5.1.6 Vzájemná poloha dvou přímek

Předpoklady: 050105

Planimetrie: dvě možností pro vzájemnou polohu přímek
- různoběžky – právě jeden společný bod (různý směr)
- rovnoběžky – žádný společný bod (stejný směr)

Př. 1: Najdi všechny možné vzájemné polohy přímek v prostoru a modeluj je pomocí tužek.

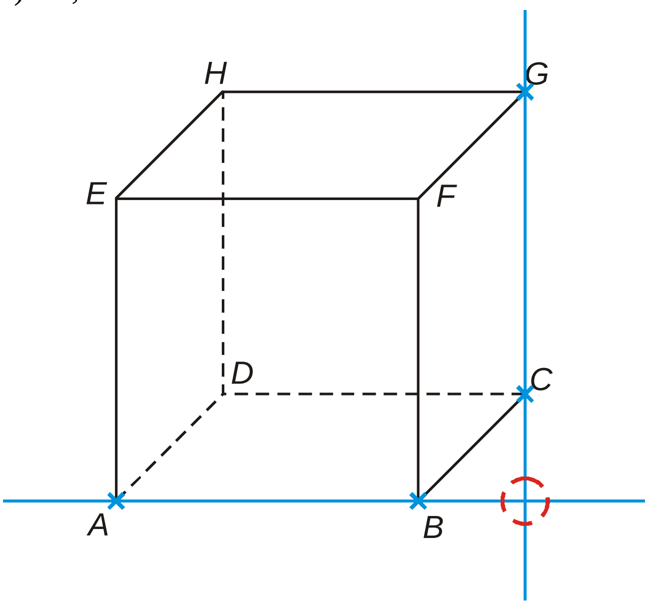
Možnosti vzájemné polohy dvou přímek v prostoru:
- **různoběžky** – právě jeden společný bod (různý směr, určují rovinu)
- **rovnoběžky** – žádný společný bod (stejný směr, určují rovinu)
- **mimoběžky** – žádný společný bod (různý směr, neurčují rovinu, tato možnost nemůže nastav v rovině)

Určit vzájemnou polohu přímek, které si můžeme prohlédnout z více stran není těžké, horší je, pokud máme k dispozici pouze rovnoběžný průmět

Pedagogická poznámka: U všech následujících příkladů by se studenti měli snažit určit polohu přímek nejdříve pouze z obrázku, pak nakreslením obrázku při pohledu z jiné strany a teprve jako definitivní potvrzení nebo poslední záchranu by měli používat krychličky.

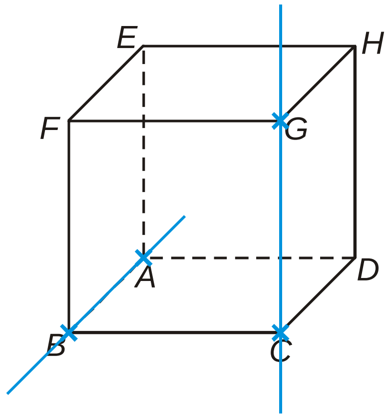
Př. 2: Je dána standardní krychle *ABCDEFGH*. Urči vzájemnou polohu přímek:
a) AB, CG b) AS_{CG}, BD c) AB, $S_{BC}S_{CD}$
d) BC, $S_{AE}S_{DH}$ e) EC, BH

a) AB, CG

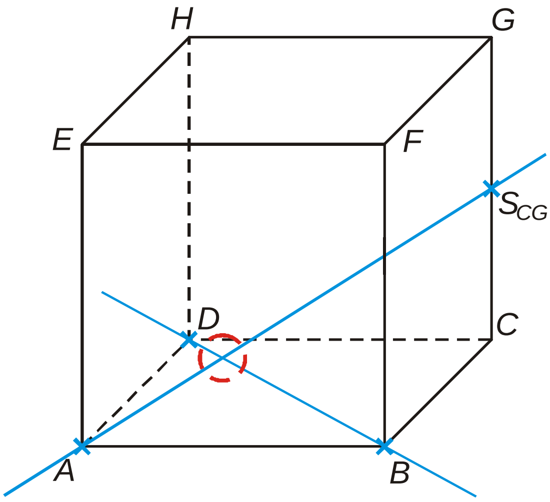


Zdá se, že přímky AB a CG jsou různoběžné, ale jejich „průsečík“ na průmětně je pouze zdánlivý:
- přímka AB leží v přední stěně,
- přímka CG leží v zadní stěně,

$\Rightarrow$ nikdy se nemohou protnout $\Rightarrow$ přímky AB a CG jsou **mimoběžné**, což snadno uvidíme na pohledu z boku.



