



PEDAGOGICKÁ  
FAKULTA  
Masarykova univerzita

# IMAp05 Geometrie 1 (podzim 2020)

Mgr. Leni Lvovská, Ph.D.

Masarykova univerzita  
Pedagogická fakulta | Katedra matematiky  
Poříčí 31, Brno | Tel.: +420 5 49 496423  
E-mail: [lvovska@ped.muni.cz](mailto:lvovska@ped.muni.cz)

FB, IG: [@lenylvovska](https://www.facebook.com/lenylvovska)



## Literatura:

- L. Lvovská, M. Francová: **Texty k základům ELEMENTÁRNÍ GEOMETRIE pro studium učitelství 1. stupně základní školy**. Brno: MU, 2014
- L. Lvovská: Sbíрка úloh z ELEMENTÁRNÍ GEOMETRIE pro studium učitelství 1. stupně základní školy. 2019 (*pracovní verze textu*)
- Učebnice matematiky pro základní školy



# Co je úkolem učitelů geometrie na základních školách?

## Jak stará geometrie je a co do ní patří?



## Co je úkolem učitelů na základních školách?

- Vytvořit u žáků kvalitní základy geometrických znalostí
- Podněcovat abstraktní geometrické myšlení žáků takovým způsobem, aby žáci byli schopni je sami nadále rozvíjet v oblastech, které si sami zvolí
- Tento předmět je koncipován tak, aby si budoucí učitelé vytvořili nadhled a sledovali propojení geometrie s dalšími oblastmi matematiky a ostatních disciplín

## Jak stará geometrie je a co do ní patří?



## Co je geometrie a co do ní patří?

- Vše, co dokumentuje pochopení a využití tvarů
- Všude kolem nás je přítomen jistý prvek geometrické abstrakce
- Geometrická abstrakce se promítá do všech dalších matematických i nematematických disciplín
- Geometrické myšlení je příznačné po tisíce let

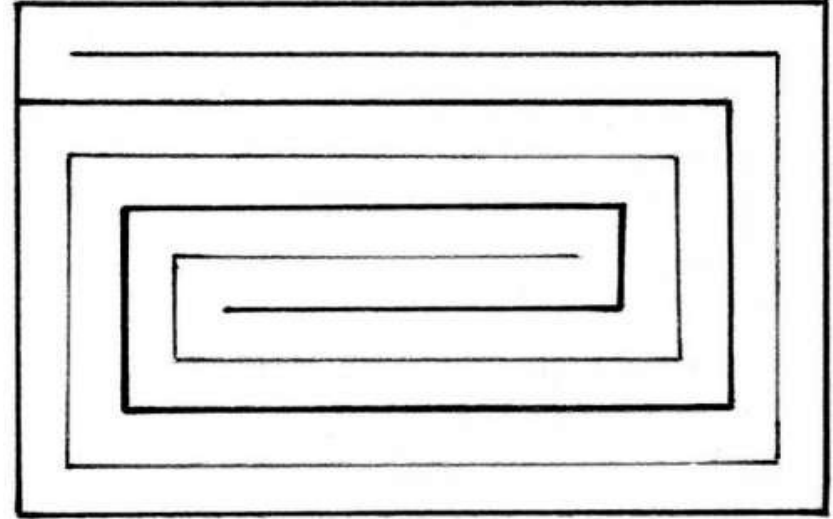
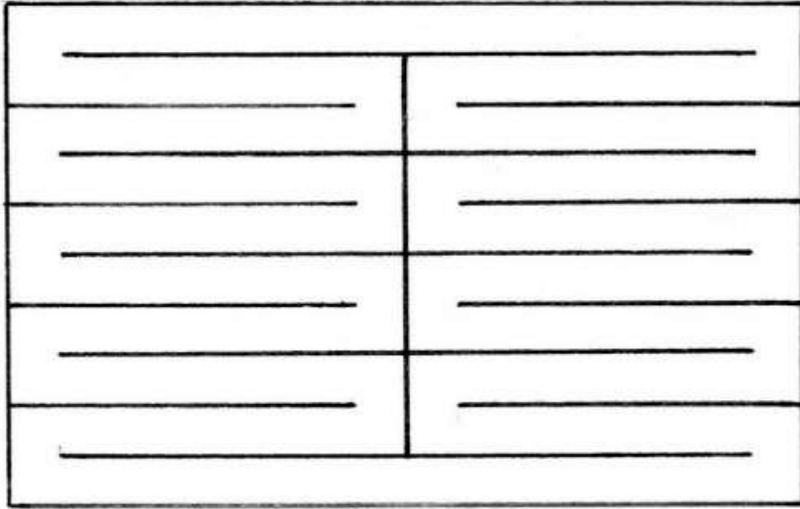
# Geometrie 1

