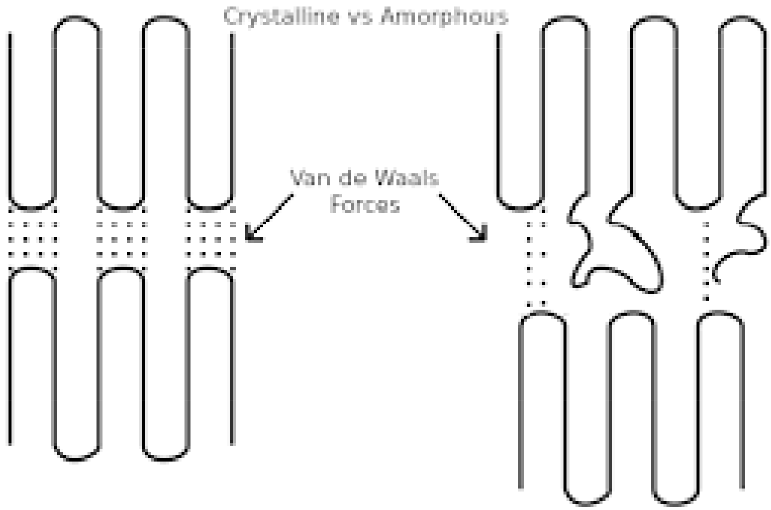


Vazby

Iontová
Kovalentní
Kovová
Vodíková
van der Waalsova



Polymery



Diamond	Graphite
Diamond Is Transparent	Graphite Is Black And Opaque
Diamond Is A Poor Conductor Of Electricity, But Is A Good Conductor Of Heat.	Graphite On The Other Hand Is A Good Conductor Of Heat And Electricity.
Diamond Is Hardest Substance Known In Nature	Graphite Is Soft And Slippery To Touch
Density Of Diamond Is More	Density Of Graphite Is Comparatively Less
It Is Insoluble In All Solvents	It Is Insoluble In All Ordinary Solvents
Diamond Is The Ultimate Abrasive	Graphite Is A Very Good Lubricant
Diamond Crystallizes In The Isometric System	Graphite Crystallizes In The Hexagonal System
It Occurs As Octahedral Crystals	It Occurs As Hexagonal Crystals

Hustota pevných látek

Hustota **homogenního tělesa** je dána jako poměr hmotnosti tělesa a jeho objemu. Jednotkou hustoty je kg.m^{-3} (g.ml^{-1}).

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Hustota v jednotlivých částech tělesa nemusí být stejná (obecně je tedy hustota funkcí souřadnic). V takovém případě je potřeba sledovat hustotu v různých částech tělesa

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

Pokud je těleso popisováno **soustavou hmotných bodů**, potom lze hmotnostní element Δm vyjádřit jako součet hmotností jednotlivých bodů, které se nacházejí v objemu ΔV, tzn.

$$\Delta m = \sum_{i \in \Delta V} m_i$$

kde m_i je hmotnost i-tého hmotného bodu.

U těles s rovnoměrným rozložením látky v prostoru, lze pro získání hustoty v daném bodě použít vztah

$$\rho = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

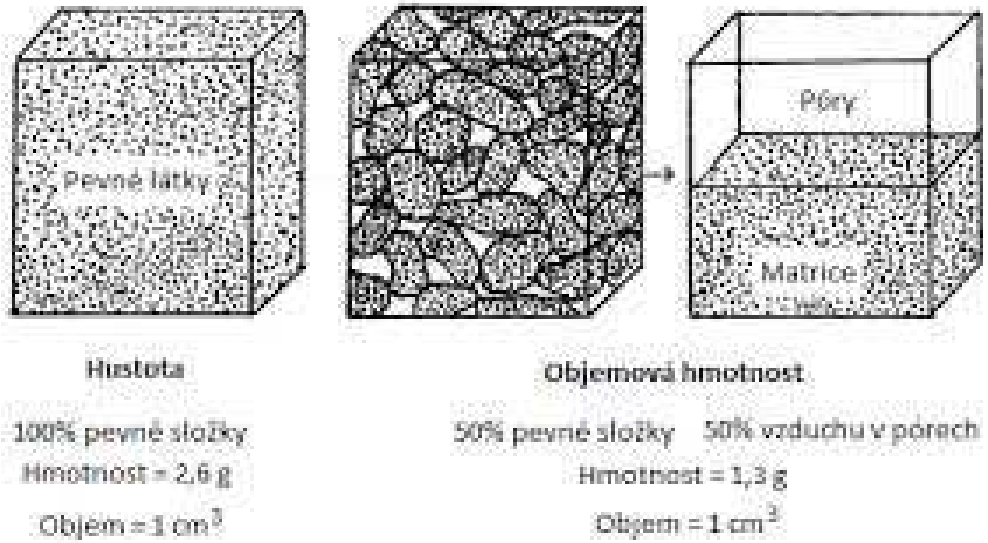
Limitní proces končí na elementech objemu, ve kterých se neprojevuje částicová struktura látek.

Průměrná hustota pevných látek odpovídá jejich průměrné hmotnosti vztažené na jednotku objemu

$$\rho_p = m_p.V \qquad [\varrho] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$$

Objemová hmotnost pevných látek

Objemová hmotnost látky je definována jako poměr hmotnosti tělesa ku celkovému objemu tělesa stanoveného z vnějších rozměrů (tj. včetně pórů, mezer a dutin). Objemová hmotnost látky je veličina závislá nejen na hustotě vlastní látky (v kompaktním stavu), ale i na hustotě látky vyplňující póry.



Příklad

Bude-li žula v kompaktní formě, bude mít krychle o straně 1 m hmotnost cca 2700 kg, hustota bude tedy 2700 kg/m^3. Bude-li materiálem žulový štěrk, do nádoby stejného objemu se vejde pouze cca 2000 kg štěrku (obsahujícího i vzduchové mezery), objemová hmotnost bude tedy 2000 kg/m^3. Žula ve formě štěrku má tedy jinou objemovou hmotnost než hustotu. Stejně tak pytel brambor má jinou objemovou hmotnost než je hustota samotného bramboru. Podobné platí pro pórovité formy látek – např. kompaktní forma nějakého plastu má větší hustotu než je objemová hmotnost jeho pěnové formy.

Příklad

Vnější objem prázdné duté nádoby (objem dutiny + stěn) je 22 dm^3. Její hmotnost je 15 kg. Hustota materiálu stěn je 7,5 $g.cm^{-3}$. Vypočítejte objem kapaliny, který může nádoba pojmout.

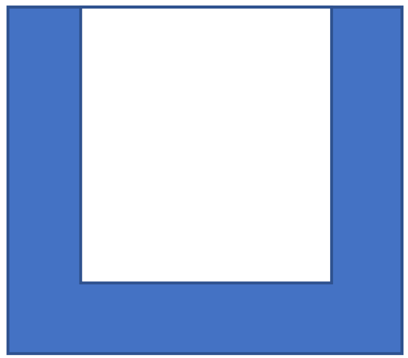
$V_1 = 22\ dm^3 = 22\ l$

$m = 15\ kg$

$\rho_m = 7{,}5\ g.cm^{-3} = 7500\ kg.m^{-3}$

$V_m = m/\ \rho_m = 15/7500 = 0{,}002\ m^3 = 2\ l$

$V = V_1 - V_m = 22 – 2 = \underline{20\ l}$



Deformace pevného tělesa

Deformace pevného tělesa je změna jeho rozměrů a objemu, která je zpravidla doprovázena změnou tvaru tělesa. Deformace <u>nastává působením vnějších sil</u>. Ke změně tvaru tělesa je třeba vykonat práci na změnu vazeb mezi částicemi.

<u>Druhy deformace tělesa podle doby trvání</u>:

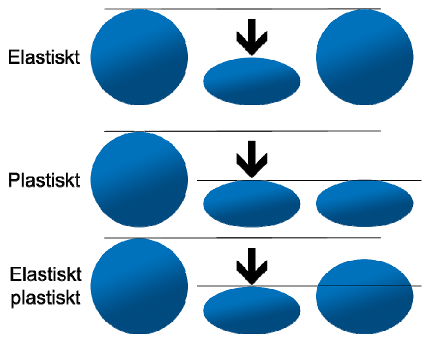
<u>1. pružná (elastická)</u> - nepůsobí vnější síly, deformace vymizí. Tělesa jsou pružná (elastická), deformace je dočasná.

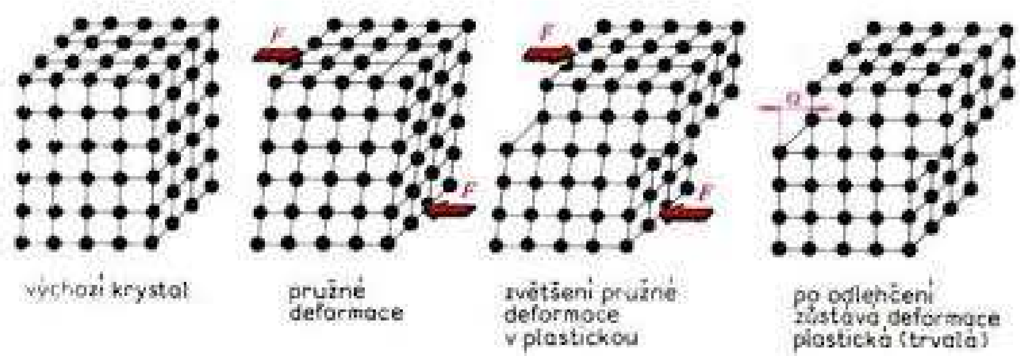
Příklad: malé prodloužení pružiny nebo ohnutí ocelového pásku.

<u>2. tvárná (plastická)</u> - deformace, která přetrvává i pokud přestanou působit vnější síly.

Příklad: změna tvaru kovového tělesa při kování nebo válcování.

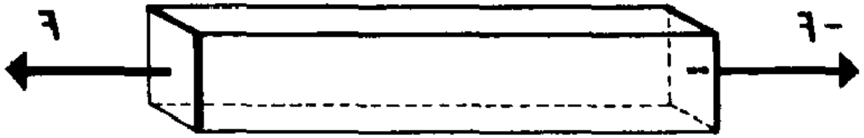
V praxi se vyskytují většinou oba druhy deformace současně.





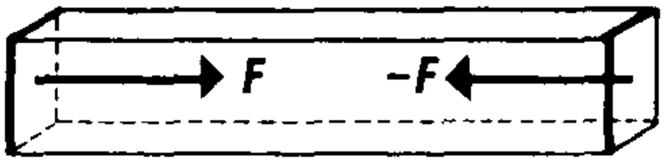
***Druhy deformace tělesa podle změny v krystalové mřížce*:**

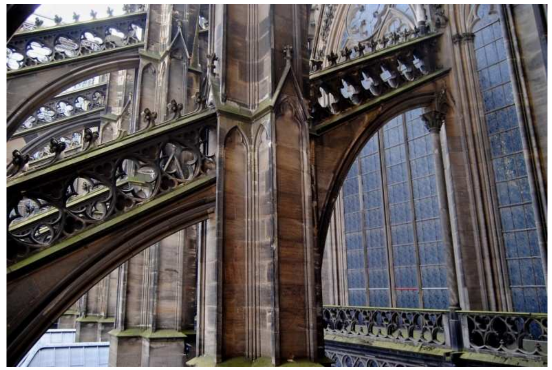
1. deformace tahem: vzniká působením dvou opačných sil směřujících ven z tělesa, důsledek = zmenšení průřezu a zvětšení délky



Touto deformací jsou namáhány např. závěsná lana jeřábu.