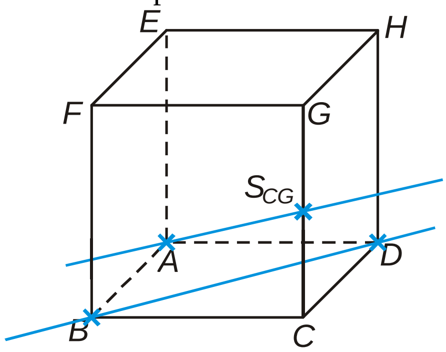
b) AS_{CG}, BD



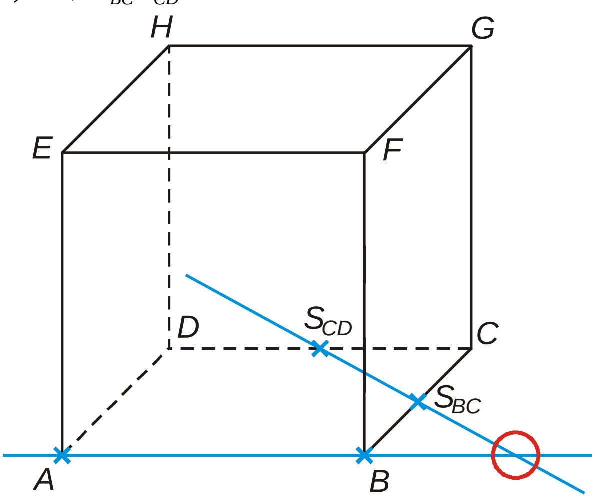
Zdá se, že přímky BD a AS_{CG} jsou různoběžné, ale jejich „průsečík“ na průmětně je pouze zdánlivý:

- přímka BD leží v dolní podstavě,
- přímka AS_{CG} se s dolní podstavou protíná pouze v bodě A,

$\Rightarrow$ nikdy se nemohou protnout $\Rightarrow$ přímky BD a AS_{CG} jsou **mimoběžné**, což snadno uvidíme na pohledu z boku.



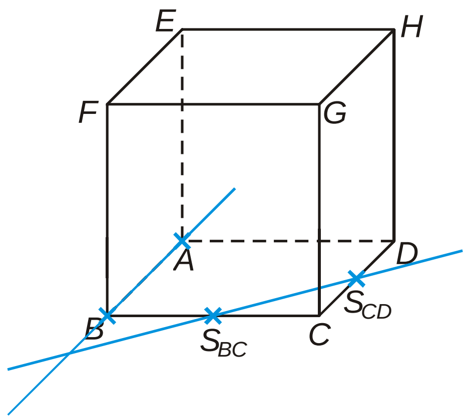
c) AB, $S_{BC}S_{CD}$



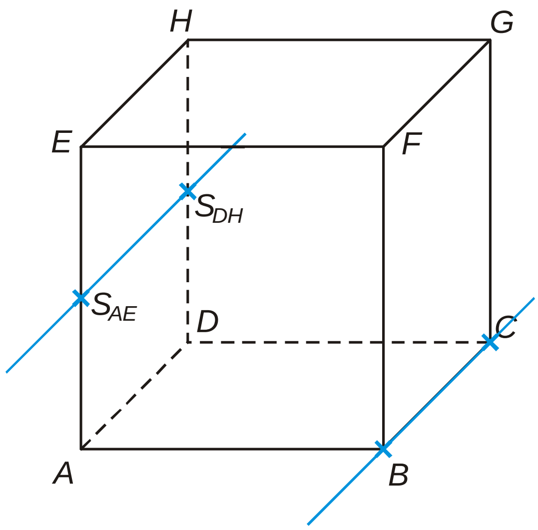
Zdá se, že přímky BD a AS_{CG} jsou **různoběžné**, jejich průsečík existuje i ve skutečnosti:

- přímka AB leží v dolní podstavě,
- přímka $S_{BC}S_{CD}$ leží v dolní podstavě,

$\Rightarrow$ musí se protnout $\Rightarrow$ přímky AB a $S_{BC}S_{CD}$ jsou **různoběžné**, což snadno uvidíme na pohledu z boku.