- Opakování a upřesnění geometrických pojmů, se kterými jsme se setkali na ZŠ a SŠ
- Přiblížení podstaty axiomatické výstavby geometrie, především vytváření nových pojmů pomocí pojmů dříve zavedených
- Naznačeny otázky, které souvisí s axiomatickou výstavbou geometrie

## Motivační úloha

**Úloha 1** : Ve staré Babylónii potřebovala moudrá královna získat pozemek od loupeživého kupce. Navrhla množství zlata, které mu dá za pozemek ohraničený kůží z jeho největšího vola, do které udělá otvor. Kupec se usmíval pod vousy, neboť si představil **plochu o obsahu** kůže z jeho vola a hromada zlata přišla mu dvojnásobná za libovolně velký pozemek vymezený kůží. Když ho ale královna přivedla k pozemku, zblednul. Jakým způsobem moudrá královna udělala otvor v kůži a **obvod pozemku** vytyčila?





Analogické zadání: Prolezu otvorem v pohlednici?



## Motivační úlohy

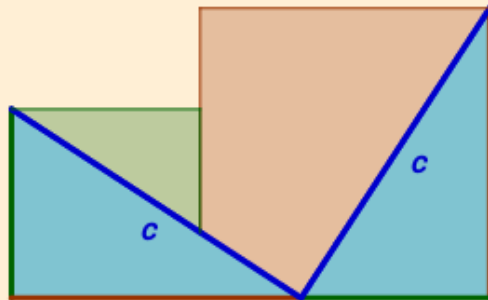
### Úloha 2 :

V království měli dva různě velké čtverce vzácné zlaté látky. Potřebovali udělat nový královský trůn, který bude touto látkou pokrytý. Jak velký nový čtverec mohou udělat z těchto dvou čtverců, aby látka nezbyla?

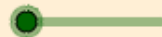
Uvažujte např. čtverce o stranách 30cm a 40cm.

A jakým způsobem má švadlena látku rozstříhat?