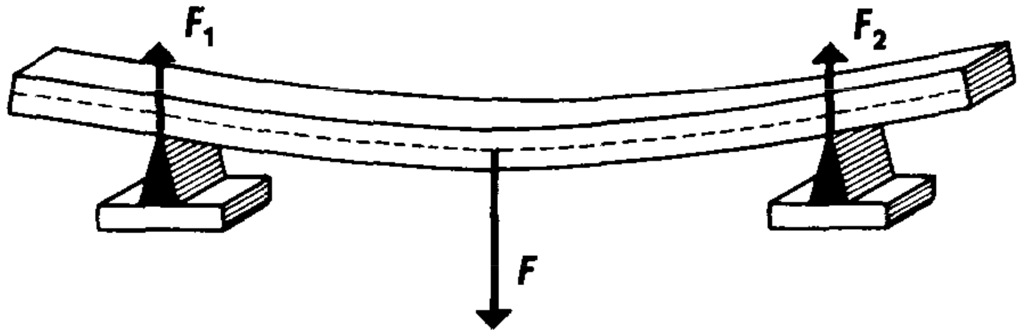
2. deformace tlakem: vzniká působením dvou opačných sil směřujících dovnitř tělesa, důsledek = zvětšení průřezu a zmenšení délky





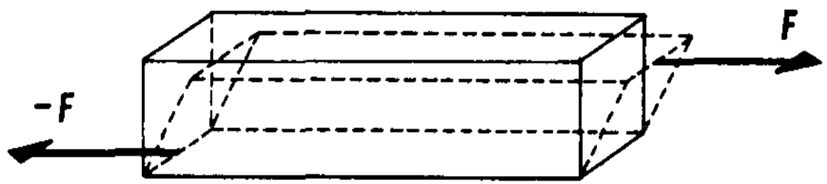
Touto deformací jsou namáhány: pilíře, nosníky

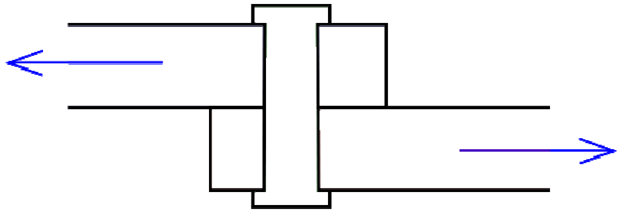
3. deformace ohybem: horní vrstva je namáhána v tlaku a spodní v tahu, přičemž střední vrstva zachovává svou délku



Touto deformací jsou namáhány: nosníky

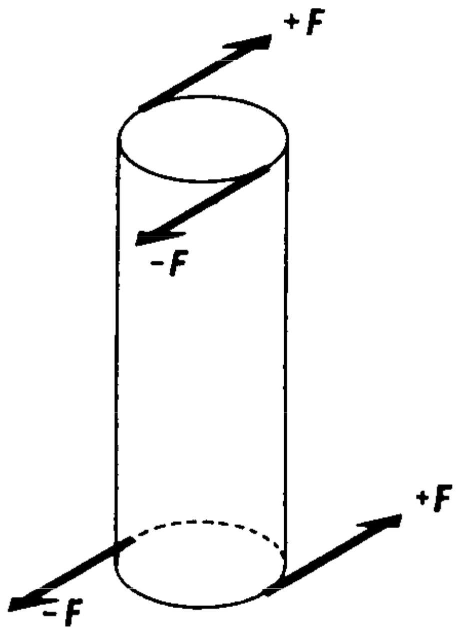
4. deformace smykem (střihem): působení dvou opačných sil v rovinách podstav





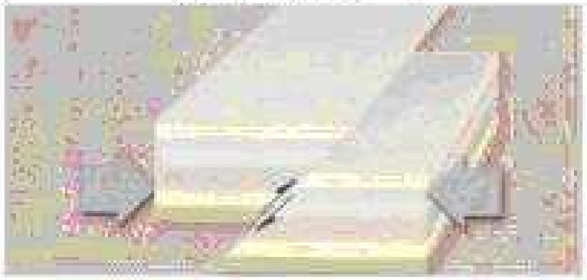
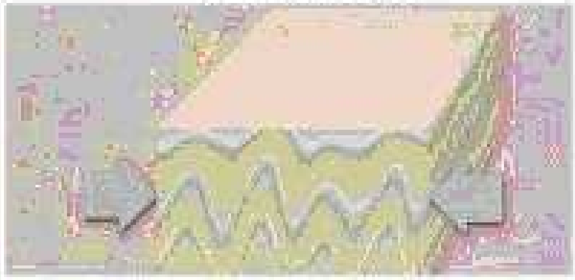
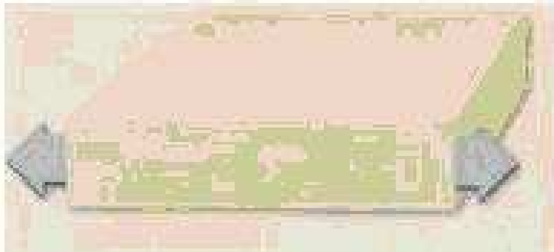
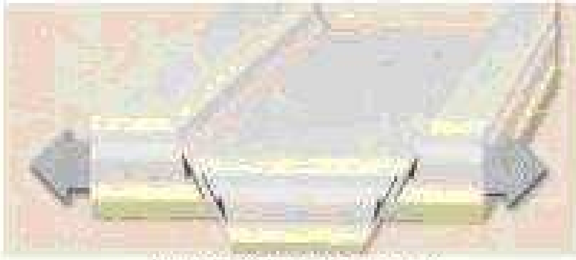
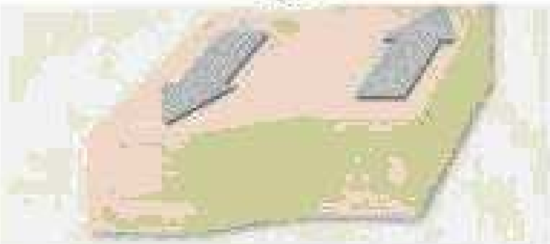
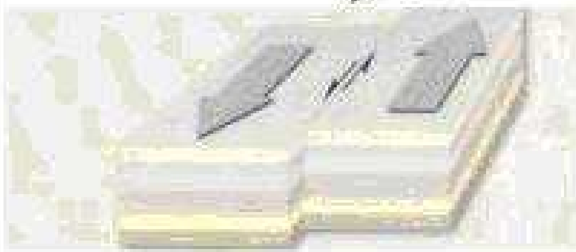
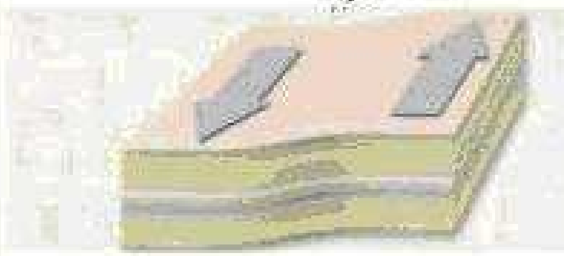
Touto deformací jsou namáhány: nýty, šrouby

5. deformace kroucením: na koncích tyče působí dvě dvojice sil se stejným momentem ale opačného směru



Touto deformací jsou namáhány: hřídele, šrouby, vrtáky

Geologické struktury

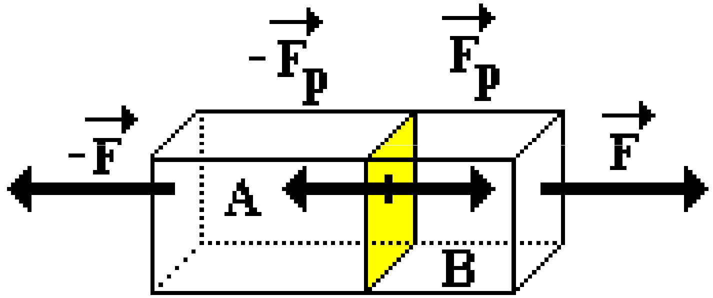
Druh napětí	Křehké deformace	Duktilní deformace
Komprese	Komprese	Komprese
 Zkrácení horninového prostředí	 Vznik přesmyku	 Vznik vrás
Extenze	Extenze	Extenze
 Natažení horninového prostředí	 Vznik příkopu při poklesu horninového bloku mezi dvěmi antitetickými poklesy	 Natažení vrstev při současném snížení jejich mocnosti
Střih	Střih	Střih
	 Vznik horizontálního posunu	 Duktilní deformace podél střižné zóny

Normálové napětí

Normálové napětí σ_n charakterizuje stav napjatosti uvnitř tělesa.

$$\sigma_n = \frac{F_p}{S}$$

kde $\mathbf{F_p}$ je velikost síly pružnosti působící kolmo na plochu příčného řezu o obsahu **S**. Hlavní jednotkou normálového napětí je **Pa**. V praxi se využívá násobných jednotek MPa nebo GPa.



Pomocí $\boldsymbol{\sigma_n}$ můžeme určit, kdy je ještě deformace pružná. Měříme veličinou **mez pružnosti $\boldsymbol{\sigma_E}$**, což je experimentálně určená největší hodnota $\boldsymbol{\sigma_n}$, při kterém je ještě deformace pružná. Při vyšším $\boldsymbol{\sigma_n}$ je těleso trvale deformováno. Překročí-li normálové napětí tzv. **mez pevnosti $\boldsymbol{\sigma_p}$**, poruší se soudržnost materiálu (drát se přetrhne, cihla se rozpadne).