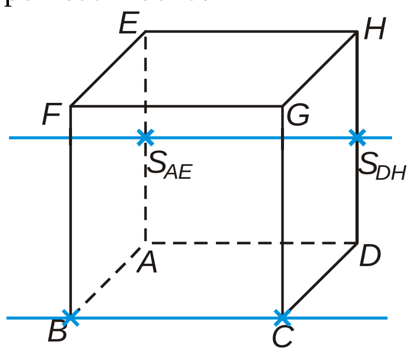
d) BC, $S_{AE}S_{DH}$



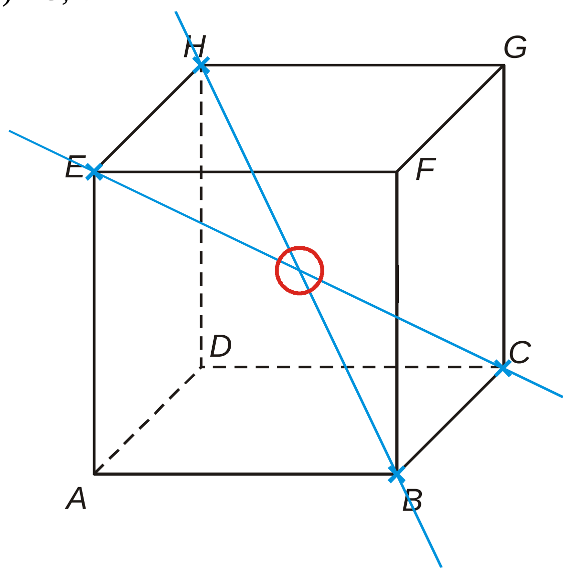
Zdá se, že přímky BC a $S_{AE}S_{DH}$ jsou **rovnoběžné**:

- přímka BC je kolmá na přední stěnu,
- přímka $S_{AE}S_{DH}$ je kolmá na přední stěnu,

$\Rightarrow$ mají stejný směr $\Rightarrow$ přímky BC a $S_{AE}S_{DH}$ jsou **rovnoběžné**, což snadno uvidíme na pohledu z boku.



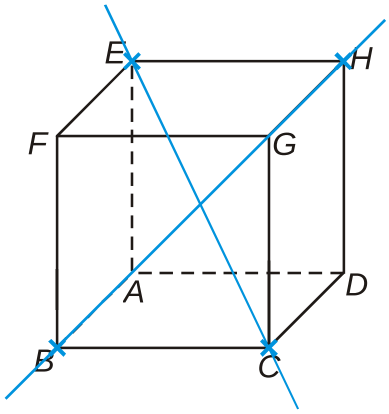
e) EC, BH



Zdá se, že přímky EC a BH jsou **různoběžné**. Jak se přesvědčíme, že průsečík opravdu existuje?

- Přímka EH je kolmá k přední stěně,
- přímka BC je kolmá k přední stěně,

$\Rightarrow$ přímky EH a BC jsou rovnoběžné $\Rightarrow$ body B, C, E, H leží v jedné rovině $\Rightarrow$ přímky EC a BH leží v jedné rovně $\Rightarrow$ jsou **různoběžné**, což potvrzuje i pohled z boku.



Pedagogická poznámka: U předchozího příkladu studenti při samotném rozeznávání samozřejmě postupují značně rozdílnými rychlostmi. Ty rychlejší můžete brzdit tím, že po nich budete chtít nejen rozhodnout vzájemnou polohu, ale i podrobně zdůvodnit výsledek způsobem používaným v učebnici. U slabších studentů bude stačit, když budou schopni vzájemné polohy rozlišit.

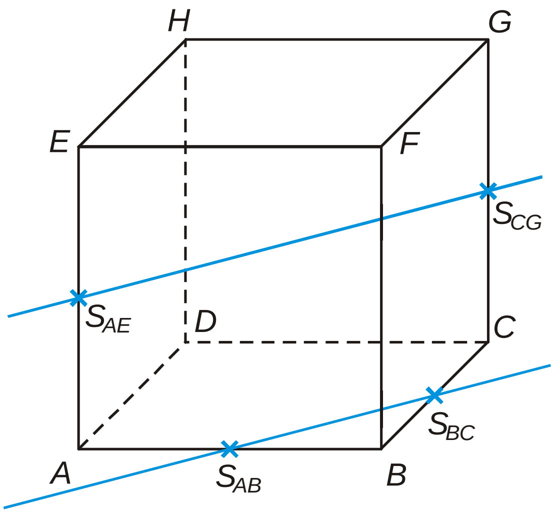
Stejně jako v rovině i v prostoru platí:
Daným bodem lze vést k dané přímce jedinou rovnoběžku.