$\alpha = 0^\circ$



Vezměme čtverec o straně  $a$

a k němu přidejme čtverec o straně  $b$

Vznikne útvar o ploše  $a^2 + b^2$

Nejdelší stranu útvaru rozdělíme

na dva úseky o délkách  $a$  a  $b$

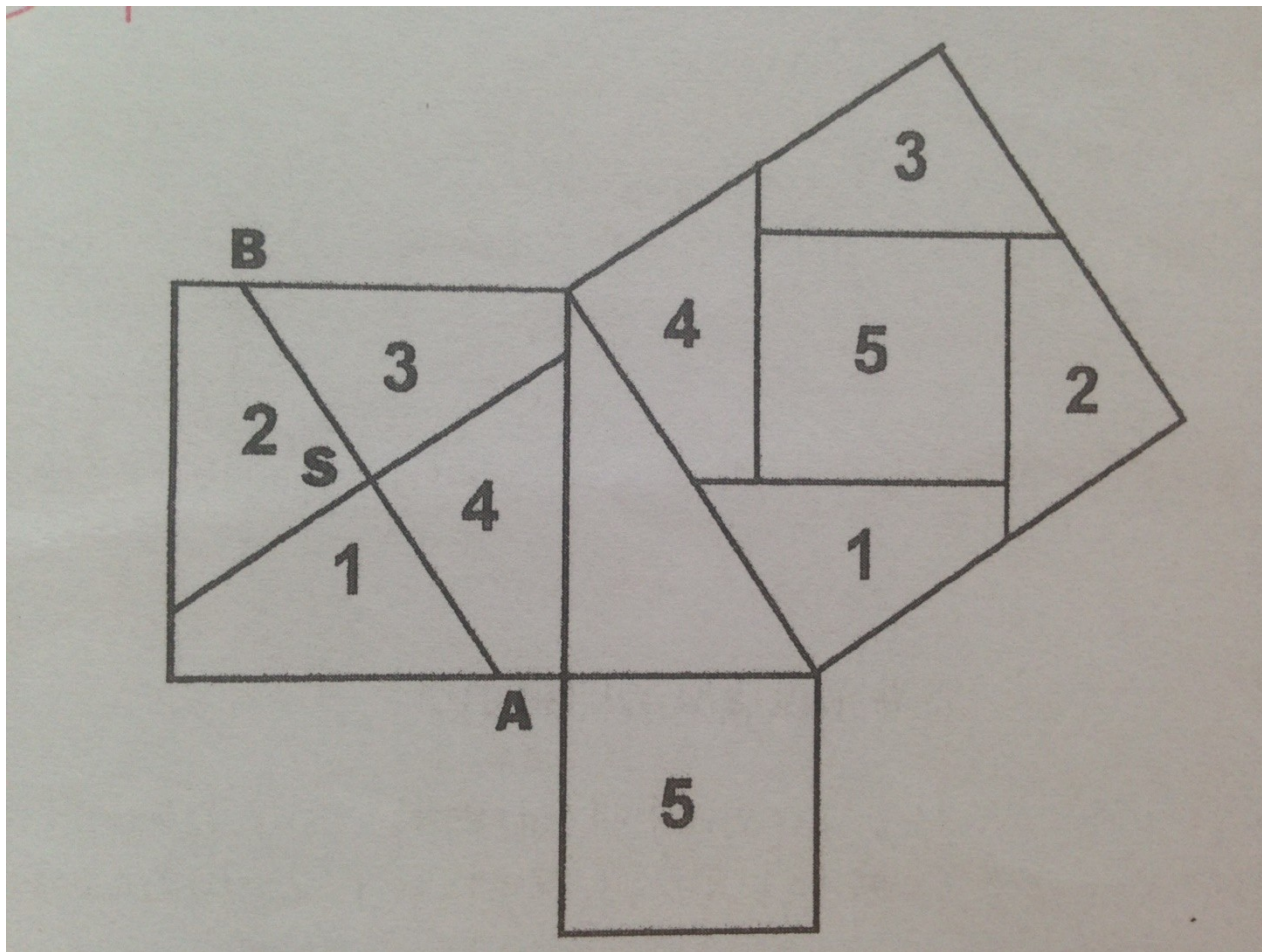
a doplníme dvě úsečky tak, že vzniknou

dva shodné pravoúhlé trojúhelníky s přeponou  $c$

Nyní tyto trojúhelníky odstříhneme a přemístíme  
je tak, že vznikne čtverec o straně  $c$ . (použij jezdec)

Protože jsme jen přeskupili některé části původního útvaru,  
změnil se sice tvar, ale obsah zůstal zachován!

$$a^2 + b^2 = c^2$$



## Různé metody zkoumání geometrie

Úvodem si uvědomíme, že geometrie je dnes rozsáhlý vědní obor. Geometrické objekty a prostory, jejich vlastnosti a vzájemné vztahy můžeme zkoumat různými metodami.

