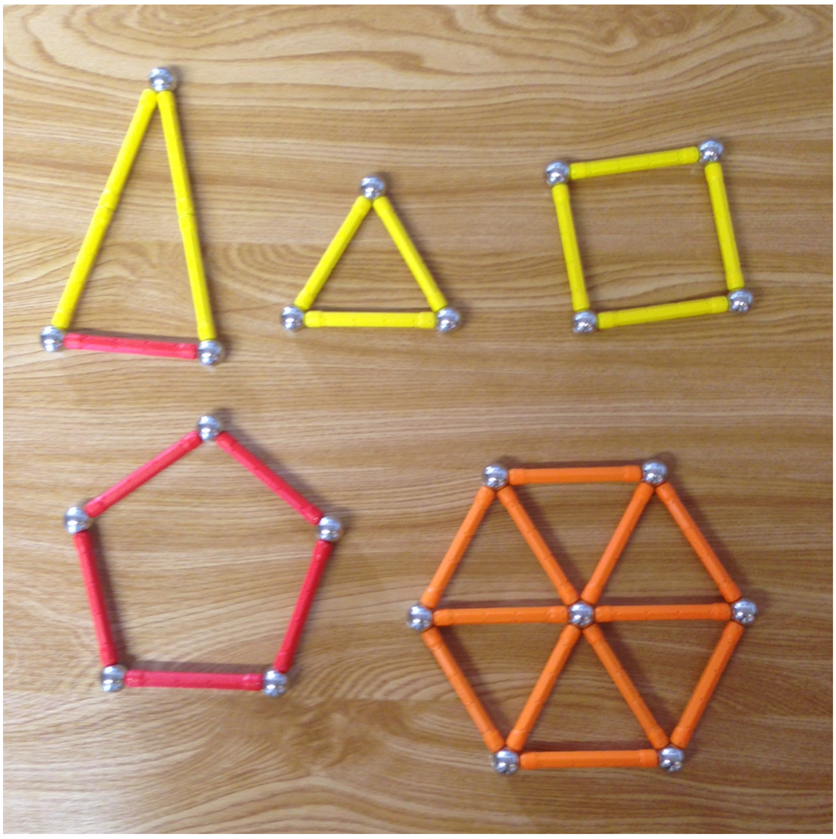
Sbírka úloh z ELEMENTÁRNÍ GEOMETRIE pro studium učitelství 1. stupně základní školy

Leni Lvovská

Říjen 2019



Geometrie má dva poklady: pythagorovu větu a zlatý řez. První má cenu zlata, druhý připomíná spíše drahocenný kámen.

Johannes Kepler (1571 - 1630)[10]

Úvod

Sbírka úloh z elementární geometrie vznikla jako podpora k textům z elementární geometrie pro studium učitelství prvního stupně základní školy [1]. Uvedené texty obsahují jen omezené množství cvičení a žádné řešené úlohy. Tato sbírka nabízí studentům množství řešených příkladů i soubor dalších cvičení. Současně sleduje nejnovější trend mezipředmětovosti a poukazuje v předložených příkladech a cvičeních na propojení geometrie s ostatními předměty a především se světem kolem nás.

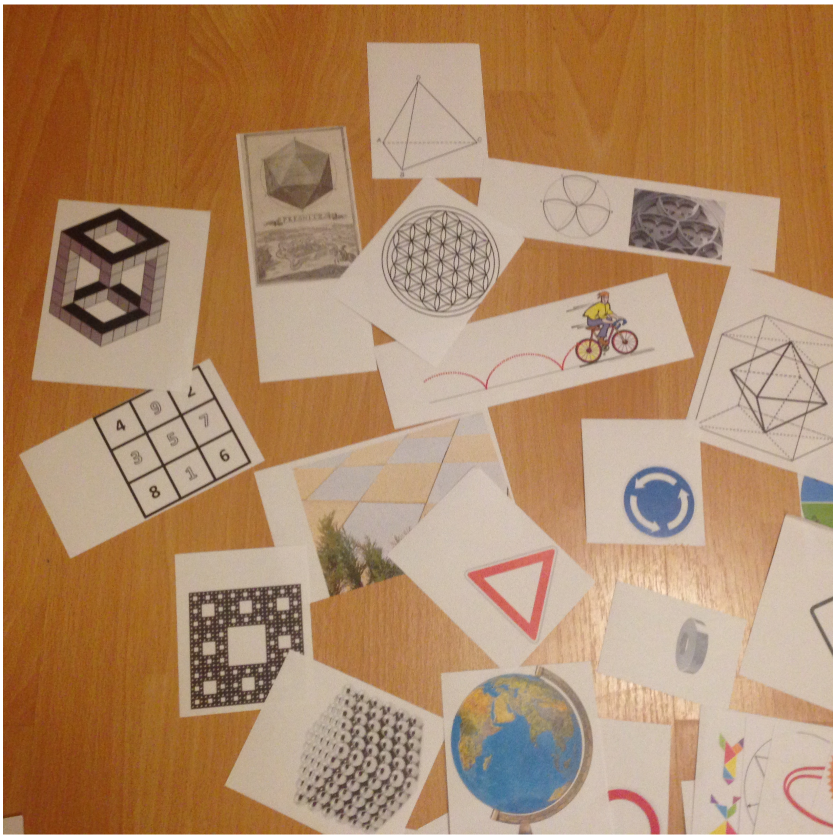
Celá řada úloh pracuje s magnetickou stavebnicí Geomag. V případě, že ji nemáte, lze tyto úlohy demonstrovat např. pomocí špejlí a kuliček modelíny. K tvorbě většiny obrázků byl použit výukový software GeoGebra, ve kterém lze úlohy řešit i dynamicky. Je tedy snadné použít výukový software GeoGebra také přímo ve výuce nebo při samostatném řešení úloh. Na vybrané dynamické aplety a krokované konstrukce jsou u konkrétních konstrukcí uvedeny přímé odkazy.

Tento text vznikl s podporou projektu MUNI/FR/1193/2018, Inovace čtyř předmětů Geometrie pro učitelství 1. stupně základní školy se stavebnicí Geomag a výukovým softwarem Geogebra na Pedagogické fakultě MU v Brně.

Velké poděkování patří Heleně Durnové za přípravu anglické verze tohoto textu a Pavlu Křížovi za podporu se sazbou textu v systému LaTeX.

1 Historický vývoj geometrie

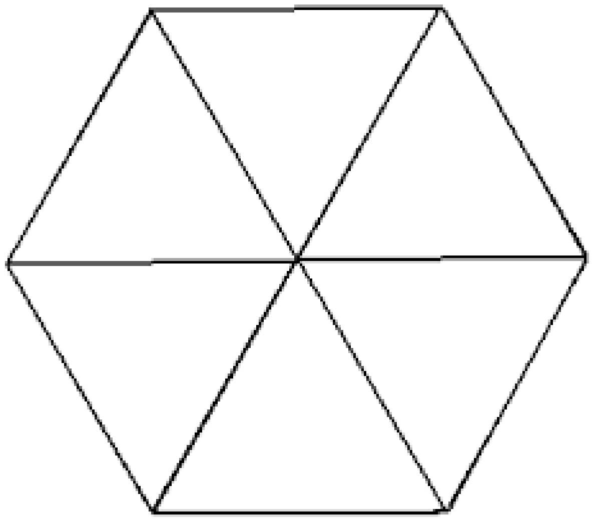
Cvičení 1.1. V příloze na konci textu najdete soubor obrázků. Roztřiďte tyto obrázky na tři skupiny tak, že je budete přiřazovat jednomu ze tří základních geometrických útvarů: kružnice, čtverec, rovnostranný trojúhelník.