Př. 3: Doplň větu: „Jsou dány tři přímky p, q, r. Je-li $p \parallel q$ a $q \parallel r$, pak platí ….

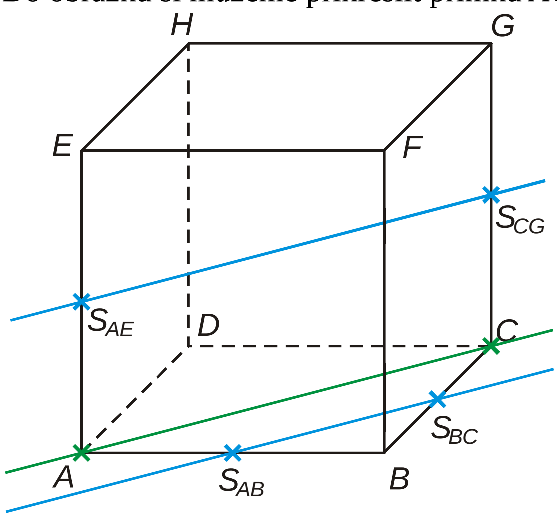
Jsou dány tři přímky p, q, r. Je-li $p \parallel q$ a $q \parallel r$, pak platí $p \parallel r$.

V matematice říkáme, že **rovnoběžnost přímek je tranzitivní (přenáší se)**.

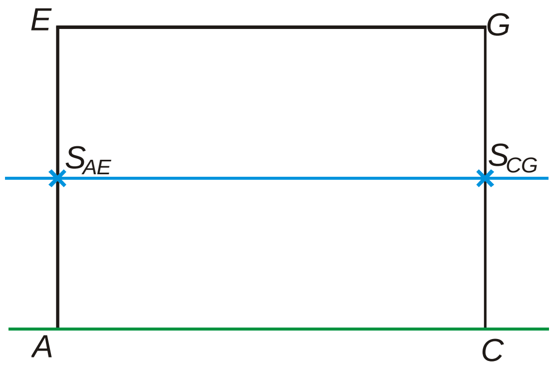
Př. 4: S využitím tranzitivnosti dokaž, že ve standardní krychli platí $S_{AE}S_{CG} \parallel S_{AB}S_{BC}$.



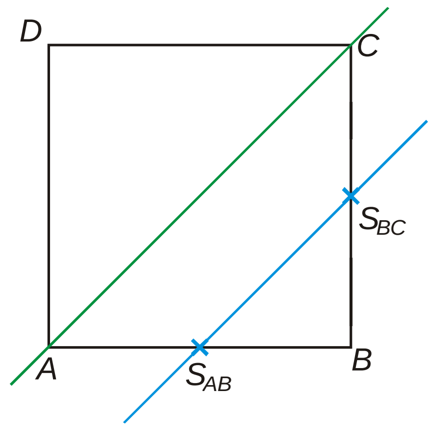
Do obrázku si můžeme přikreslit přímku AC.



Je vidět:



Přímka AC je rovnoběžná s přímkou $S_{AE}S_{CG}$ (spojuje středy protilehlých stran a dělí obdélník $ACGE$ na dvě poloviny).

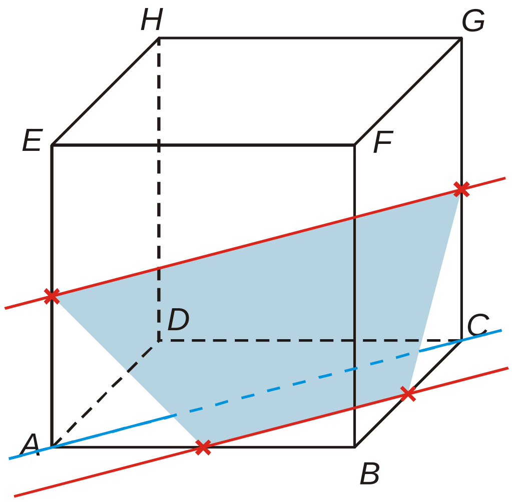


Přímka AC je rovnoběžná s přímkou $S_{AB}S_{BC}$ (spojuje středy sousedních stran ve čtverci $ABCD$ a je tedy rovnoběžná s jeho úhlopříčkou).