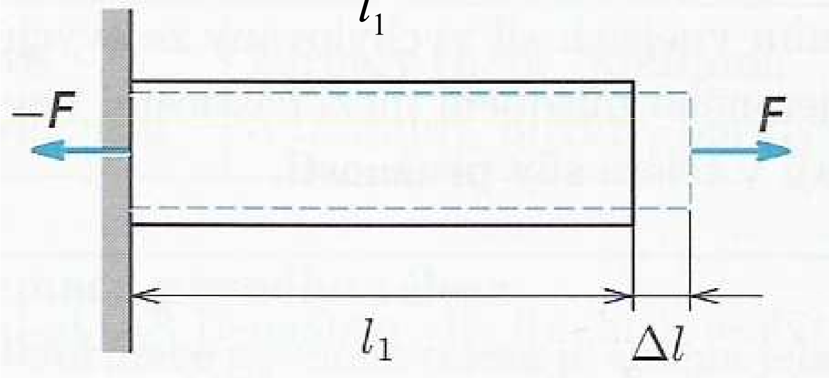
Hookův zákon elasticity

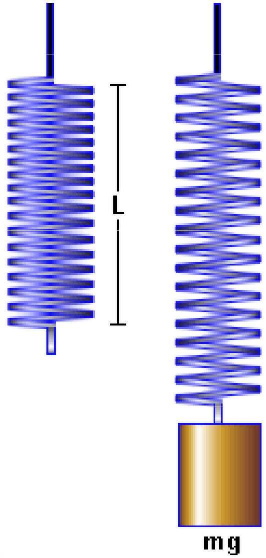
Pro hodnoty normálového napětí menší než **mez úměrnosti** σ_u je normálové napětí přímo úměrné relativnímu prodloužení:

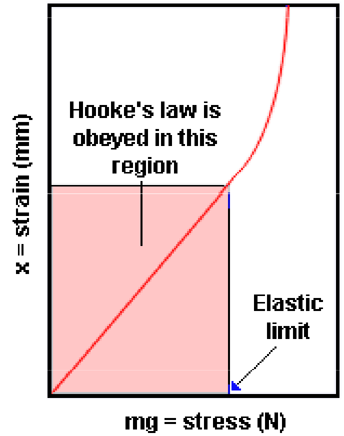
$$\sigma_n = E \cdot \varepsilon$$

σ_n [Pa] – normálové napětí
ε [nemá jednotku] – relativní prodloužení
E [Pa] – konstanta úměrnosti, nazvaná Youngův modul pružnosti (modul pružnosti v tahu)

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_1}$$







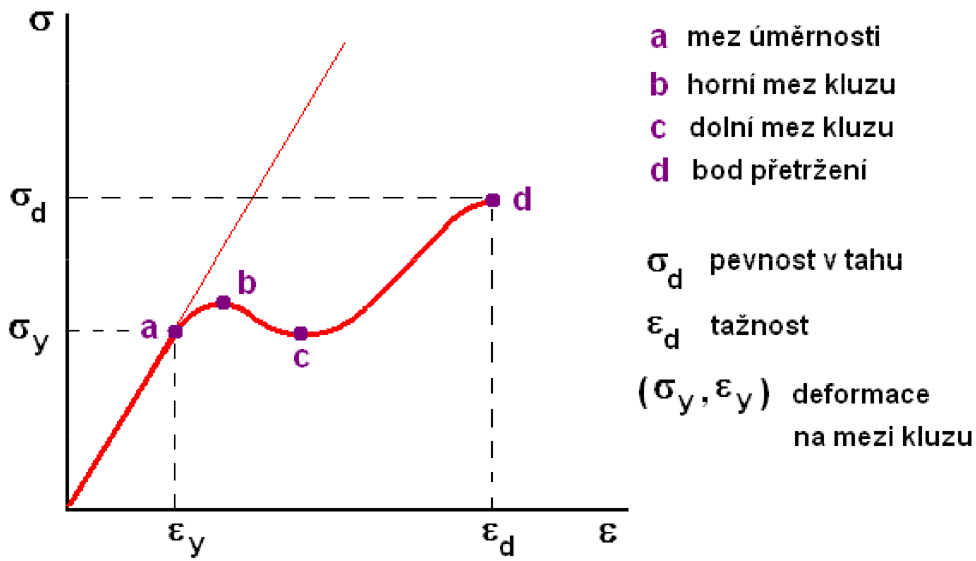
Pokud je objekt konstantního průřezu *A* namáhán jenom normálovou silou *N*, lze určit prodloužení

$$\Delta l = \varepsilon \cdot l_0 = \frac{\sigma}{E} \cdot l_0 = \frac{N \cdot l_0}{E \cdot A} = \frac{F \cdot l_0}{E \cdot A}$$

kde Δl je absolutní změna délky součásti a l_0 resp. l_1 její původní délka.

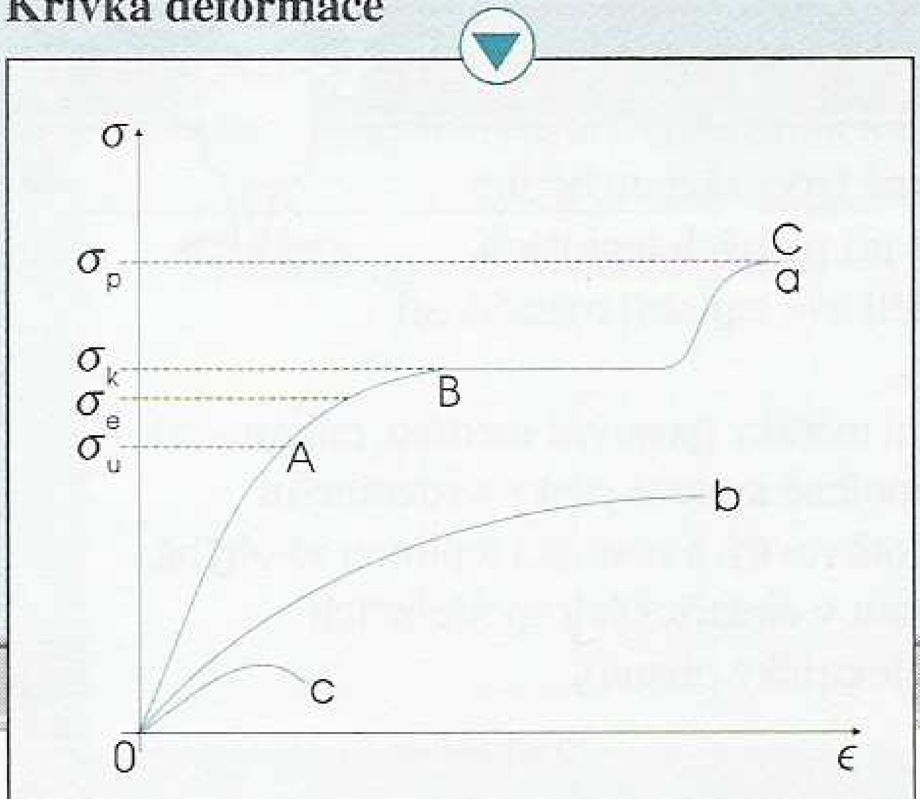
Křivka deformace

graf závislosti normálového napětí σ_n na relativním prodloužení ε



<u>Hookův zákon platí pouze pro malé deformace</u>, tj. pouze v lineární oblasti křivky deformace.

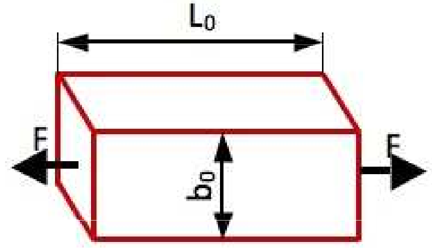
Křivka deformace



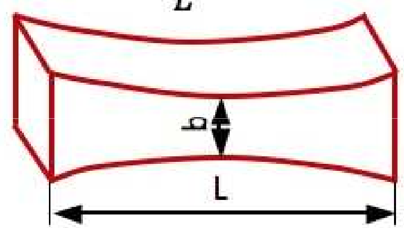
OA – pružná deformace, σ_u mez úměrnosti
AB – dopružování, σ_E mez pružnosti
BE – oblast plastické deformace,
σ_k – mez kluzu
σ_p – mez pevnosti

a – příklad elastické látky
b – nepružná (plastická)
c – křehká látka

Poissonovo číslo označuje poměr relativního prodloužení tyče k jejímu relativnímu příčnému zkrácení – zúžení při namáhání tahem. Označuje se písmenem *m*, je bezrozměrná a v absolutní hodnotě větší než 1. Konstanta je závislá na typu materiálu.



$$\mu = \frac{\frac{b-b_0}{b}}{\frac{L-L_0}{L}} \leq 0{,}5$$



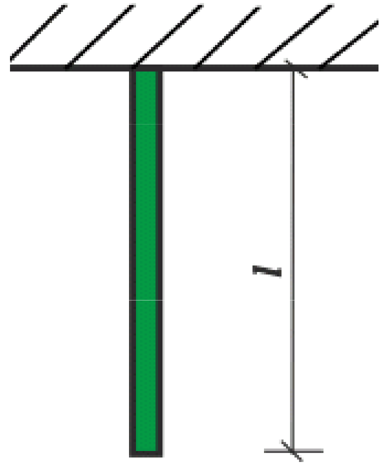
Material	Elastic modulus (MPa)	Poisson's ratio
Dentin	18.6×10^3	0.31
Periodontal ligament	69	0.45
Cortical bone	13.7×10^3	0.30
Sponge bone	13.7×10^3	0.30
Gutta-percha	0.69	0.45
Zirconia post	150×10^3	0.25
Fiber glass post	40×10^3	0.32
Quartz fiber post	13 GPa	0.3
Composite resin	22.2×10^3	0.28
Ceramic crown	96×10^3	0.26

MPa: Megapascal

Příklad

Jak dlouhý by musel být železný drát, aby se roztrhl vlastní tíhou, když ho na jednom konci zavěsíme? Hustota železa je 7,8 $g.cm^{-3}$, a mez pevnosti železa je 320 MPa.

Největší zatížení drátu je v místě upevnění, drát je zde napínán celou svou tíhou. Aby se drát roztrhl, musíme uvažovat že *σ* má velikost meze pevnosti.



$\rho = 7{,}8\ g.cm^{-3}$

$\sigma = 320\ MPa$

$l = ?$

$$G = m.g = V.\rho.g$$

$$\sigma = G/S = l.S.\rho.g/S = l.\rho.g$$

$$l = \sigma/\rho.g = 320\cdot1067{,}8\cdot10^{3}\cdot9{,}81 = \underline{4{,}2\cdot10^{3}\ m}$$

Určete práci, kterou je třeba provést, aby se ocelová tyč (E = 220 GPa) délky 1m, průřezu 1 cm^2 prodloužila při pružné deformaci v tahu o 1 mm.

$l_0 = 1$ m
$\Delta l = 1mm = 1.10^{-3}$ m
$S = 1cm^2 = 1.10^{-4}\ m^2$
$E = 220.10^9$ Pa

$$\frac{F}{S} = E.\frac{\Delta l}{l_0}$$

$$F = S.E.\frac{\Delta l}{l_0}$$

$$W = F.\Delta l$$

$$W = S.E.\frac{\Delta l}{l_0}.\Delta l$$

$$W = \frac{S.E.(\Delta l)^2}{l_0}$$

$$W = \frac{10^{-4}\,m^2\,220.10^9\,Pa.10^{-6}\,m^2}{1m} = 220.10^{-1}\,Pa.m^3 = 22\,\frac{Nm^3}{m^2}$$

$$W = 22\,N.m = 22\,J$$

$$W = \underline{22\,J}$$

Tvrdost

Tvrdost odolnost povrchových oblastí materiálu proti místnímu porušení cizím tělesem. Závisí na pevnosti vazby mezi částicemi v krystalové struktuře materiálu. Čím je vzdálenost částic menší, tím je vazba zpravidla pevnější a materiál tvrdší. Vazby mezi vzdálenějšími částicemi jsou slabší, a proto je materiál měkčí.

Mohsova stupnice tvrdosti

používá se především v mineralogii, vyjadřuje schopnost jednoho materiálu dělat vrypy do druhého.