Nad obrázky ve skupinkách diskutujte proč jste je přiřadili právě skupiny příslušící kružnici, čtverci či rovnostrannému trojúhelníku. Vyskytují se tam i obrázky, které by mohly být přiřazeny do dvou či dokonce všech tří skupin?

Příklad takové diskuze:

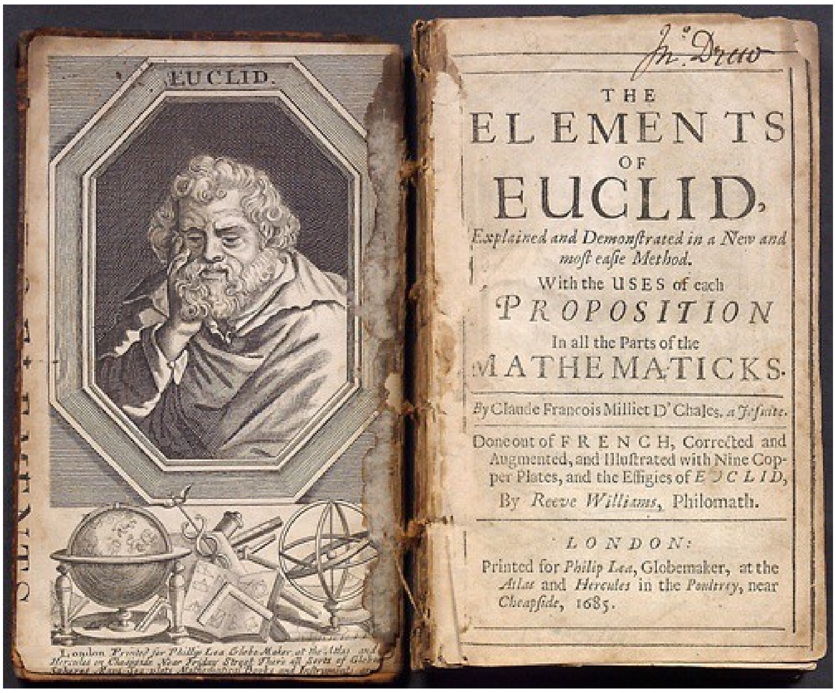
Na tento obrázek můžeme pohlížet jako na pravidelný šestiúhelník, proto může být přiřazen k rovnostrannému trojúhelníku, neboť pravidelný šestiúhelník se skládá ze šesti stejných rovnostranných trojúhelníků. Pravidelný šestiúhlník je pravidelný mnohoúhelník, tj. lze mu opsat i vepsat kružnici, můžeme ho tedy přiřadit i ke kružnici. Na tento obrázek lze pohlížet také jako na drátěný model krychle. Tento náhled případně vhodně přibližte spolužákům, kteří ho nevidí.



Pravidelný šestiúhelník nebo krychle?

Cvičení 1.2. Jakým způsobem se geometrie v dávné minulosti začínala vytvářet? (Formulujte odpověď v několika větách.)

Cvičení 1.3. Co víte o spise, který nazýváme Eukleidovy *Základy (Elementa)*?



Cvičení 1.4. Jakou úlohu sehrál tzv. 5. Eukleidův postulát v historii matematiky? (Formulujte odpověď v několika větách.)

Cvičení 1.5. Přiřaďte ke jménům významných matematiků správně jejich charakteristiku spjatou s geometrií:

- René Descartes (1596 – 1650),
- Johann Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855),
- Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866),
- David Hilbert (1862 – 1943).

a) Německý matematik a fyzik. Zabýval se zejména geometrií, matematickou analýzou, teorií čísel, astronomií, elektrostatikou, geodézií a optikou. Silně ovlivnil většinu z těchto oborů vědění. Stál také u zrodu neeukleidovské geometrie.

b) Jeho spis La Géométrie bývá často považován za počátek analytické geometrie jako vědy.

c) Německý matematik, který ve svém díle *Základy geometrie* vybudoval disciplínu v současnosti nazývanou eukleidovská geometrie, vytvořil tzv. Systém axiomů eukleidovské geometrie.

d) Německý matematik, který zásadním způsobem přispěl k rozvoji matematické analýzy a diferenciální geometrie. Na jeho myšlenkách byla dále rozvinuta také algebraická geometrie či teorie komplexních ploch, které se staly základem diferenciální geometrie na varietách a topologie.

Řešení: René Descartes (b), Johann Carl Friedrich Gauss (a), Georg Friedrich Bernhard Riemann (d), David Hilbert (c).

Cvičení 1.6. Vysvětlete rozdíl mezi axiomem a matematickou větou. Uveťe příklad axiomu a matematické věty.

2 Základní geometrické útvary a jejich vlastnosti

Příklad 2.1. Vyšetřete všechny možné vzájemné polohy tří různých přímek ležících v jedné rovině. Znázorněte a popište.

Řešení: Označme přímky a, b, c. Pak mohou nastat tyto možnosti:

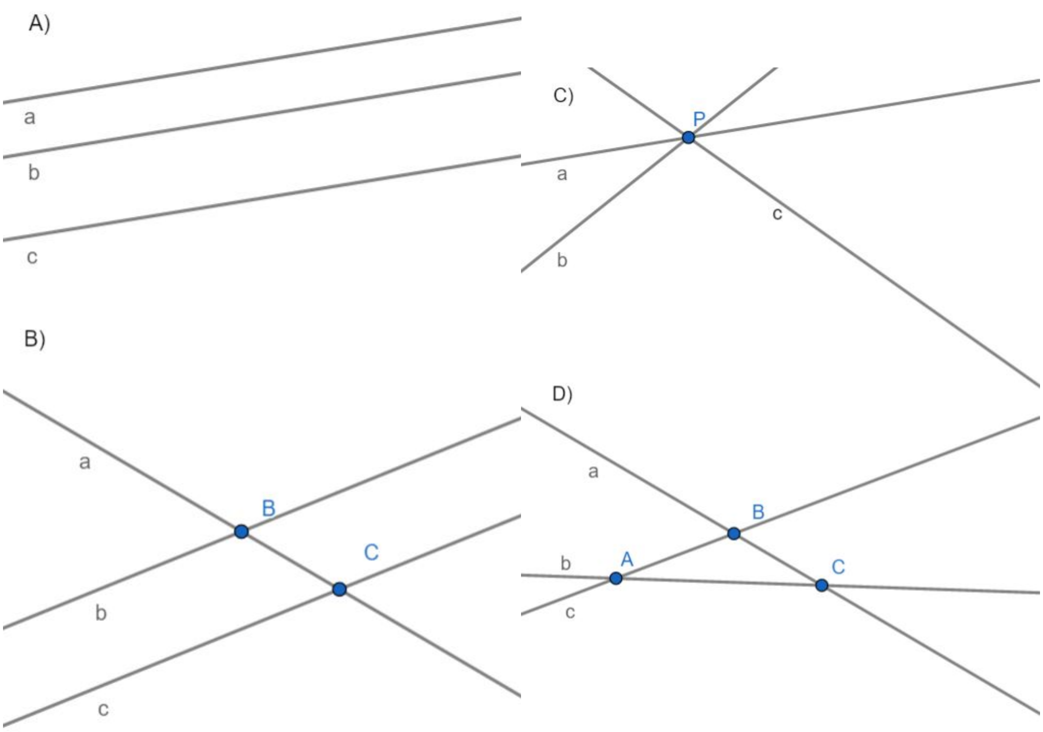
a) všechny přímky jsou vzájeně rovnoběžné, tj. $a \cap b = \emptyset \wedge b \cap c = \emptyset$,

b) dvě přímky jsou rovnoběžné a třetí je s nimi různoběžná, např.

$$b \cap c = \emptyset \wedge a \cap b = B \wedge a \cap c = C$$

c) všechny přímky jsou vzájemně různoběžné a procházejí jediným společným bodem, $a \cap b \cap c = P$,

d) všechny přímky jsou vzájemně různoběžné a po dvou se protínají v různých bodech.