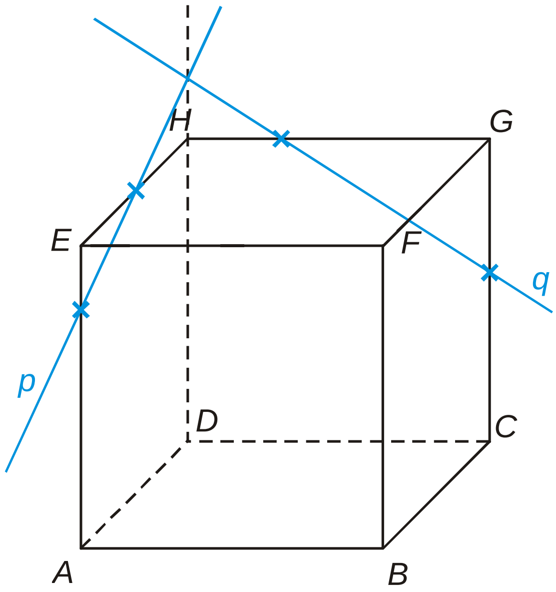
$\Rightarrow$ Přímky $S_{AE}S_{CG}$ a $S_{AB}S_{BC}$ jsou rovnoběžné.

Poznámka: Příklad je ukázkou důležitého přístupu ve stereometrii. Příklad rozdělíme na části, které řešíme v jednotlivých rovinách. Práce v rovinách nám jednak umožňuje používat obrázky nezkreslené promítáním a jednak je daleko snazší pro utváření představ.

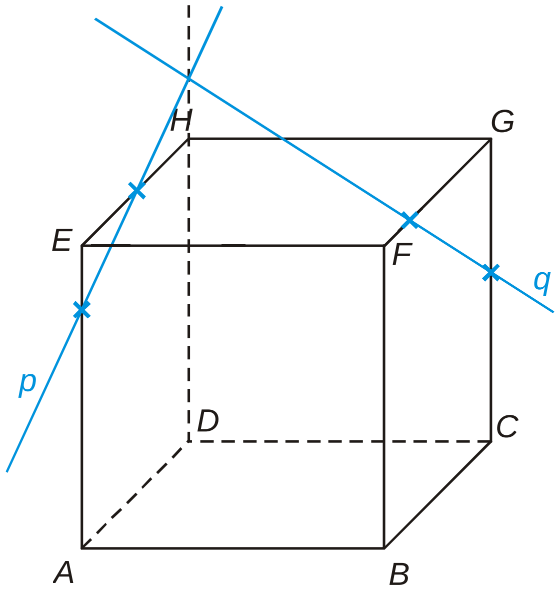
Dodatek: Předchozí příklad představuje také řešení příkladu 9 z minulé hodiny. Když víme, že přímky $S_{AE}S_{CG}$ a $S_{AB}S_{BC}$ jsou rovnoběžné, víme, že tyto přímky určují rovinu a body S_{AE}, S_{AB}, S_{BC}, S_{CG} v této rovině leží.



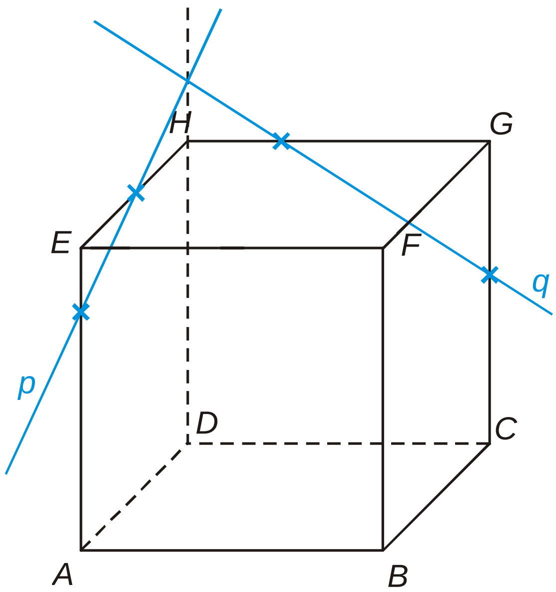
Př. 5: Urči vzájemnou polohu přímek p, q na obrázcích.