- Syntetická geometrie - **axiomatický přístup**
- Analytická geometrie
- Diferenciální geometrie
- Kleinova (transformační) geometrie

V rámci syntetické geometrie se objevuje **axiomatický přístup ke geometrii**. Axiomatický přístup znamená budovat nějakou teorii z co nejmenšího počtu jednoduchých pravidel (axiomů).

Náznaky se objevily už u Eukleida z Alexandrie, který formuloval slavných 5 postulátů.

V moderním pojetí jsou ukázkou axiomatického přístupu ke geometrii Hilbertovy axiomy.

## Axiomatická výstavba geometrie

Počátky geometrie jako vědecké disciplíny ve 3. stol. př. n. l.

- Řecký matematik **Eukleides** shrnul ve své knize **ZÁKLADY** dosavadní znalosti prostorových a rovinných útvarů, utřídil je a vyslovil **5 postulátů** = axiomů, které shrnovaly vztahy (relace) mezi třemi základními geometrickými objekty = **BOD, PŘÍMKA, ROVINA**



Handwritten text at the top of the left page, likely a title or introductory passage.

Main column of handwritten text on the left page, written in a cursive script.

Second column of handwritten text on the left page, continuing the script.

Bottom section of the left page containing smaller text and a small diagram.

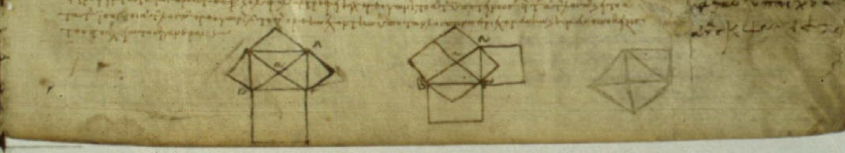
Handwritten text at the top of the right page, including a page number '89'.

Text in the upper left quadrant of the right page, above the diagram.



Text in the lower left quadrant of the right page, below the diagram.

Main column of handwritten text on the right page, continuing the script.



## Axiomatická výstavba geometrie

- **AXIOM** = základní věta, jejíž správnost nedokazujeme, ale uznáváme za správnou na základě dosavadních zkušeností; vystupují v ní základní pojmy **bod**, **přímka**, **rovina**, které nejsou definovány. Pomocí těchto pojmů pak definujeme pojmy další a z axiomů pak deduktivně odvozujeme další platná tvrzení (věty)

→ AXIOMATICKÁ VÝSTAVBA GEOMETRIE

# EUKLEIDOVY ZÁKLADY

- Obsahují 13 knih
- Eukleides poznatky utřídil a podal jejich deduktivní důkazy
- První snaha o deduktivní odvozování geometrických poznatků (znalosti z geometrie měli lidé už mnohem dříve)

## EUKLEIDOVY ZÁKLADY

- **Eukleides** si uvědomil, že není možné podat důkazy všech tvrzení, ale je třeba některé tvrzení považovat za pravdivé. Z těch pak vycházel a deduktivně odvozoval další poznatky (matematické věty). Jako první k tomu použil 5 postulátů.
- **Dedukce** = logické vyvození, způsob logického myšlení postupujícího od obecného k jednotlivému (úsudek)

# EUKLEIDOVY POSTULÁTY

- 1. Dvěma body lze vést jedinou přímku.**
- 2. Úsečku je možno neomezeně prodloužit.**
- 3. Z libovolného středu je možno libovolným poloměrem opsat kružnici**
- 4. Všechny pravé úhly jsou shodné**
- 5. Dvě přímky v jedné rovině, které protínají další přímku této roviny, se vždy protínají na té straně od této přímky, kde je součet přilehlých vnitřních úhlů menší než úhel přímý ( $180^\circ$ )**