Příklad 2.2. Které geometrické útvary mohou vzniknout jako průnik dvou polopřímek, které jsou částí téže přímky? Znázorněte a popište.

Řešení: Bod, úsečka, polopřímka.

Cvičení 2.3. Narýsujte úsečku AB. Na přímce AB vyznačte:

a) bod C tak, aby bod A ležel mezi body C a B,

b) bod D, aby B ležel mezi A a D,

c) bod P, který neleží na úsečce AB, ale leží na polopřímce AD.

Cvičení 2.4. Narýsujte úsečku KL. Zvolte bod D mezi body KL, vyznačte:

a) bod R tak, aby bod K ležel mezi body R a L,

b) bod S, aby L ležel mezi K a S,

c) bod T, tak, aby bod S ležel mezi body L, T.

Nyní rozhodněte, který z výroků je pravdivý:

1) $S \in \mapsto KL$,

2) $\mapsto RS \cap \mapsto KL = KL$,

3) $\mapsto RD \ \cap \ ST = \emptyset$,

4) $R \in \leftrightarrow KL$,

Cvičení 2.5. Je dána přímka p a bod A, který na ní neleží. Zakreslete:

a) bod M, který náleží polorovině pA,

b) bod P, který leží v obou polorovinách určených přímkou p,

c) bod N, který leží v opačné polorovině k polorovině pA.

Cvičení 2.6. Jsou dány tři různé body A, B, C.

a) Kolik úseček, polopřímek a přímek je určeno těmito body? Jak závisí tyto počty na poloze daných bodů?

b) Které bodové množiny mohou být průnikem dvou z těchto úseček (polopřímek, přímek)?

Znázorněte a proveďte diskuzi.

Cvičení 2.7. Nechť bod R leží mezi body P, Q. Vyberte z polopřímek PR, P, RP, RQ, QR, QP dvojice, které: a) splývají, b) jsou opačné, c) jedna je částí druhé, d) jejich průnikem je úsečka.

Cvičení 2.8. Určete, které útvary mohou vzniknout průnikem:

a) úsečky a poloroviny,

b) polopřímky a poloroviny,

c) přímky a poloroviny,

d) dvou polorovin.

Všechny případy uvažujte v jedné rovině. Znázorněte a popište.

Cvičení 2.9. V rovině je dáno n přímek, z nichž každé dvě se protínají a žádné tři neprocházejí týmž bodem. Kolik existuje průsečíků?

Příklad 2.10. Kolik různých přímek je určeno n body, které leží v jedné rovině a žádné tři neleží na jedné přímce?

Řešení: Pro jeden bod úloha nemá smysl. Načrtněme si danou situaci pro nějaký konečný počet bodů: pro dva body bude přímka jedna, pro tři bodou právě tři přímky, čtyři body určí šest přímek, pět bodů deset přímek atd. Nyní tedy můžeme provést následující úvahu: v n-tém kroku z každého bodu vedeme přímku do $(n-1)$ bodů, ale tímto způsobem je započítáma každá přímka dvakrát. Výsledek je tedy:

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

Cvičení 2.11. V rovině je dáno n přímek, z nichž každé dvě se protínají a žádné tři cházejí týmž bodem. Kolik existuje průsečíků?

Cvičení 2.12. Určete, které útvary mohou vzniknout průnikem:

a) úsečky a poloroviny,

b) polopřímky a poloroviny,

c) přímky a poloroviny.

Všechny případy uvažujte v jedné rovině. Znázorněte a popište.

Cvičení 2.13. Určete, které útvary mohou vzniknout průnikem dvou polorovin. Obě poloroviny uvažujte v jedné rovině. Znázorněte a popište.

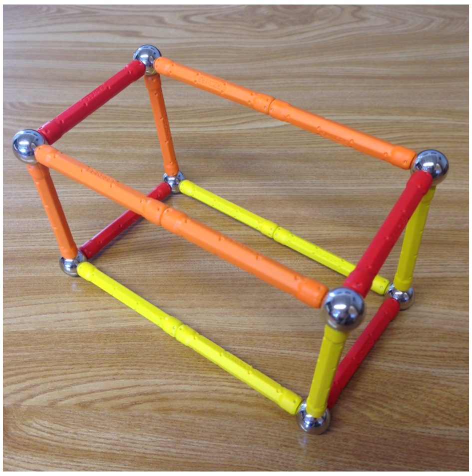
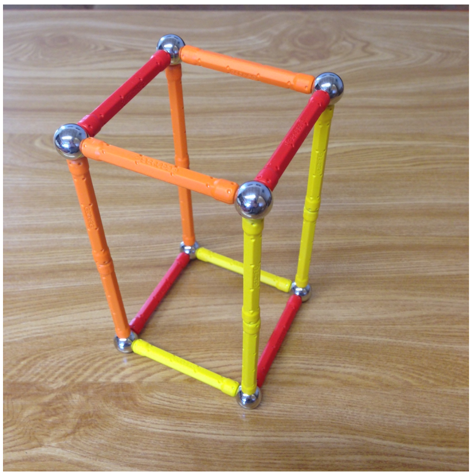
Cvičení 2.14. Uvnitř jedné poloroviny určené přímkou p zvolte body A, B. Uvnitř poloroviny opačné zvolte body C, D tak, aby přímky AB a CD byly s přímkou p různoběžné. Na přímce AB zvolte bod M, na přímce CD zvolte bod N. Jak je nutno zvolit body M, N, aby úsečka MN obsahovala bod přímky p ležící mezi body M a N?

Příklad 2.15. Sestrojte kvádr $ABCDEFGH$ (pomocí stavebnice GeoMag nebo pomocí špejlí a plastelíny).
A) Určtete všechny přímky incidentní s hranami kvádru, které jsou s přímkou BC:

- rovnoběžné
- různoběžné
- mimoběžné

B) S využitím bodů kvádru uveďte příklad trojice rovin, která tvoří svazek rovin, a zapište průnik těchto tří rovin.

Řešení:

- rovnoběžné: $\leftrightarrow AD$, $\leftrightarrow EF$, $\leftrightarrow HG$
- různoběžné: $\leftrightarrow AB$, $\leftrightarrow EB$, $\leftrightarrow DC$, $\leftrightarrow CF$
- mimoběžné $\leftrightarrow EH$, $\leftrightarrow FG$, $\leftrightarrow AH$, $\leftrightarrow DG$

Svazek rovin tvoří např. roviny $\leftrightarrow ABC$, $\leftrightarrow ABE$ a $\leftrightarrow AF$:

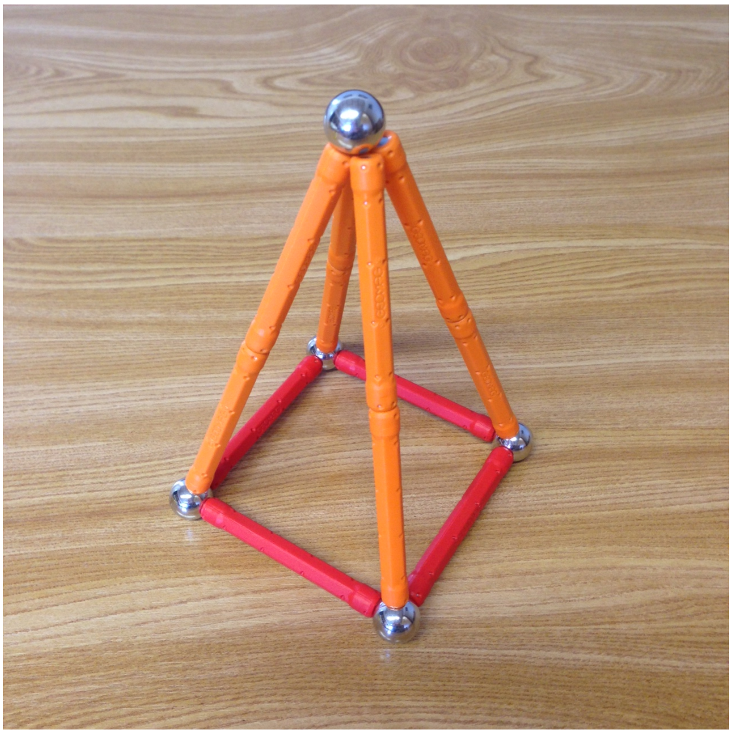
$$\leftrightarrow ABC \cap \leftrightarrow ABE \cap \leftrightarrow ABF = \leftrightarrow AB.$$