a)



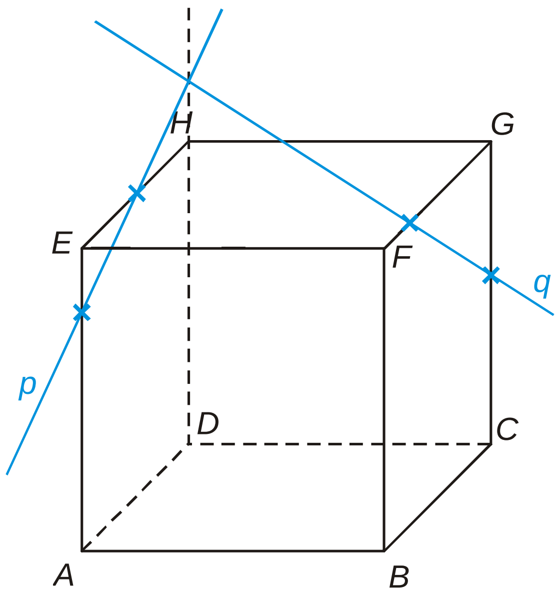
b)



a)

- Přímka p leží v levé boční stěně $\Rightarrow$ její průsečík s přímkou DH je skutečný bod.
- Přímka q leží v zadní stěně $\Rightarrow$ její průsečík s přímkou DH je skutečný bod.

$\Rightarrow$ Obě přímky se s přímkou DH protínají a oba tyto průsečíky splývají v jeden bod $\Rightarrow$ přímky se s přímkou DH protínají ve stejném bodě $\Rightarrow$ přímky p a q mají společný bod (společný průsečík s přímkou DH) $\Rightarrow$ přímky p, q jsou **různoběžné**.



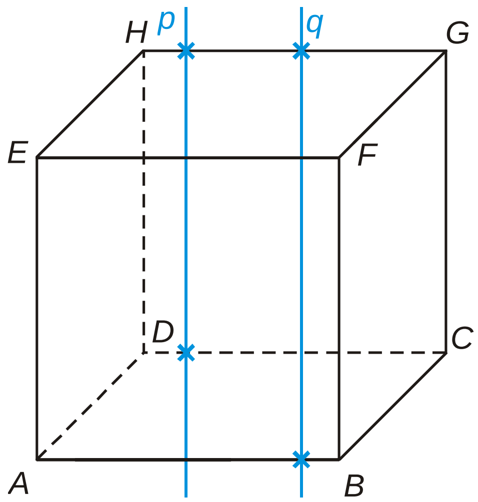
b)

- Přímka p leží v levé boční stěně $\Rightarrow$ její průsečík s přímkou DH je skutečný bod.
- Přímka q leží v pravé boční stěně $\Rightarrow$ nemá průsečík s přímkou DH.

$\Rightarrow$ Obě přímky leží ve dvou různých navzájem rovnoběžných rovinách $\Rightarrow$ nemohou mít průsečík $\Rightarrow$ přímky p, q jsou **mimoběžné**.

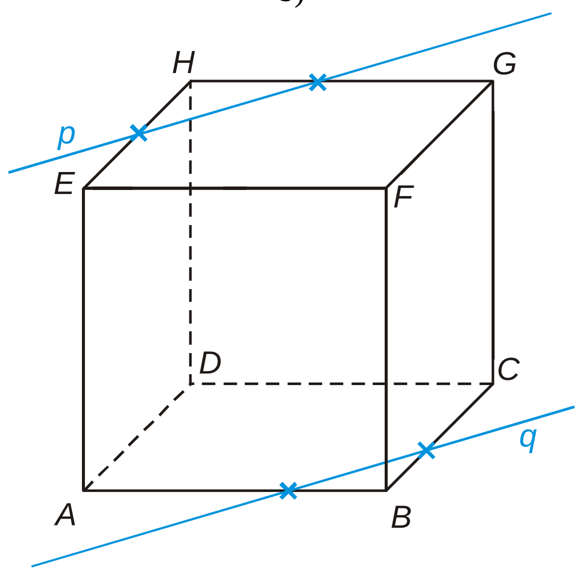
Pedagogická poznámka: V bodě a) předchozího příkladu se objevuje argumentace, že body, kterými prochází přímky *p*, *q* nejsou středy stran a proto se přímky *p*, *q* nemohou protnou. Skutečnost, že přímky neprocházejí středy hran, neznamená, že se nemohou protnou. Důležité je, že se protínají s hranou *DH* a že tyto dva průsečíky splývají (a představují tedy společný bod).