Mohsova stupnice tvrdosti		
relativní tvrdost	minerál	účinek
1	**mastek**	nehet se zařeže
2	**sůl kamenná**	nehet ji rýpe
3	**kalcit**	měděný plech ho rýpe
4	**fluorit**	hřebík ho lehce rýpe
5	**apatit**	kapesní nůž ho ještě rýpe
6	**živec – ortoklas**	ocelový pilník ho rýpe
7	**křemen**	rýpe do skla
8	**topaz**	rýpe do skla
9	**korund**	rýpe do skla
10	**diamant**	rýpe do skla

K měření tvrdosti technických materiálů (kovy, betony, …) se používají metody

zkoušky vrypové (Martens)
zkoušky vnikací (Brinell, Knoop, Rockwell, Vickers)
zkoušky odrazové (Shore)

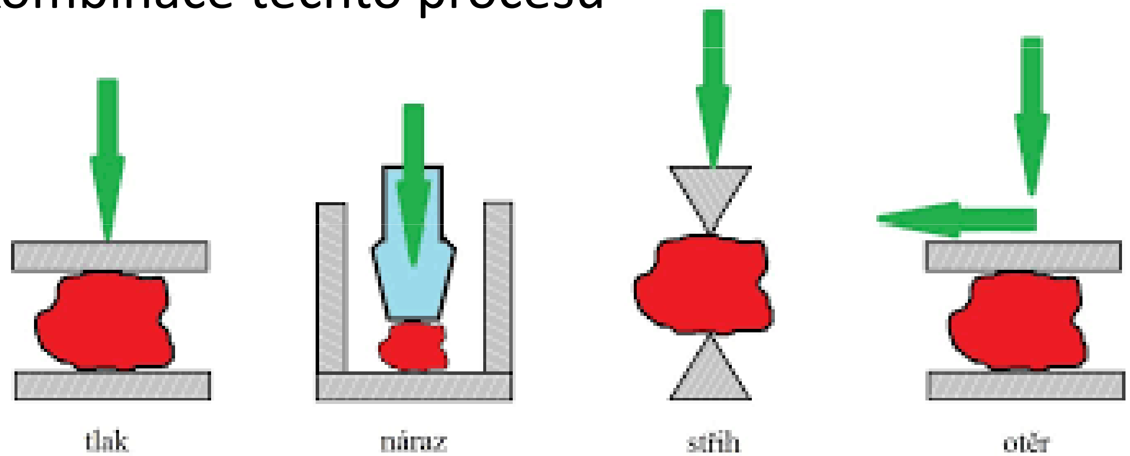
statické (tvrdost podle Brinella, Knoopa, Rockwella, Vickerse)
dynamické (Poldi kladívko, Baumanovo kladívko, Shoreho skleroskop, duroskop)

Test	Indenter	Shape of indentation: Side view	Shape of indentation: Top view	Load, P	Hardness number
Brinell	10-mm steel or tungsten-carbide ball	D, d	d	500 kg 1500 kg 3000 kg	$HB = \frac{2P}{(\pi D)(D - \sqrt{D^2 - d^2})}$
Vickers	Diamond pyramid	136°	L	1–120 kg	$HV = \frac{1.854P}{L^2}$
Knoop	Diamond pyramid	$L/b = 7.11$ $b/t = 4.00$ t	b, L	25 g–5 kg	$HK = \frac{14.2P}{L^2}$
Rockwell A C D	Diamond cone	120° t = mm		60 kg 150 kg 100 kg	HRA HRC $= 100 - 500t$ HRD
B F G	$\frac{1}{16}$-in. diameter steel ball	t = mm		100 kg 60 kg 150 kg	HRB HRF HRG $= 130 - 500t$
E	$\frac{1}{8}$-in. diameter steel ball			100 kg	HRE

Drcení a mletí

= přenos mechanické energie mlecích agregátů na rozmělňovaný materiál, jehož krystaly jsou pod mechanickým napětím. Přenos energie způsobuje šíření trhlin, které jsou následované lomem. Tímto mechanismem je zvýšen měrný povrch částic (zmenšen průměr velikosti částic), což má za následek zvýšení kapilárních sil v objemu materiálu („geometrická aktivita“ prášku). Vysoká celková povrchová energie vzniklých částic prášku („strukturní aktivita“) zvyšuje reakční schopnost těchto částic oproti kompaktnímu materiálu.

Existují čtyři základní rozmělňovací procesy: tlak, náraz, střih a otěr, v praxi se většinou využívá kombinace těchto procesů



Drcení je proces, při němž se základní surovina rozmělňuje na menší části a výsledným produktem je hrubý prášek. Jeho **mletím** vzniká jemnější materiál - prach.

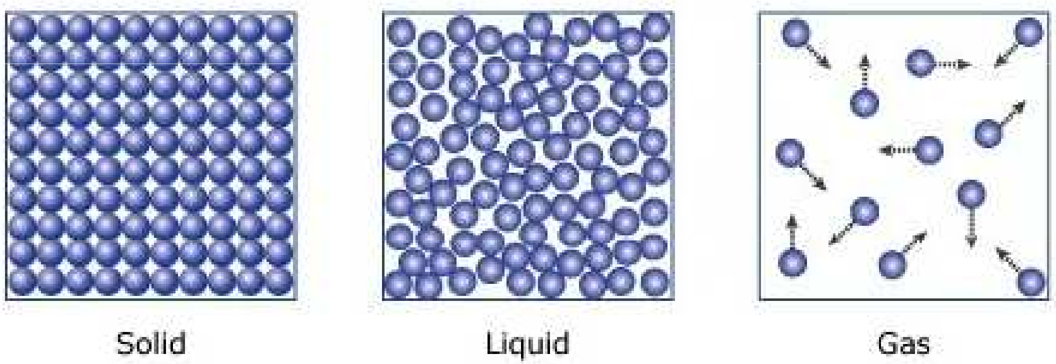
Mechanika tekutin

Tekutiny

= společné označení kapalin a plynů, základní vlastnost je **tekutost**, tj. neschopnost udržet svůj stálý tvar díky snadné vzájemné pohyblivosti částic. Tekutá tělesa nemají stálý tvar, přizpůsobují se tvaru okolních pevných těles – tvaru nádoby, rozlévají se po stole, apod. K tekutinám se většinou řadí také sypké látky, které jsou sice pevného skupenství, ale splňují kritérium tekutosti.

Kapaliny zachovávají stálý objem a jsou velmi málo stlačitelné. Různé kapaliny a plyny se liší svou tekutostí. Tekutější kapaliny mají menší vnitřní tření – viskozitu (tření vznikající smýkáním molekul po jiných molekulách).

Plyny nemají stálý tvar ani stálý objem, jsou velmi snadno stlačitelné. Vzdálenosti mezi molekulami plynu jsou mnohem větší než u kapalin, což umožňuje jejich stlačení. Tvar a objem jsou dány tvarem a objemem nádoby, v nichž je plyn umístěn. Zvětšíme-li objem tělesa, plyn vyplní opět celý objem nádoby. Viskozita plynů je mnohem menší než viskozita kapalin.



Plyny <u>jsou rozpínavé</u>, kdežto **<u>kapaliny</u>** <u>vytvářejí volnou hladinu</u>. <u>Kapaliny jsou stlačitelné jen nepatrně, kdežto plyny jsou stlačitelné velmi jednoduše</u>.

Pro zjednodušení se zavedly:

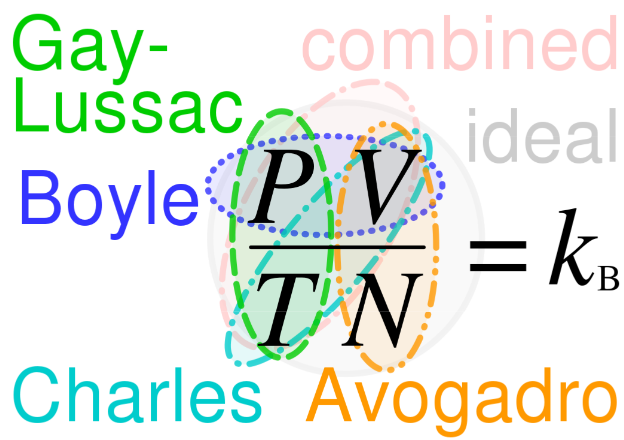
Ideální kapalina – dokonale tekutá, bez vnitřního tření, zcela nestlačitelná.

Ideální plyn – dokonale tekutý, bez vnitřního tření, dokonale stlačitelný.

Consider a sample of an ideal gas that is taken from an initial to a final state, with the amount of the gas also changing.

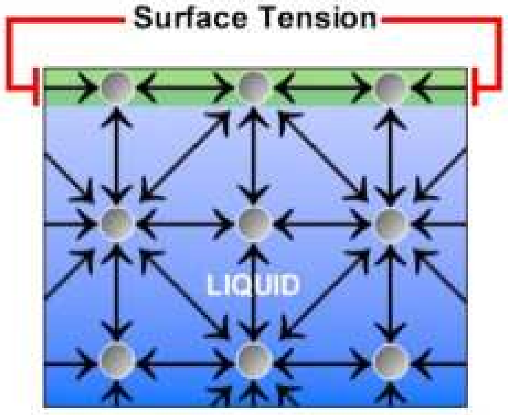
$$PV = nRT \qquad \frac{PV}{nT} = R = \text{constant} \qquad \frac{P_fV_f}{n_fT_f} = \frac{P_iV_i}{n_iT_i}$$

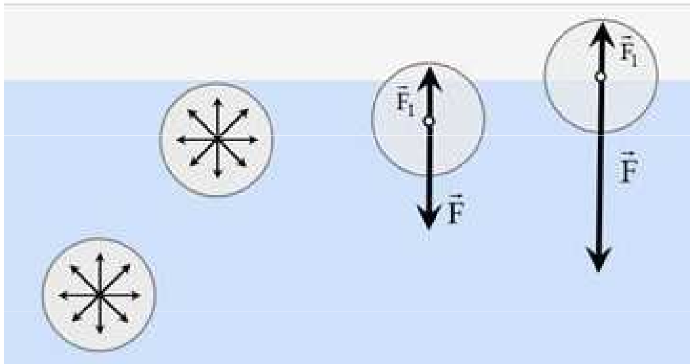
Constant T, constant n:	$P_fV_f = P_iV_i$	*Boyle's law*
Constant P, constant n:	$\frac{V_f}{T_f} = \frac{V_i}{T_i}$	*Charles' law*
Constant V, constant n:	$\frac{P_f}{T_f} = \frac{P_i}{T_i}$	*Gay-Lussac's law*
Constant P, constant T:	$\frac{V_f}{n_f} = \frac{V_i}{n_i}$	*Avogadro's law*



Kapaliny

Kolem každé molekuly lze opsat kouli o poloměru $r_m \approx 10^{-9}$ m (tzv. **sféra molekulového působení**) tak, aby síly ležící mimo poloměr r_m působící na tuto molekulu byly zanedbatelné. Pokud je molekula uvnitř kapaliny – pak výslednice přitažlivých sil uvnitř sféry je nulová, u molekuly v menší vzdálenosti od volného povrchu než r_m je výslednice sil nenulová a směřuje kolmo k povrchu a do kapaliny. Molekuly plynu v horních sférách působí na molekuly výslednou přitažlivou silou, většinou k malé hustotě plynů zanedbatelnou.