Příklad 2.16. Sestrojte pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ (pomocí stavebnice GeoMag nebo pomocí špejlí a plastelíny).
A) Určtete všechny přímky určené body A, B, C, D, V, které jsou s přímkou BC:

- rovnoběžné
- různoběžné
- mimoběžné

B) S využitím bodů jehlanu A, B, C, D, V uveďte příklad trojice rovin, která tvoří trs rovin, a zapište průnik těchto tří rovin.

Řešení:



- rovnoběžné: $\leftrightarrow AD$,
- různoběžné: $\leftrightarrow AB$, $\leftrightarrow BV$, $\leftrightarrow CV$, $\leftrightarrow CD$,
- mimoběžné $\leftrightarrow AV$, $\leftrightarrow DV$.

Trs rovin tvoří např. roviny $\leftrightarrow ABC$, $\leftrightarrow ABV$ a $\leftrightarrow BCV$:

$$\leftrightarrow ABC \cap \leftrightarrow ABV \cap \leftrightarrow BCV = \{B\}.$$

3 Konvexní a nekonvexní množina, konvexní a nekonvexní úhel

Cvičení 3.1. Jak poznáme, kdy je geometrický útvar konvexní a kdy nekonvexní? Roztřiďte geometrické útvary na konvezní a nekonvexní: úsečka, přímka, polorovina, kružnice, trojúhelník, čtyřúhelník, pětiúhelník, kruh s otvorem, krychle.

Cvičení 3.2. Podívejte se kolem sebe a pokuste se vidět i úhly určené třeba hranami tabule nebo hranami lavice, částmi rámu okna, ale také úhly, které svírají např. nohy židle s podlahou, ručičky hodin apod.

Některé takové úhly vyznačte i na obrázku. Vyhledejte vlastní podobné obrázky a vyznačte na nich úhly.

Cvičení 3.3. Narýsujte polopřímky $\mapsto SC$ a $\mapsto SD$. Červeným obloučkem vyznačte konvexní úhel $\triangleleft CSD$ a modrým nekonvexní úhel $\sphericalangle CSD$. Vyznačte bod E úhlu $\triangleleft CSD$ a bod F úhlu $\sphericalangle CSD$. Dokážete vyznačit bod H, který je bodem úhlu $\triangleleft CSD$ i úhlu $\sphericalangle CSD$?

Cvičení 3.4. Narýsujte úhel $\triangleleft ADB$. Vyznačte v něm bod H. Narýsujte úhel $\triangleleft ADH$. Zapište všechny takto vyznačené konvexní úhly.

Cvičení 3.5. Narýsujte tři polopřímky se společným počátkem S. Na každé z polopřímek vyznačte jeden z bodů A, B, C. Obloučky vyznačte všechny takto narýsované úhly a zapište je.

Cvičení 3.6. Načrtněte dva **konvexní** rovinné útvary takové, že jejich

a) sjednocení je množina konvexní,

b) sjednocení je množina nekonvexní,

c) průnik je množina konvexní,

d) průnik je množina nekonvexní.

Cvičení 3.7. Načrtněte dva **nekonvexní** rovinné útvary takové, že jejich

a) sjednocení je množina konvexní,

b) sjednocení je množina nekonvexní,

c) průnik je množina konvexní,

d) průnik je množina nekonvexní.

Cvičení 3.8. Načrtněte a rozhodněte, zda se jedná o konvexní bodovou množinu:

a) trojúhelník ABC bez svých vrcholů,

b) trojúhelník KLM bez jednoho vnitřního bodu jedné své strany,

c) sjednocení vnitřku libovolného trojúhelníka a dvou různých bodů jeho obvodu,

d) rozdíl konvexního úhlu AVB a jeho ramene VA,

e) rozdíl čtverce $ABCD$ a sjednocení dvou jeho stran,

f) sjednocení vnitřku čtverce $ABCD$ a dvou jeho stran,

g) kružnice,

h) kruh.

Příklad 3.9. Vyšetřete všechny geometrické útvary, které mohou vzniknout jako průnik dvou trojúhelníků. Znázorněte a popište.

Řešení: Průnikem dvou trojúhelníků může vzniknout:

A) bod, např. $\triangle ABC \cap \triangle EFD = \{D\}$,

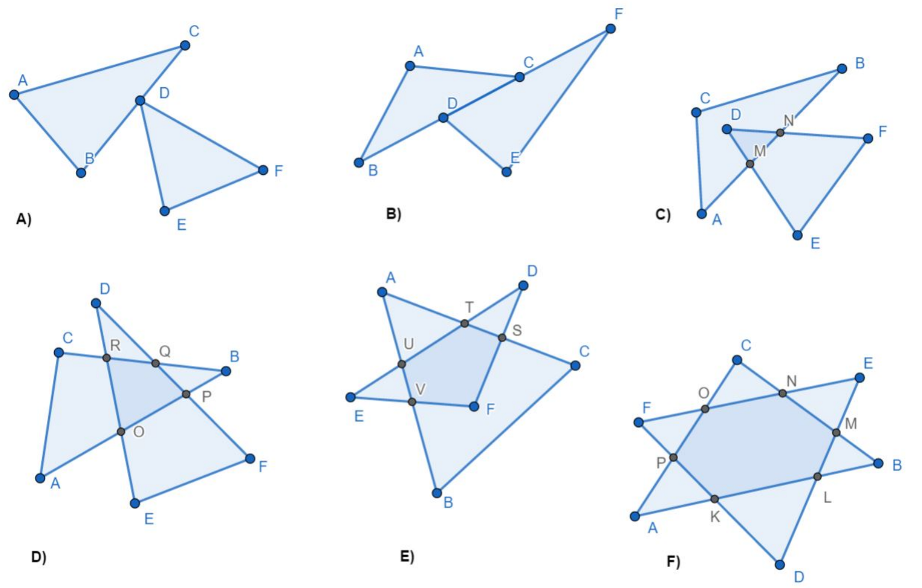
B) úsečka, např. $\triangle ABC \cap \triangle EFD = DC$,

C) trojúhelník, např. $\triangle ABC \cap \triangle EFD = \triangle DMN$,

D) čtyřúhelník, např. $\triangle ABC \cap \triangle EFD =$ čtyřúhelník $OPQR$,

E) pětiúhelník, např. $\triangle ABC \cap \triangle EFD =$ pětiúhelník $FSTUV$,

F) šestiúhelník, např. $\triangle ABC \cap \triangle EFD =$ šestiúhelník $KLMNOP$.



Cvičení 3.10. Volte dvojice konvexních úhlů (nikoliv úhly plné nebo nulové). Vyšetřete, které geometrické útvary mohou vzniknout jako průnik těchto úhlů. Všechny případy znázorněte a popište.