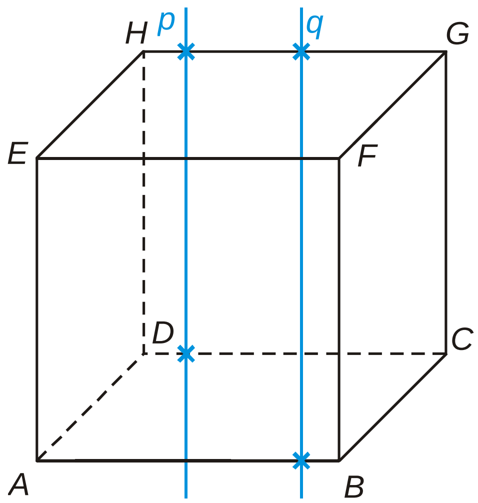
Př. 6: Urči vzájemnou polohu přímek *p*, *q* na obrázcích (průměty, které se zdají být rovnoběžné, jsou rovnoběžné).



a)

b)



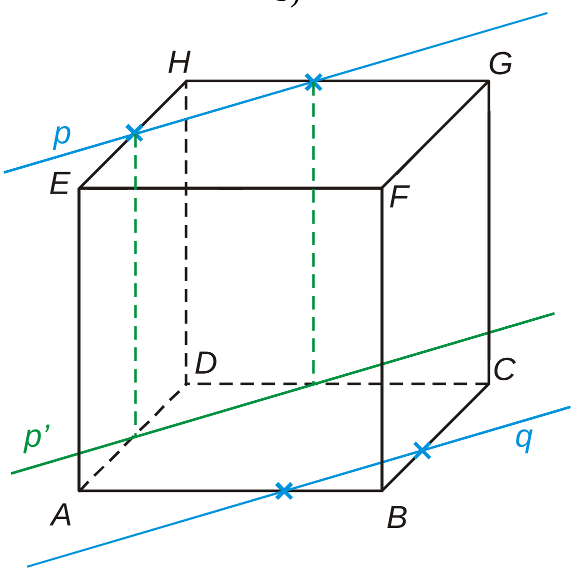


a)

- Přímka *p* leží v zadní stěně, je svislá.
- Přímka *q* prochází zadní stěnou (bod na hraně *HG*) i přední stěnou (bod na hraně *AB*) v zadní stěně ⇒ není svislá.

⇒ Přímky *p*, *q* mají různý směr, neprotínají se ⇒ přímky *p*, *q* jsou **mimoběžné**.

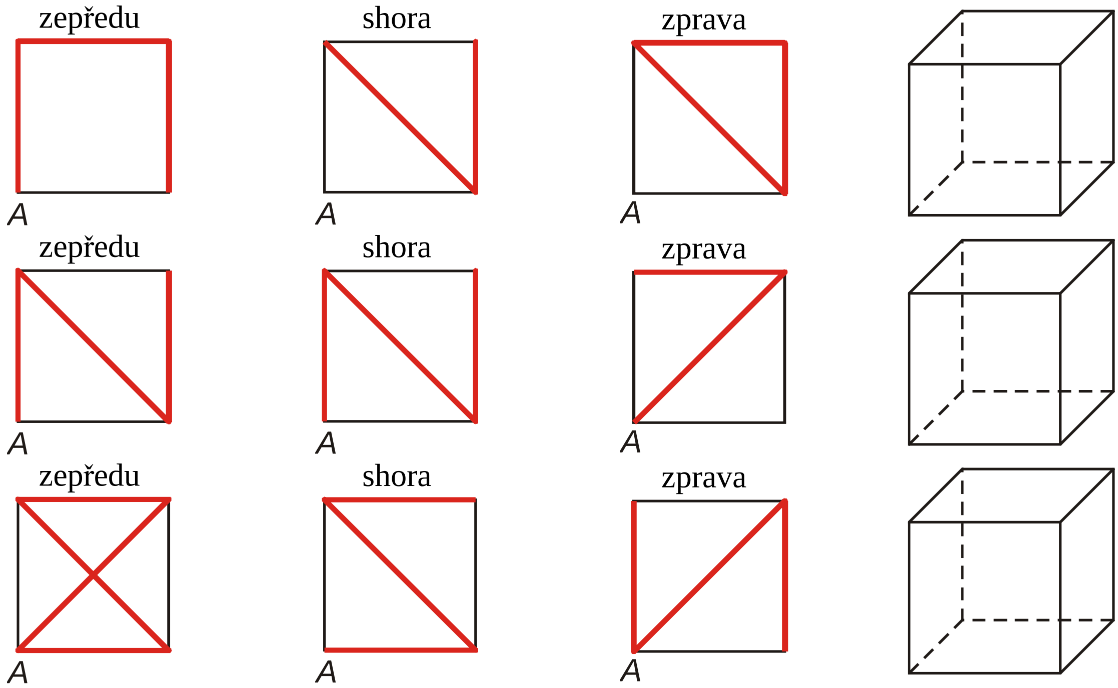
b)