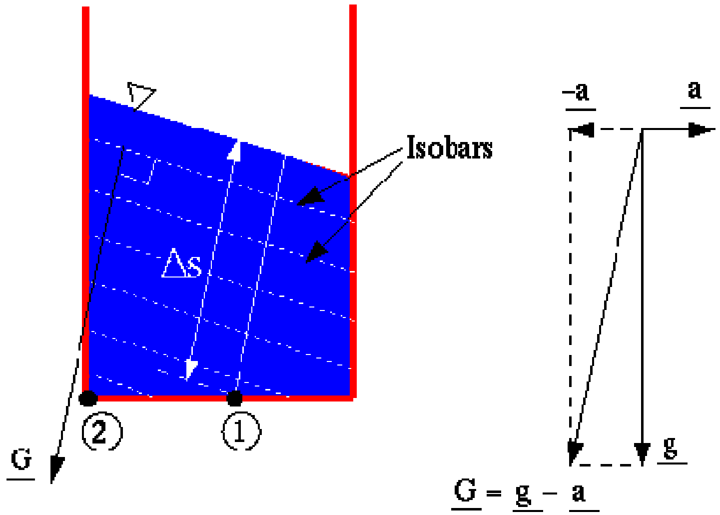
Na volném povrchu kapaliny se nachází tzv. **povrchová vrstva kapaliny**, jejíž tloušťka je rovna poloměru sféry molekulového působení (řádově 10^{-9} m).

Jsou-li kapaliny v klidu, pak v tíhovém poli Země vytvářejí vodorovný povrch – **volnou hladinu**. Volný povrch kapaliny se chová obdobně jako pružná blána.

Povrch kapaliny během pohybu

V **klidu** a v **rovnoměrném přímočarém pohybu** zůstává hladina kapaliny v klidu.

Při **pohybu rovnoměrně zrychleném** je kapalina rovnoměrně urychlena v daném směru, tj. na každou částici kapaliny v nádrži působí stejný vektor zrychlení **G** konstantní v čase. Výsledná síla je výslednicí tíhové a setrvačné síly.



Horizontální pohyb

$\mathbf{G = g - a}$

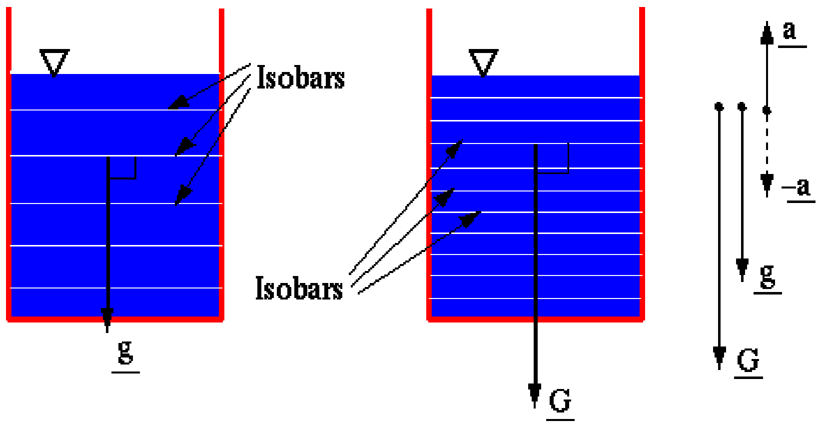
$G_x = a.\cos\alpha$

$G_y = g.\sin\alpha$

Směr výsledného zrychlení **G** je kolmý na hladinu kapaliny (stejně jako příslušná síla).

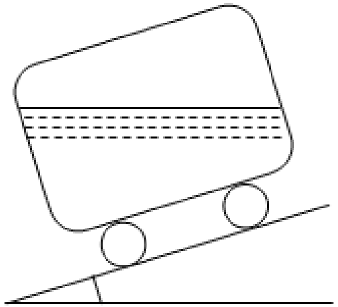
Vertikální pohyb

G = **g** + **a**, resp. **G** = **g** – **a**, v závislosti na směru pohybu (dolů, resp. nahoru).

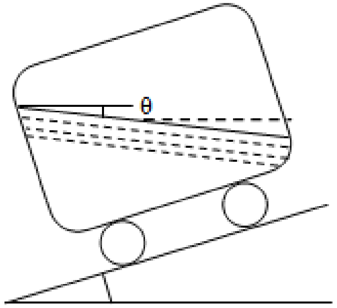


Povrch kapaliny během pohybu po nakloněné rovině

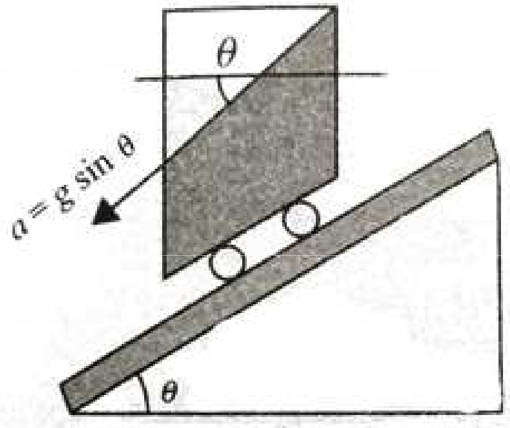
Při pohybu nádrže s kapalinou na nakloněné rovině s úhlem α

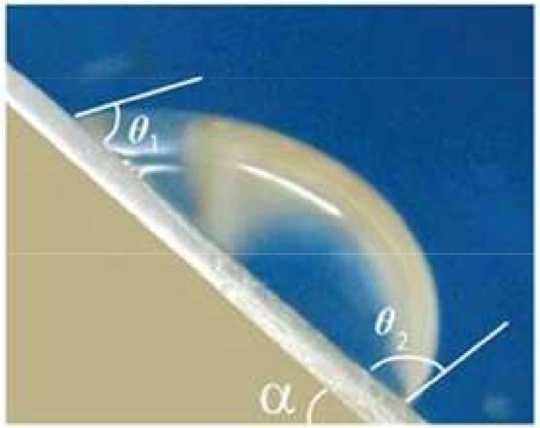


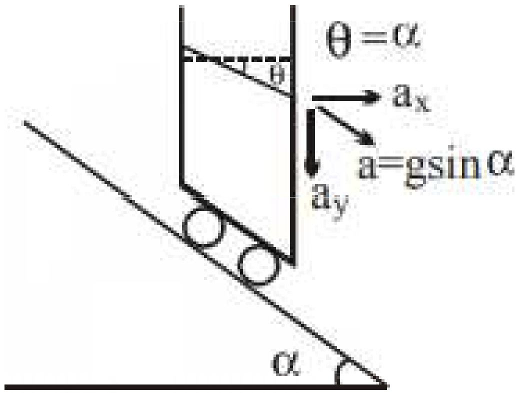
(a) Before acceleration



(b) After acceleration







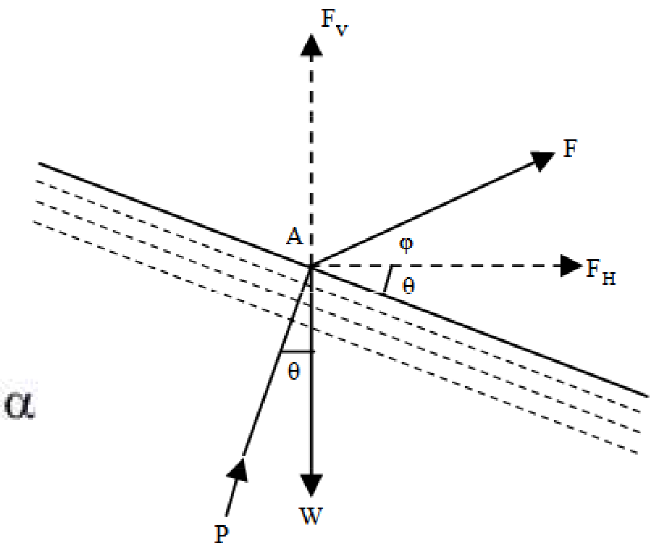
$a = g.\sin\theta$

$a_x = a.\cos\alpha = (g.\sin\alpha).\cos\alpha$

$a_y = a.\sin\alpha = (g.\sin\alpha).\sin\alpha =$

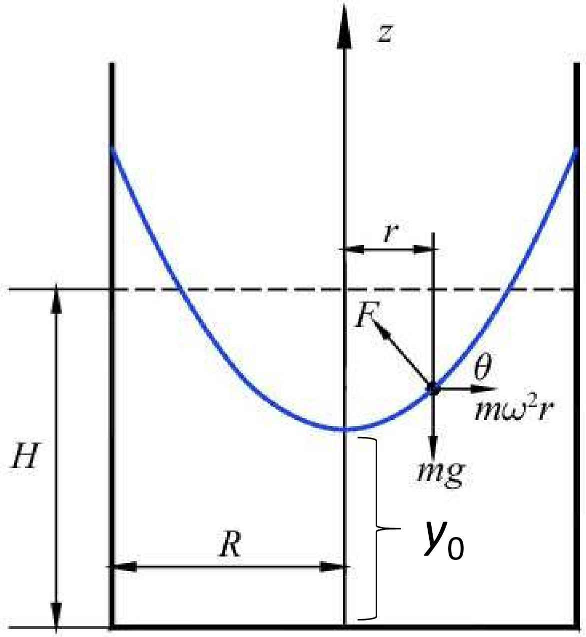
$= g.\sin^2\alpha$

$$\tan\theta = \frac{a_x}{g - a_y} = \frac{g\sin\alpha\cos\alpha}{g(1-\sin^2\alpha)} = \tan\alpha$$



Povrch kapaliny v rotujici nádobě

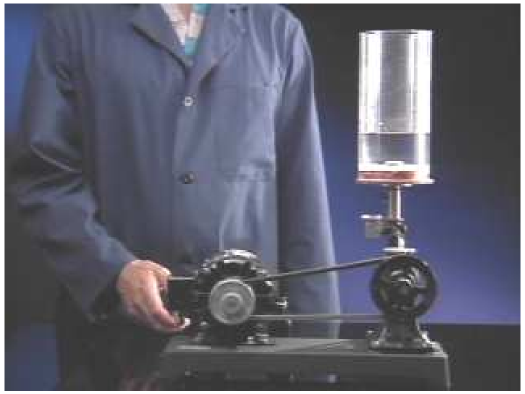
Hladina je v každém bodě kolmá na k výslednici působících sil - tíhové a odstředivé (v soustavě spojené s nádobou). Ve vzdálenosti *x* (resp. *r*) od osy otáčení je

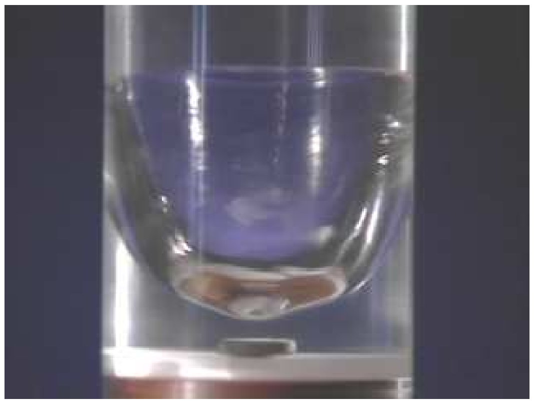


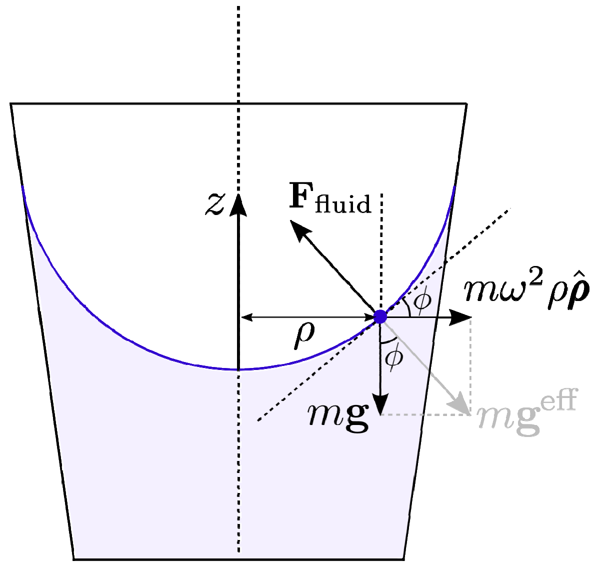
$$\tan\alpha = \frac{F_o}{G} = \frac{m\omega^2 x}{mg} = \frac{\omega^2 x}{g} = \frac{dy}{dx}$$

$$y = \int \frac{\omega^2 x}{g} dx = \frac{\omega^2 x^2}{2g} + y_0$$

Povrchem rotující kapaliny je tedy <u>rotační paraboloid</u> (rotační plocha vzniklá rotací paraboly kolem její osy).