Cvičení 3.11. Zvolte různoběžné přímky p, q, jejich průsečík označte V. Na přímce p zvolte bod P, na přímce q, bod Q. Každou z dvojic vrcholových a vedlejších úhlů určených různoběžkami p, q definujte pomocí polorovin pQ, qP nebo polorovin k nim opačných. Zapište symbolickým zápisem.

Cvičení 3.12. Vymodelujte ze stavebnice Geomag a poté narýsyjte:

a) rovnostranný trojúhelník,

b) rovnoramenný trojúhelník,

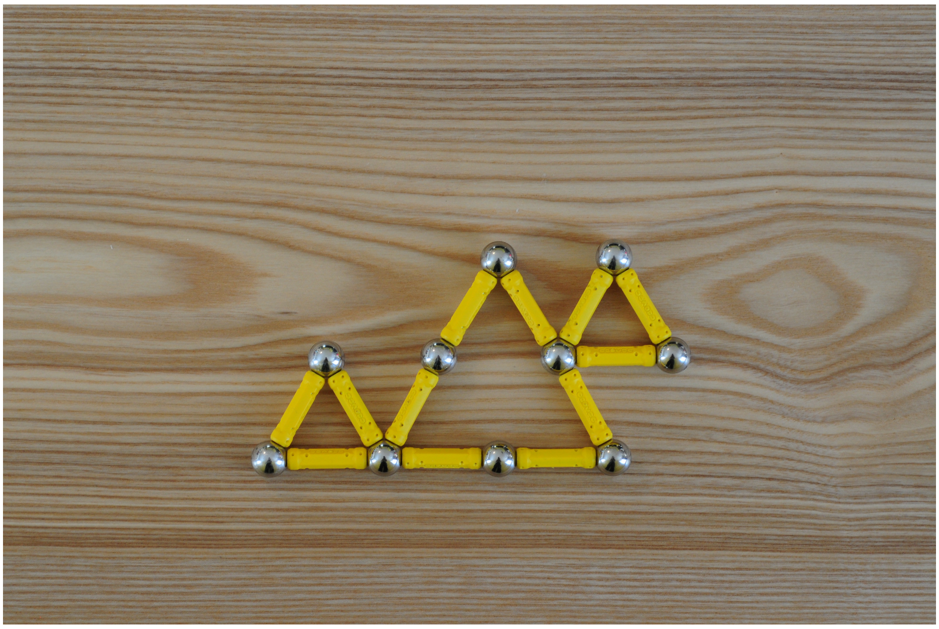
c) čtverec,

d) pravidelný pětiúhelník,

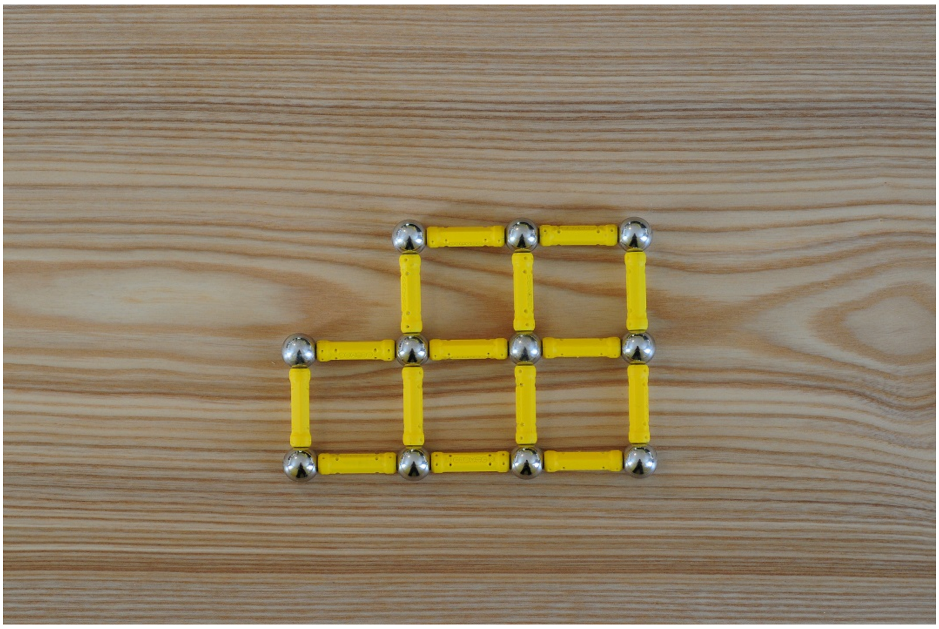
e) pravidelný šestiúhelník.

Příklad 3.13. Vymodelujte ze stavebnice Geomag následující zadání, a poté procvičte svoji představivost v rovině jejich řešením:

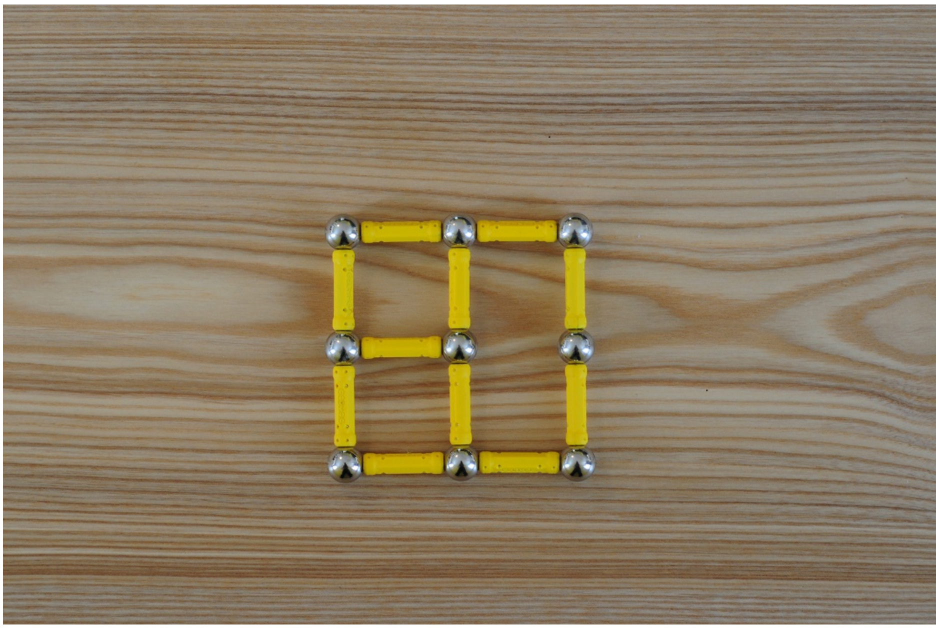
A) Přesuňte 3 shodné úsečky (žluté tyčinky) tak, abyste vytvořili 2 velké a jeden malý trojúhelník. Úloha má dvě řešení.