## EUKLEIDOVY POSTULÁTY

- **5. Eukleidův** postulát je ekvivalentní s tvrzením =

### **AXIOM ROVNOBĚŽNOSTI:**

**„Necht'  $p$  je přímka a  $A$  bod, který na ní neleží. V rovině určené přímkou  $p$  a bodem  $A$  existuje právě jedna přímka procházející bodem  $A$ , která nemá s přímkou  $p$  žádný společný bod.“**

## 5. POSTULÁT EUKLEIDA

- Po Eukleidovi se řada matematiků snažila dokázat 5. postulát pomocí čtyř předchozích. Snahy o důkaz 5. postulátu trvaly více než 2000 let.
- Otázka o jeho závislosti/nezávislosti na přechozích čtyřech byla vyřešena až v 19. století matematikem **Lobačevskim** a nezávisle na něm matematikem **J. Bolyaiem** a **K. F. Gaussem**.

# EUKLEIDOVSKÁ GEOMETRIE

- Geometrii, kterou vybudoval Eukleides a která mezi axiomy přijala 5. postulát (=axiom rovnoběžnosti), nazýváme **eukleidovská geometrie** (žáci na ZŠ a SŠ)
- Geometrii, která přijala negaci 5. postulátu nazýváme tzv. **neeukleidovská geometrie**



## ZÁKLADNÍ VÝZNAM AXIOMATICKÉ VÝSTAVBY TEORIE

- Cesta, jak budovat axiomaticky ostatní matematické disciplíny
- Vyjasnění požadavků, co musí axiomatický systém splňovat:
  - nezávislost axiomů (viz výše)
  - úplnost
  - bezespornost (nelze odvodit větu  $V$  a zároveň její negaci  $V'$ )

## INOVACE GEOMETRIE

- Objevy neeukleidovských geometrií neoslabil význam geometrie eukleidovské
- Potřeba **precizovat Eukleidovy poznatky** a závěry v průběhu 18. – 19. století.
- **David Hilbert** – vytvořil ve svém díle **Základy geometrie** (1899) systém axiomů, ze kterého je možno deduktivně budovat **eukleidovskou geometrii**
- Hilbertův axiomatický systém používáme dodnes

# HILBERTOVY AXIOMY

- 5 skupin axiomů:
  1. Axiomy incidence (I)
  2. Axiomy uspořádání (U)
  3. Axiomy shodnosti (S)
  4. Axiomy spojitosti (D)
  5. Axiom rovnoběžnosti (R)

# GEOMETRIE

- Eukleidovská – budovaná na základě axiomů 1 – 5
- Absolutní – budovaná na základě axiomů 1 – 4
- Lobačevského – budovaná na základě axiomů 1 – 4 a negace 5. axiomu – odporuje vžitým představám

# Poznámky:

- **René Descartes** (1596 -- 1650), Descartův spis **La Géométrie**, který byl vydán roku 1637 jako jeden z dodatků k jeho filozofickému dílu *Discours de la méthode (Rozprava o metodě)*, bývá často považován za počátek analytické geometrie jako vědy. Podrobněji viz literatura.
- **Johann Carl Friedrich Gauss** (1777 -- 1855, Göttingen) byl slavný německý matematik a fyzik. Zabýval se zejména geometrií, matematickou analýzou, teorií čísel, astronomií, elektrostatikou, geodézií a optikou. Silně ovlivnil většinu z těchto oborů vědění. Mezi jeho stěžejní díla patří spis *Disquisitiones Arithmeticae*, který napsal již ve věku 21 let (1798; publikováno bylo ale až v roce 1801). Tato práce položila základy teorie čísel jakožto matematické disciplíny.
- **Georg Friedrich Bernhard Riemann** (1826 -- 1866) byl německý matematik, který výrazně přispěl k rozvoji matematické analýzy a diferenciální geometrie. Na jeho myšlenkách byly dále rozvinuty například Riemannova geometrie, algebraická geometrie či teorie komplexních ploch. Tyto oblasti matematiky se staly základem topologie. V reálné analýze přispěl definicí Riemannova integrálu a rozvinul také teorii trigonometrických řad.