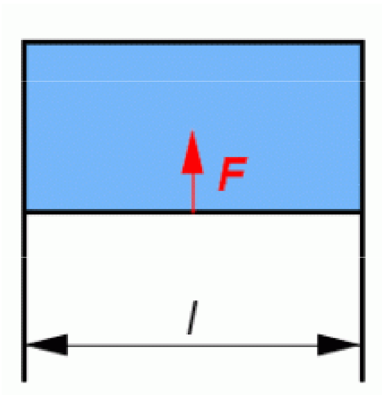


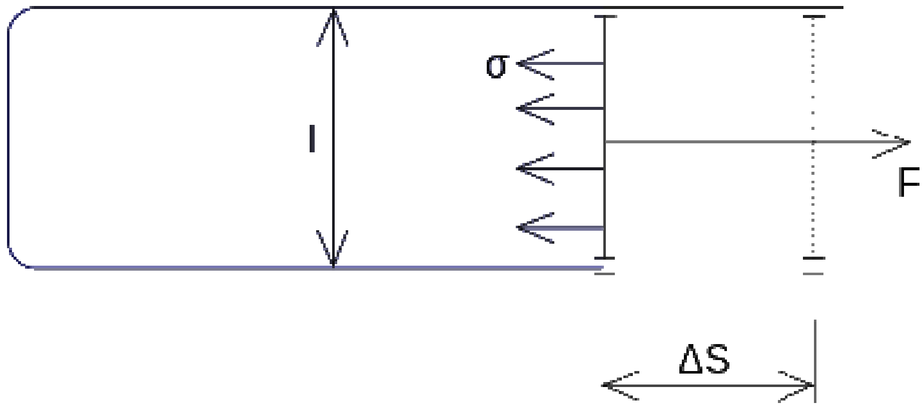




Povrchové napětí (povrchová síla)

Molekuly kapaliny na sebe působí přitažlivými silami, výslednice těchto sil je nulová, při posunutí molekuly do povrchové vrstvy má výslednice těchto sil směr do kapaliny. <u>Při posunu molekuly z vnitřku kapaliny do povrchové vrstvy nutno vykonat **práci.**</u> Proto mají molekuly z povrchové vrstvy větší **potenciální energii** než molekuly v této vrstvě neležící.





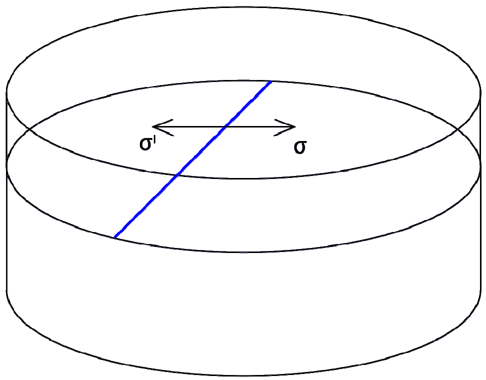
Povrchová vrstva působí na otáčivou příčku délky *l* **povrchovým napětím** σ, jedna povrchová vrstva tedy působí výslednou silou *σ.l*. Vzhledem k existenci dvou povrchových vrstev udržíme příčku v rovnováze silou *F* = 2.*σ.l*. Při posunutí příčky o vzdálenost Δ*s* vykonáme práci *W* = 2.*σ.l*.Δ*s*, která se jeví jako změna **povrchové energie** při změně povrchu o Δ*S*=2.*l*.Δ*S*. Změnu povrchové energie je pak možné vyjádřit jako

$$\Delta E = W = \sigma \Delta S$$

Z tohoto vztahu vyplývá, že snaha povrchového napětí o minimalizaci velikosti povrchu odpovídá minimalizaci povrchové energie. Kapalina se tedy snaží zaujmout takový tvar, při které je její povrchová energie (a tedy i velikost povrchu) nejmenší.

Jako povrchové napětí lze označit sílu, která působí kolmo na délku myšleného řezu povrchem, dělenou touto délkou, a která leží v tečné rovině k povrchu v daném bodě. Pokud působí na úsečku délky dl v rovině povrchu kolmá síla dF

$$\sigma = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}l}$$

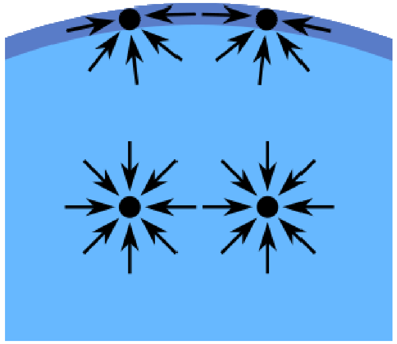


kde σ - povrchové napětí.

Hodnota povrchového napětí σ závisí na druhu kapaliny, teplotě, prostředí nad kapalinou.

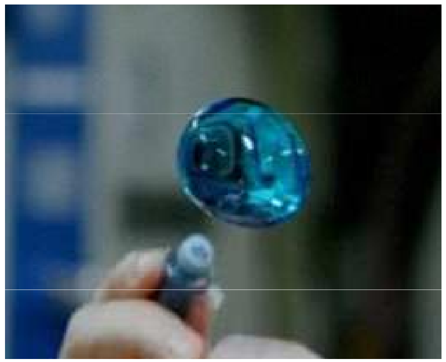
Povrchová vrstva

Povrchová vrstva = vrstva molekul, jejichž vzdálenost od povrchu je menší než r_m. Na každou molekulu ležící v povrchové vrstvě kapaliny působí sousední molekuly výslednou přitažlivou silou, která má směr dovnitř kapaliny.



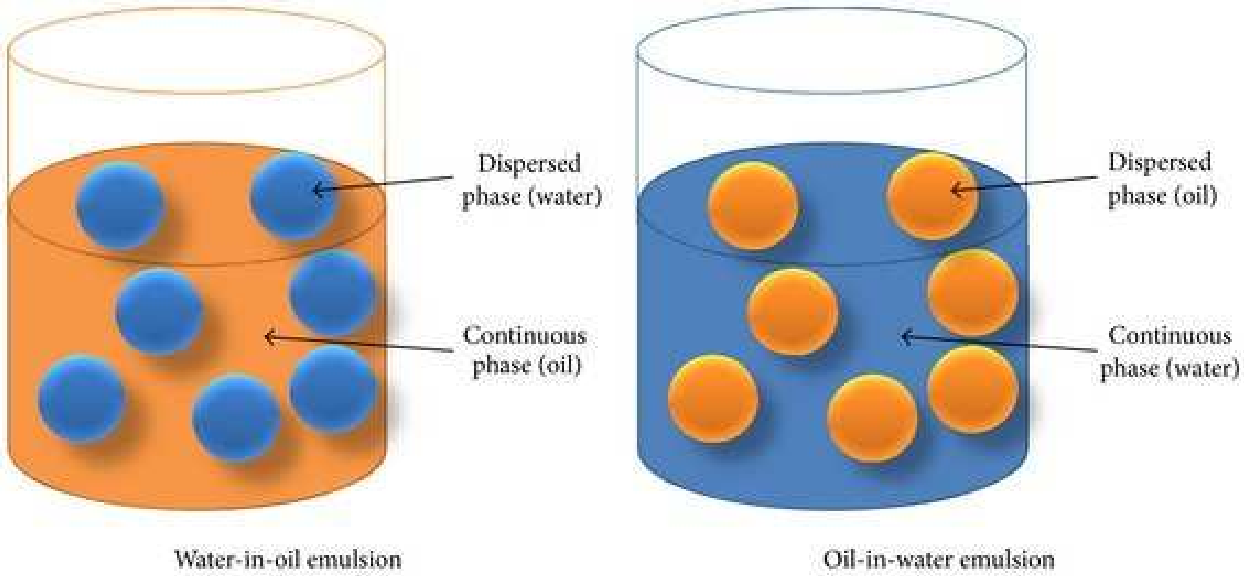
Tvar kapek

Kapalina daného objemu má snahu nabývat takového tvaru, aby obsah jejího povrchu byl co nejmenší, a tím byla minimální i povrchová energie. Při daném objemu má ze všech geometrických těles nejmenší obsah povrchu **koule**.



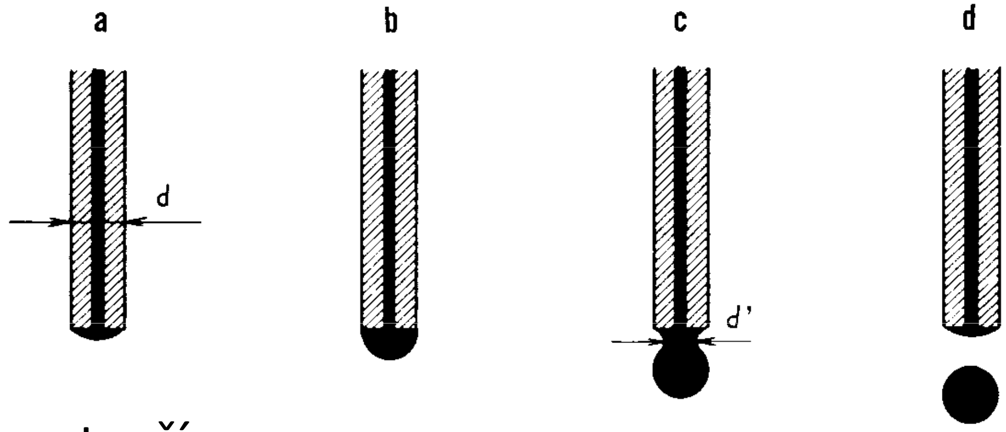
Kapky se deformují se účinkem **tíhové síly**. Ve **stavu beztíže** se kapalina vznáší volně v prostoru a vlivem povrchového napětí udržuje svůj povrch kolmý na výslednice všech sil.