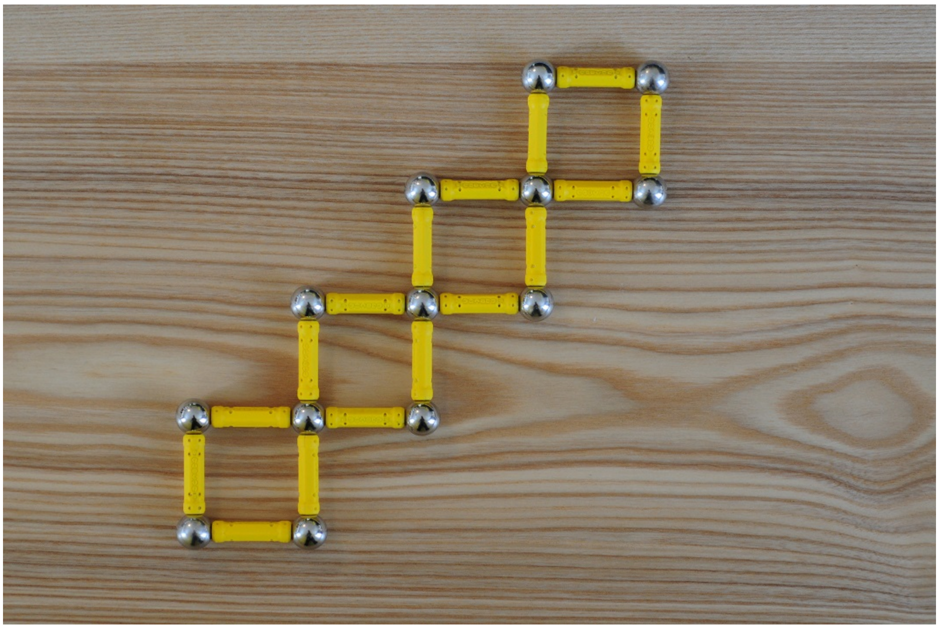
B) Odstraňte 3 shodné úsečky (žluté tyčinky) tak, abyste vytvořili 3 čtverce.



C) Odeberte jednu úsečku (žlutou tyčinku) tak, abyste získali 2 čtverce. Úloha má dvě řešení.



D) Přesuňte 4 shodné úsečky (žluté tyčinky) tak, abyste vytvořili opět čtyři čtverce, ale takové, které nejsou všechny stejně velké.



Řešení: Naleznete na konci textu.

Cvičení 3.14. Narýsujte pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ se středem S a na obrázku vyznačte dvojice úhlů:

a) styčných (nikoliv vedlejších),

b) vedlejších,

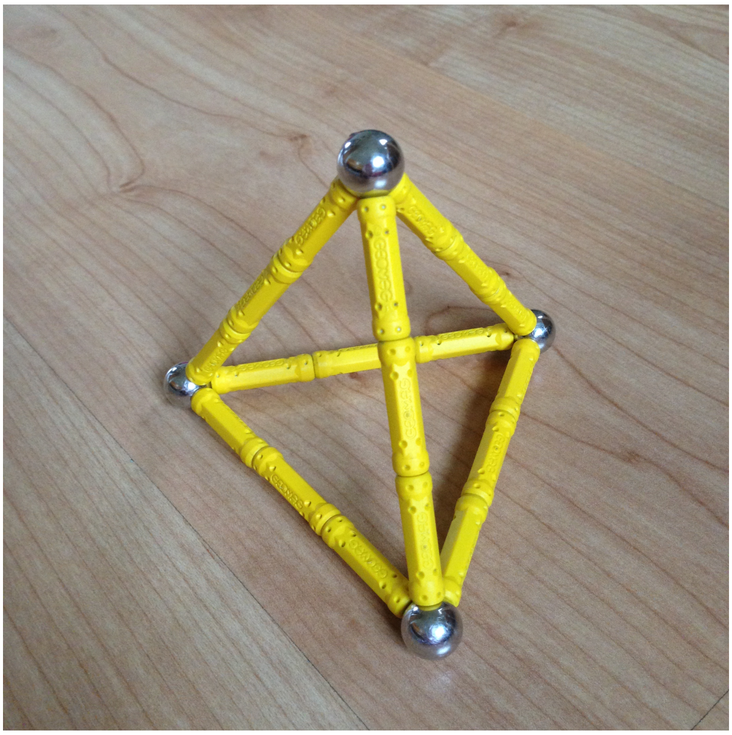
c) vrcholových,

d) souhlasných,

e) střídavých,

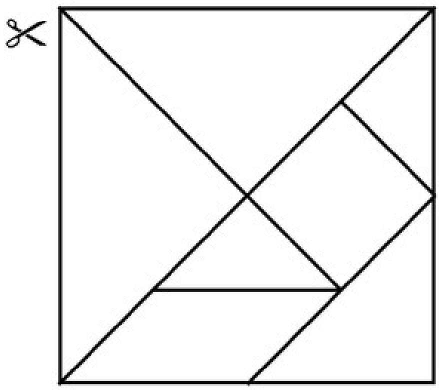
f) přilehlých.

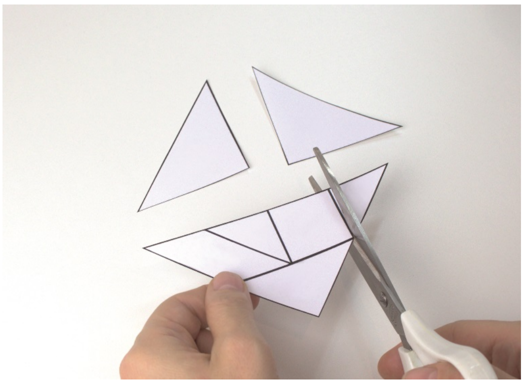
Příklad 3.15. Vymodelujte pravidelný čtyřstěn $ABCD$ a potom ho zobrazte. Určete jeho průnik s poloprostorem $EFGH$, jestliže bod A leží mezi body E, C, bod B mezi body F, C a bod G mezi body D, C.



4 Trojúhelník, čtyřúhelník, pravidelný mnohoúhelník, kružnice

Cvičení 4.1. Tangram je nejstarší známý hlavolam na světě, pochází ze staré Číny. Je to čtverec rozdělený promyšleným způsobem na sedm částí, z nichž lze sestavovat různé geometrické obrazce, předměty, zvířata a lidské postavy. Vyrobte si svůj tangram ze čtverce tvrdého papíru podle přiložených obrázků:





Poté sestrojte s využitím všech sedmi částí:

a) trojúhelník,

b) rovnoběžník,

c) lichoběžník.

Čínští matematici, kteří se tangramem zabývali, zjistili, že ze sedmi částí tangramu lze sestavit celou sérii konvexních mnohoúhelníků:

d) 1 trojúhelník,

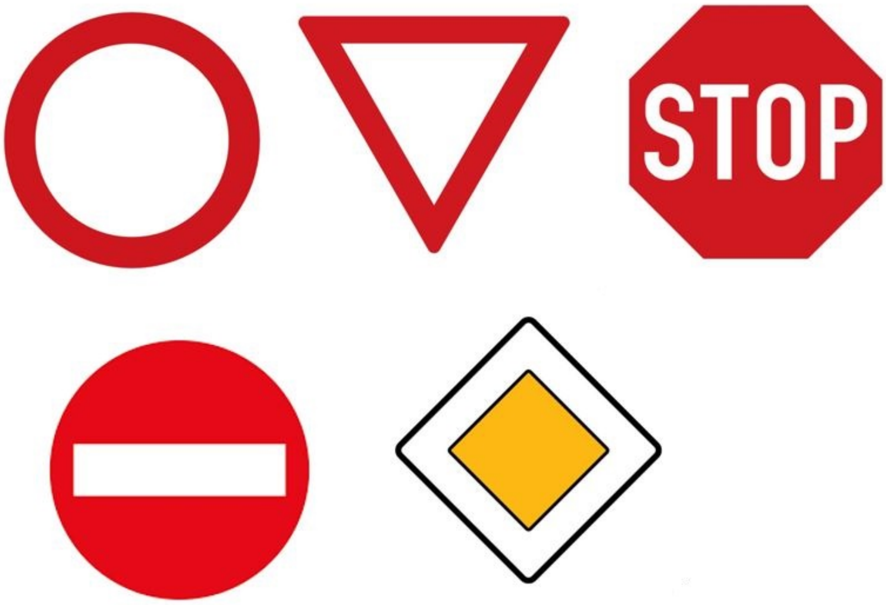
e) 6 čtyřúhelníků,

f) 2 pětiúhelníky,

g) 4 šestiúhelníky..

Pokud jste zvládli geometrické útvary a) - c), můžete zkusit tento poněkud obtížnější úkol.