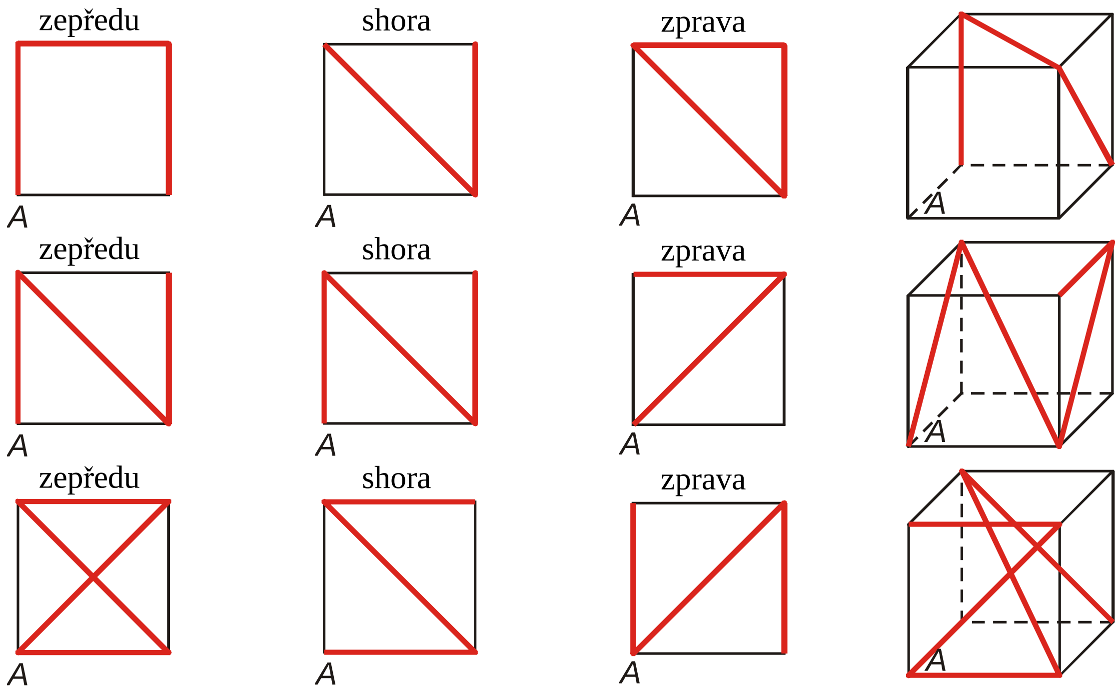


K přímce *p* můžeme najít v rovině podstavy přímku p', která je s ní rovnoběžná a je rovnoběžná s přímkou *q* ⇒ přímky *p*, *q* jsou **rovnoběžné**.

Pedagogická poznámka: Předchozí látka je na jednu hodinu příliš krátká (zabere tak 35 minut). Zbytek hodiny je možné využít na následující příklad, který by spíše patřil do úvodní stereometrické hodiny.

Př. 7: Skleněná krychle je ozdobena lomenou čarou z červeného drátu. Drát může být natažen jak po stěnách tak vnitřkem krychle. Zakresli drát do volného rovnoběžného průmětu krychle na základě pohledu zepředu, shora a z pravého boku.





Př. 8: Petáková:
strana 90/cvičení 1 a) b) c) d)
strana 90/cvičení 5 a)

Shrnutí: Ve stereometrii není všechno tak, jak se na první pohled z obrázku zdá.