Kapky kulovitého tvaru vznikají nejen na rozhraní kapalina - vzduch, ale také v případě emulzí <u>dvou nemísitelných kapalin</u> (např. voda-olej)



Kulový tvar mají také olověné **broky**. Odlévají se tak, že se nechávají odkapávat z velké výšky do studené vody, kde ztuhnou v podobě zcela pravidelných kuliček.

Tvorba kapek



Kapka na konci kapiláry pomalu roste, vytvoří se krček o průměru d‘. Dosáhne-li tíha kapky větší hodnotu než povrchová síla, kapka se oddělí za vytvoření kulového tvaru a padá k zemi.

$$\mathbf{m.g = 2.\pi.r.\sigma}$$

Vlivem odporu vzduchu se kulový tvar mění na kapkový.

Kapilární tlak je přídavný tlak, který je způsoben zakřivením povrchu kapaliny při stěnách nádoby, v kapilárách, u kapek a bublin.

$$p_k = \frac{2\sigma}{R}$$

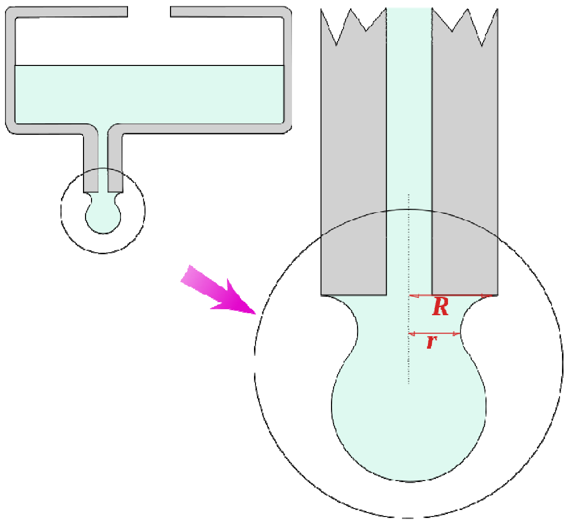
s - povrchové napětí kapaliny

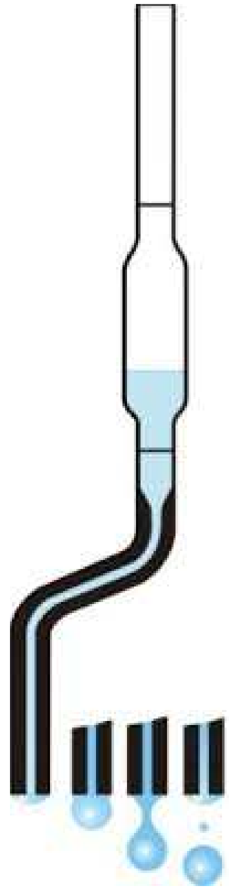
R – poloměr kulového povrchu

Pod vypuklým povrchem je vnitřní tlak větší o kapilární tlak než pod vodorovným povrchem. Pod dutým povrchem je vnitřní tlak menší o kapilární tlak než pod vodorovným povrchem.

Stalagmometr

Stalagmometr je tlustostěnná dole zabroušená kapilára sloužící k měření povrchového napětí. Měření spočívá ve zjištění hmotnosti kapky, která se na konci kapiláry utvoří. <u>V okamžiku odtržení kapky od ústí stalagmometru je síla povrchového napětí rovná tíhové síle kapky</u>.





$$mg = 2\pi r\sigma$$

V praxi se nejčastěji nechá odkapat přesně stanovený počet kapek do váženky a je přepočítána hmotnost jedné kapky, z které pak lze vypočítat povrchové napětí.

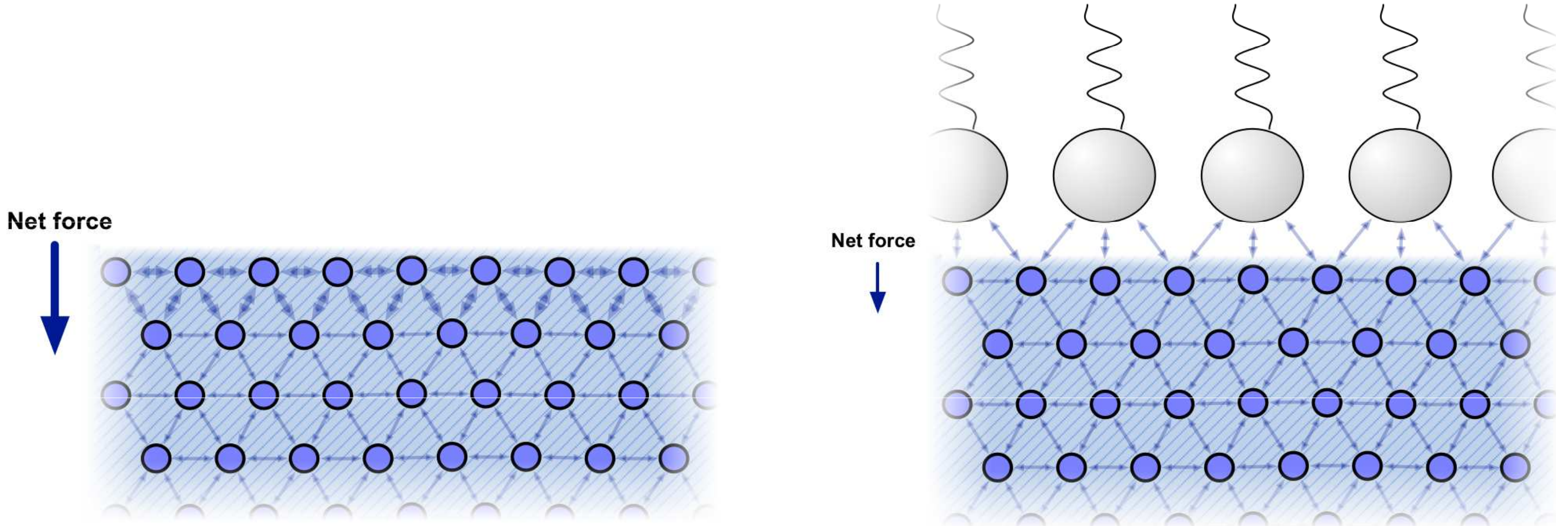
$$\pi \cdot d \cdot \sigma = \frac{m \cdot g}{k}$$

Stanovení povrchového napětí se provádí vůči referenční kapalině, nejčastěji vodě.

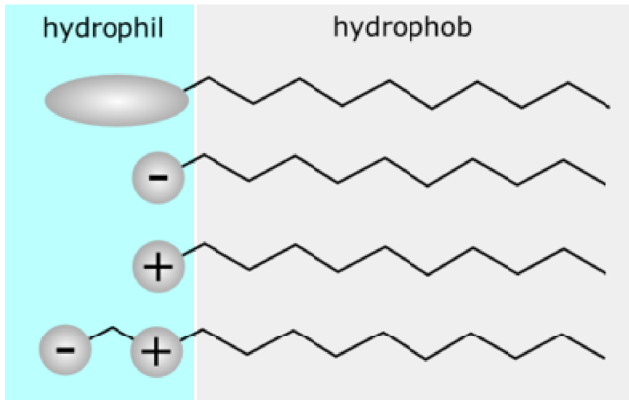
$$\sigma = \sigma_{H_2O} \times \frac{m}{m_{H_2O}}$$

Povrchově aktivní látky

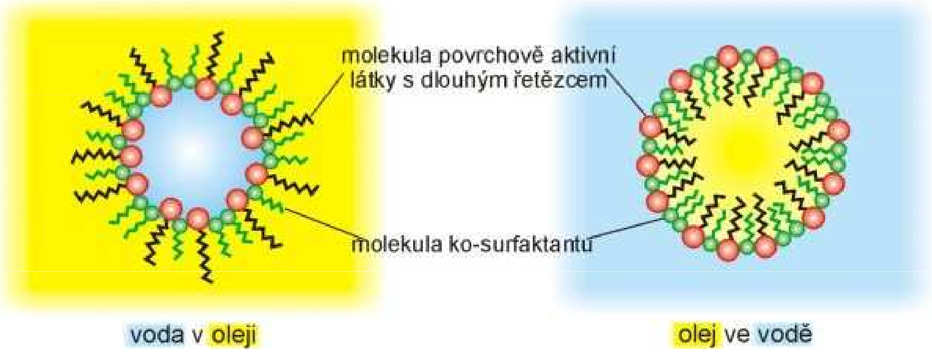
Hodnotu povrchového napětí lze ovlivnit i přidáním **povrchově aktivních látek** (tenzidy, surfaktanty). Tyto látky působí na rozhraní nebo kontaktním povrchu mezi dvěma fázemi, například vodou nebo vzduchem.

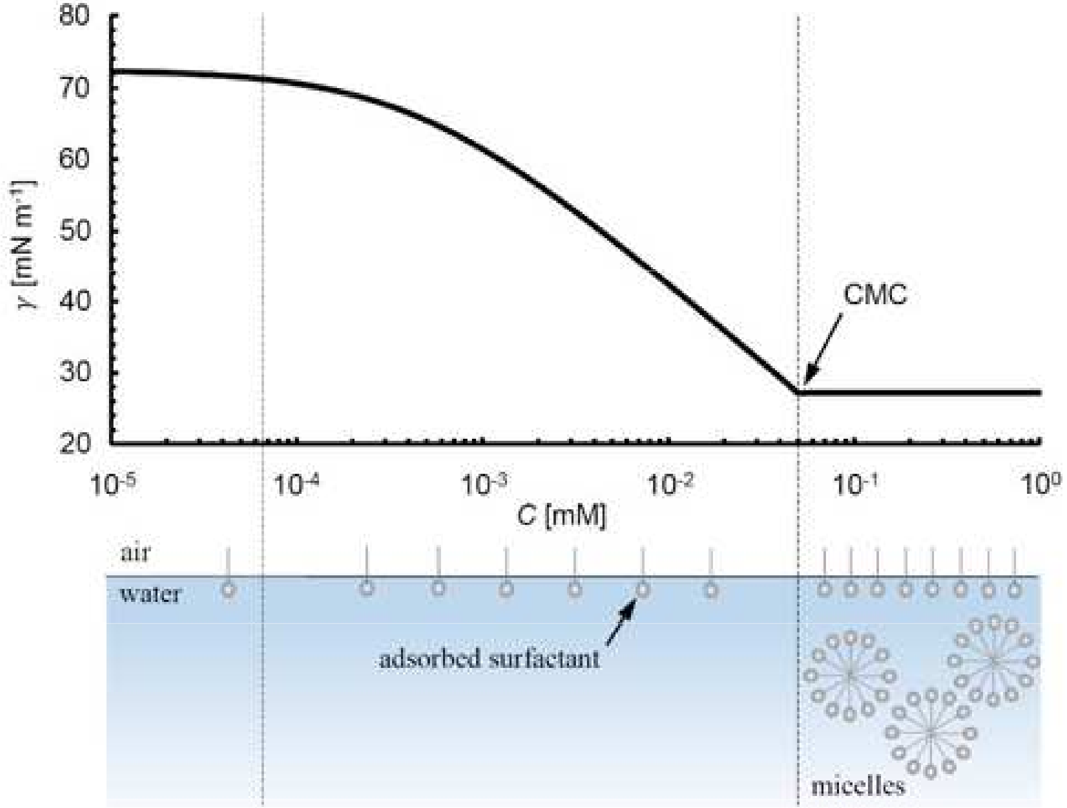


Tenzidy jsou sloučeniny s asymetrickou molekulární strukturou. Jejich molekula obsahuje jednu nebo i více skupin rozpustných ve vodě a jednu nebo více skupin rozpustných v nepolárním rozpouštědle (hydrofilní a hydrofobní (lipofilní) skupina).