Příklad 4.2. Na obrázku je několik dobře známých dopravních značek. Zodpovězte následující otázky:



1) Jaké geometrické útvary se nacházejí na obrázcích? (jednobodovou množinu neuvažujeme)

2) Sestrojte pravítkem a kružítkem všechny geometrické útvary z úlohy 1).

3) Sestrojte pomocí pravítka a kružítka středy obou kružnic na první značce. Jaký je mezi těmito dvěma kružnicemi vztah?

4) Jaký je obsah trojúhelníka, který tvoří druhou značku, jestliže jeho strana je 900mm? Pokuste se úlohu vyřešit více způsoby (zopakujte si Heronův vzorec).

5) První značka má průměr 700mm. Strana trojúhelníka na druhé značce je 900mm. Na kterou z těchto značek potřebujeme více plechu?

6) Vyfoťte si značky, které potkáváte cestou do školy, a formulujte podobné otázky.

Řešení: 1) úsečka, kružnice, kruh, rovnostranný trojúhelník, čtverec, obdélník, pravidelný osmiúhelník. 3) Jedná se o kružnice soustředné, který mají společný střed. Tento střed najdeme např. pomocí dvou libovolných různých tětiv, využijeme toho, že osou každé úsečky, která je tětivou kružnice je přímka procházející středem kružnice.

Příklad 4.3. Sestrojte čtverec, je-li dána jeho strana AB. Vyberte tvrzení, která jsou nepravdivá:

a) Ve čtverci jsou všechny úhly shodné.

b) Ve čtverci je právě jeden úhel pravý.

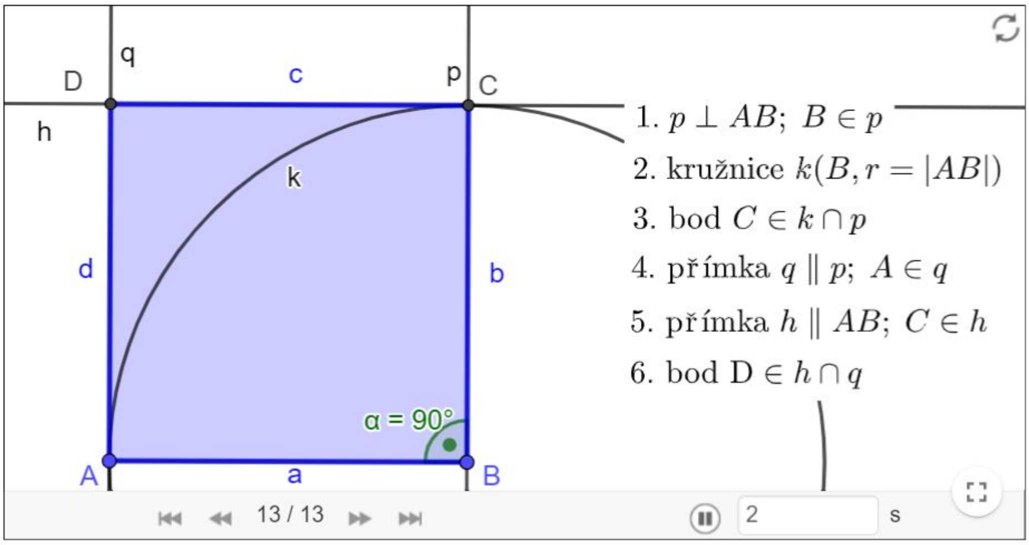
c) Dvě strany ve čtverci musí být vodorovné.

d) Ve čtverci musí být sousední strany na sebe kolmé.

e) Úhel mezi uhlopříčkou a přilehlou stranou čtverce je 45°.

f) Úhlopříčky ve čtverci svírají úhel 60°.

Řešení:



Nepravdivá tvrzení jsu tvrzení b), c), f).

Cvičení 4.4. Je-li v rovnoramenném trojúhelníku ABC úhel při základně AB roven trojnásobku úhlu při vrcholu C a rozdělí-li se úhel $\sphericalangle BAC$ při základně na tři shodné úhly (tak, že M, N jsou takové body strany BC, pro něž platí $\sphericalangle NAB \cong \sphericalangle MAN \cong \sphericalangle CAM$), pak platí $AB \cong AN \cong BM$, $AM \cong CM$. Dokažte.

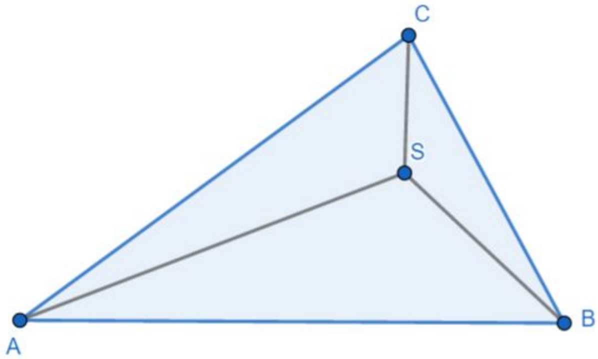
Cvičení 4.5. Bodem A ležícím vně kružnice $k(S, r)$ je vedena sečna CD tak, že $AC < AD$ a $|AC| = r$. Dokažte, že

$$\sphericalangle ASC = \frac{1}{3} \sphericalangle BSD,$$

kde bod B je průsečík přímky AS s kružnicí k takový, že S leží mezi body A, B.

Příklad 4.6. Uvnitř trojúhelníku ABC zvolte bod S. Dokažte, že součet úseček SA, SB, SC je větší než poloviční součet stran daného trojúhelníku, tj. že

$$SA + SB + SC > \frac{1}{2}(AB + BC + CA). \tag{1}$$



Řešení: Bod S je vnitřní bod trojúhelníka ABC, tedy vznikly tři další trojúhelníky, pro které z trojúhelníkové nerovnosti platí:

pro trojúhelník ABS: $AS + BS > AB$,

pro trojúhelník ACS: $AS + CS > AC$,

pro trojúhelník BCS: $BS + CS > BC$.

Sečtením pravých a levých stran uvedených nerovností dostáváme:

$$2 \cdot AS + 2 \cdot BS + 2 \cdot CS > AB + BC + AC, \tag{2}$$

čímž je nerovnost (1) dokázána.

Příklad 4.7. Dokažte, že pro součet těžnic t_a, t_b, t_c trojúhelníku ABC platí vztah:

$$\frac{1}{2}(a + b + c) < t_a + t_b + t_c < a + b + c. \tag{3}$$

Řešení: Nejprve dokážeme nerovnost

$$\frac{1}{2}(a + b + c) < t_a + t_b + t_c. \tag{4}$$

Označme A_1 střed strany BC, B_1 střed strany AC a C_1 střed strany AB trojúhelníku ABC. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne

pro trojúhelník ABA_1: $t_a + \frac{a}{2} > c$, pro trojúhelník ACC_1: $t_c + \frac{c}{2} > b$,

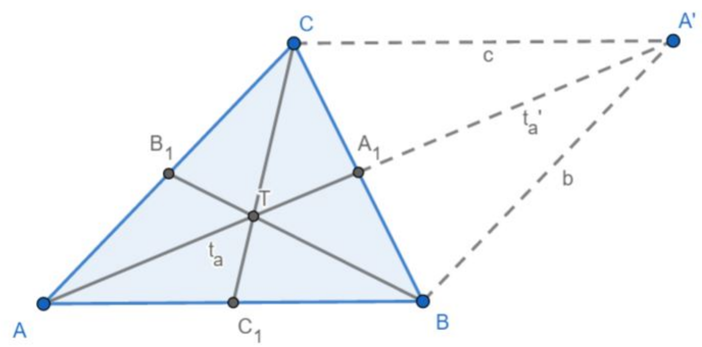
pro trojúhelník BCB_1: $t_b + \frac{b}{2} > a$.