Micely jsou shluky molekul tenzidů dispergované v kapalném médiu. Nejčastěji mají micely přibližně kulovitý tvar,





Důsledky změny povrchového napětí vody

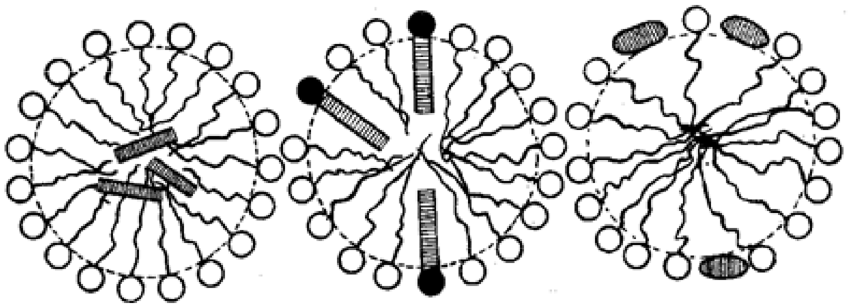
Mytí nebo praní jde velmi těžko ve studené vodě. Studená voda má vysoké povrchové napětí a špatně smáčí nečistoty. Ohřátím a/nebo přidáním látek, snižujících povrchové napětí – mýdla, saponátů apod. se povrchové napětí sníží, nečistoty se lépe smáčí a tím i odstraní.

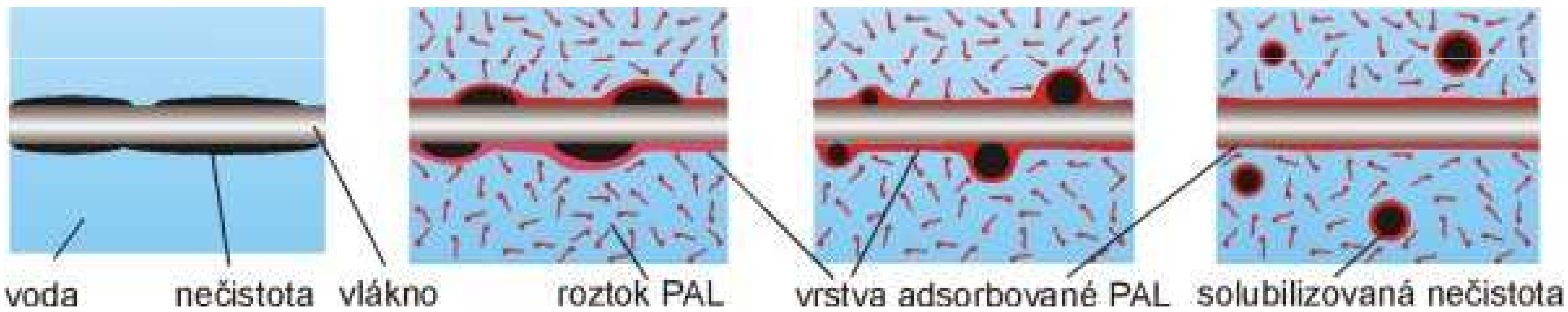
Solubilizace a prací účinky

Nečistota není k substrátu poutaná přímo, je od něj oddělena tenkou vrstvou často složité směsi nepolárního charakteru („mastnoty“, „oleje“). V této vrstvě jsou zakotveny jednotlivé částice látky znečišťující uvažovaný materiál.

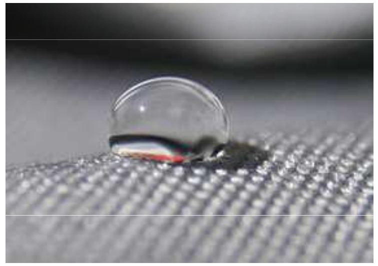
Detergence má 2 fáze: 1. uvolnění nečistoty
2. stabilizace nečistoty v prací lázni

substrát-nečistota + detergent ⟶ substrát-detergent + nečistota-detergent





Kontaktní úhel

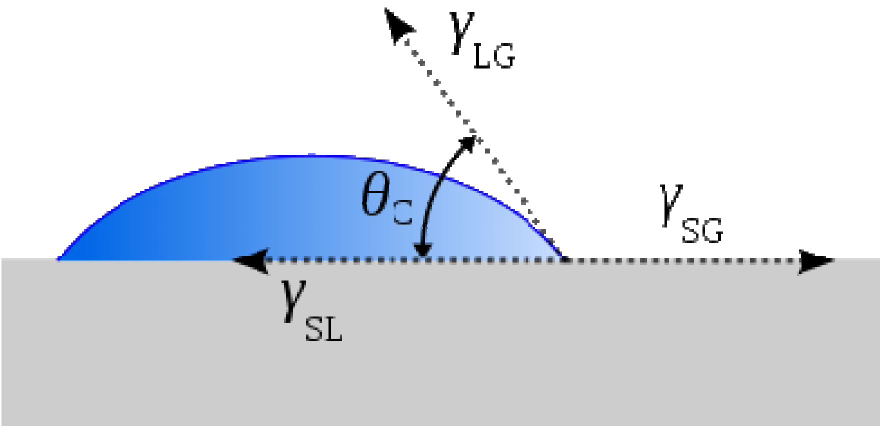


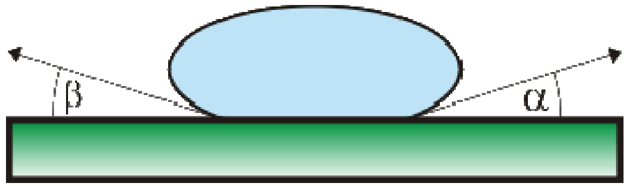
Povrch kapky svírá s plochou materiálu tzv. **kontaktní úhel**. Kontaktní úhel udává kvantitativní vyjádření rozsahu smáčivosti pevných látek kapalinami.

Vysoká hodnota kontaktního úhlu odpovídá povrchu s nedostatečnou smáčivostí, nízká hodnota kontaktního úhlu vypovídá o povrchu dobře smáčeném.

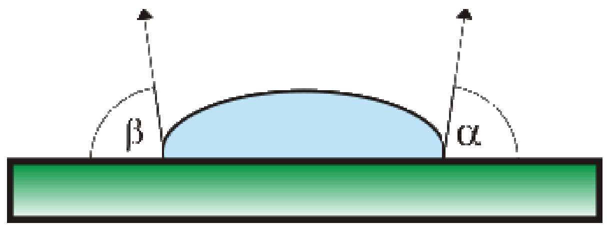
Vztah mezi úhlem smáčení ϑ a jednotlivými mezifázovými energiemi je dán **Youngovou rovnicí**

$$\gamma_{SG} - \gamma_{SL} - \gamma_{LG} \cos \theta_C = 0$$

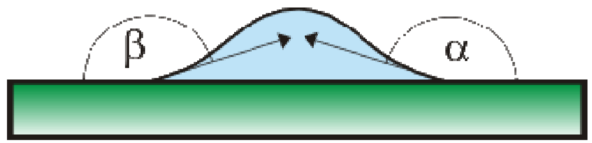




Kapka smáčecí kapaliny málo smáčí materiál



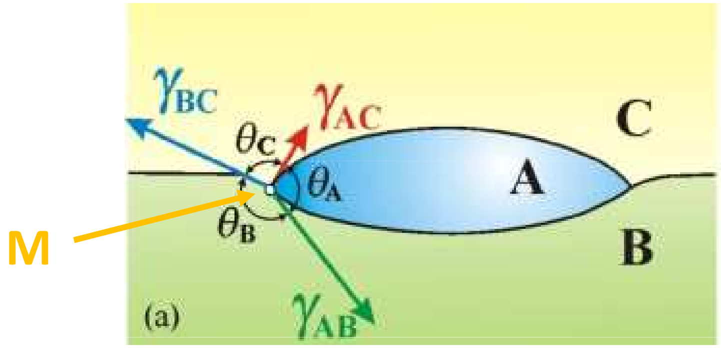
Kapka smáčecí kapaliny více smáčí materiál

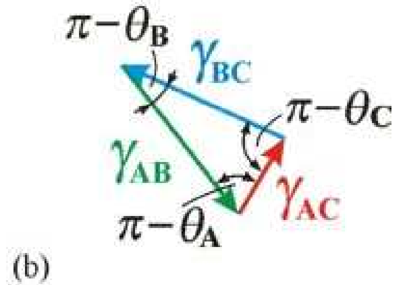


Kapka smáčecí kapaliny hodně smáčí materiál

Mobilní rozhraní tří fází (např. vzduch, voda a olej)

V bodě M působí tři povrchová napětí vždy na rozhraní dvou prostředí. Tato napětí odpovídají příslušným silám, jejichž rovnováha závisí nejen na velikosti, ale také na směrech.





Síly můžeme poskládat tzv. *Neumannovým trojúhelníkem*.

$$\vec{\gamma}_{BC} + \vec{\gamma}_{AC} + \vec{\gamma}_{AB} = 0$$

Aby mohly kachny plavat na vodě, mají na svých pírkách vrstvičku tuku. Voda se kvůli velkému povrchovému napětí nedostane do malých mezer mezi horní vrstvu pírek. Na obdobném principu fungují membrány typu *Goretex*. Voda tak nepronikne peřím vodních ptáků a ti mohou snadno plavat po vodní hladině nebo se i potápět. Ptáci se utopí, když je zasáhne ropná skvrna na hladině.

Příklad

Tlustostěnnou kapilárou vnějšího průměru 3,41 mm odkapalo 100 kapek vody teploty 15 °C o celkové hmotnosti 8,11 g. Určete povrchové napětí vody ve styku se vzduchem při dané teplotě.

$d = 3{,}41 \cdot 10^{-3}$ m
$k = 100$
$t = 15$ °C
$m = 8{,}11 \cdot 10^{-3}$ kg
$\sigma = ?$

Vodní kapka o hmotnosti **m** se oddělí od kapiláry v okamžiku, kdy povrchová síla velikosti **F = π.d.σ** působící na kapku po vnějším obvodu kapiláry dosáhne rovnováhy s přibývající tíhovou silou velikosti

$$F_G = m \cdot g = \frac{m \cdot g}{k}$$

$$\sigma = \frac{m \cdot g}{\pi \cdot k \cdot d} = \frac{8{,}11 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}81}{3{,}14 \cdot 100 \cdot 3{,}41 \cdot 10^{-3}} = \underline{7{,}43^{-3}\ N \cdot m^{-1}}$$

$$\pi \cdot d \cdot \sigma = \frac{m \cdot g}{k}$$