Sečtením pravých a levých stran uvedených nerovností dostáváme:

$$t_a + t_b + t_c + \frac{1}{2}(a + b + c) > a + b + c, \tag{5}$$

tj.

$$t_a + t_b + t_c > \frac{1}{2}(a + b + c). \tag{6}$$



Dokažme nyní nerovnost

$$t_a + t_b + t_c < a + b + c. \tag{7}$$

Nechť body A_1, B_1, C_1 jsou opět po řadě středy stran BC, AC a AB daného trojúhelníku. Sestrojme bod A' tak, že bod A_1 je středem úsečky AA'. Čtyřúhelník $ABA'C$ je rovnoběžník, jeho uhlopříčky se půlí. Platí tedy $AC \cong BA'$. Z trojúhelníkové nerovnosti pro trojúhelník ABA' vyplývá:

$$2t_a < b + c. \tag{8}$$

Analogickým postupem, tj. sestrojením bodů B' a C' tak, že bod B_1 je středem úsečky BB' a C_1 je středem úsečky CC' dostaneme:

$$2t_b < a + c \tag{9}$$

a

$$2t_c < a + b. \tag{10}$$

Sečtením pravých a levých stran tří získaných nerovností obdržíme:

$$2t_a + 2t_b + 2t_c < 2a + 2b + 2c, \tag{11}$$

tj. dokázali jsme nerovnost (7).

Příklad 4.8. Dokažte, že součet úseček, které spojují vnitřní bod P trojúhelníku s krajními body jedné jeho strany, je menší než součet zbývajících dvou stran daného trojúhelníku.

Řešení: Podle zadání úlohy například platí, že

$$AP + BP < AC + BC \tag{12}$$

Tvrzení (12) nyní dokážeme. Protože bod P náleží vnitřku trojúhelníka ABC, pak musí existovat bod X, který leží na straně BC a na polopřímce AP za bodem P. Pro trojúhelníky ACX a BPX vyjádříme trojúhelníkovou nerovnost

pro trojúhelník ACX: $AX < AC + CX$,

pro trojúhelník BPX: $BP < XB + PX$.

Po sečtení obou nerovností dostáváme:

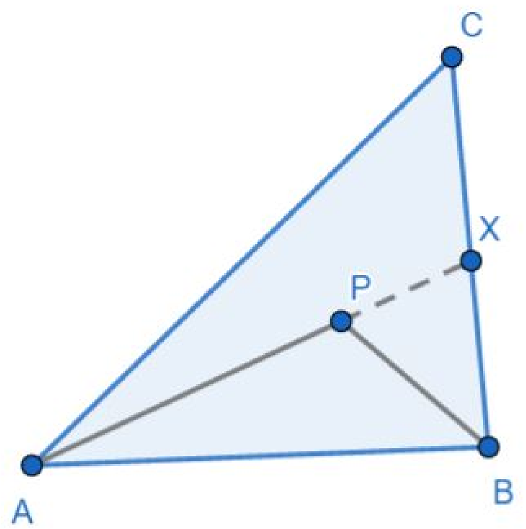
$$AX + BP < AC + CX + BX + PX. \tag{13}$$

Vyjádříme-li úsečku AX jako součet úseček $AP+PX$ a uvážíme-li, že $CX + BX = BC$, pak platí:

$$(AP + BP) + PX < AC + (CX + XB) + PX,$$

$$(AP + BP) + PX < (AC + BC) + PX$$

a tedy nerovnost (12) je dokázána.



Cvičení 4.9. Přímka o je osou úsečky AB. Bod X je libovolný vnitřní bod poloroviny oA. Dokažte, že platí: $AX < BX$.

Cvičení 4.10. Bod U je vnitřním bodem trojúhelníku ABC.
Dokažte, že platí: $\sphericalangle AUB > \sphericalangle ACB$, $\sphericalangle BUC > \sphericalangle BAC$ a $\sphericalangle AUC > \sphericalangle ABC$.

Cvičení 4.11. Leží-li bod X na ose daného konvexního úhlu AVB, pak má od jeho ramen stejné vzdálenosti. Dokažte.

Cvičení 4.12. Splývá-li těžnice trojúhelníka s jeho výškou, je tento trojúhelník rovnoramenný. Dokažte.

Cvičení 4.13. V trojúhelníku ABC je $\sphericalangle BAC = \alpha = 50°$, $\sphericalangle ABC = \beta = 60°$, osa $\sphericalangle ABC$ protíná stranu AC v bodě D. Seřaďte úsečky AB, BC, CD, AD, AC, BD podle velikosti.

Cvičení 4.14. Určete velikost vnitřních úhlů trojúhelníka $A_1B_1C_1$, jehož vrcholy jsou průsečíky os vnějších úhlů daného trojúhelníka ABC.

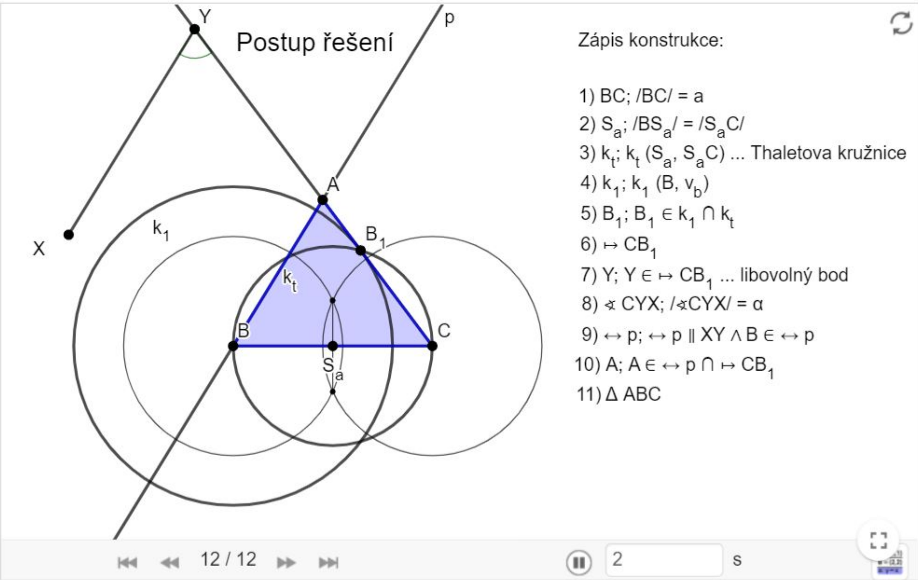
Cvičení 4.15. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC a bod D, který je středem jeho základny AB. Bodem D jsou vedeny kolmice k ramenům AC, BC trojúhelníka ABC. Jejich paty jsou označeny M, N. Dokažte, že $\triangle DMC \cong \triangle DNC$.

Cvičení 4.16. Sestrojte trojúhelník ABC, jsou-li dány tři nezávislé údaje:

a)	c, b, t_c	b)	α, c, t_c	c)	a, v_a, b
d)	a, α, v_b	e)	b, c, v_a	f)	α, v_b, r_v
g)	b, γ, v_c	h)	γ, v_a, v_b	i)	c, v_a, v_b
j)	a, v_a, v_b	k)	γ, v_a, v_c	l)	r_o, v_c, t_c
m)	a, b, t_c	n)	α, β, r_v	o)	α, β, r_o
p)	b, β, v_b	q)	a, β, r_v	r)	c, t_a, t_b
s)	b, β, t_a	t)	a, t_a, t_b	u)	a, v_a, t_b
v)	t_a, t_b, t_c	w)	t_a, t_b, γ	z)	t_a, v_a, v_b

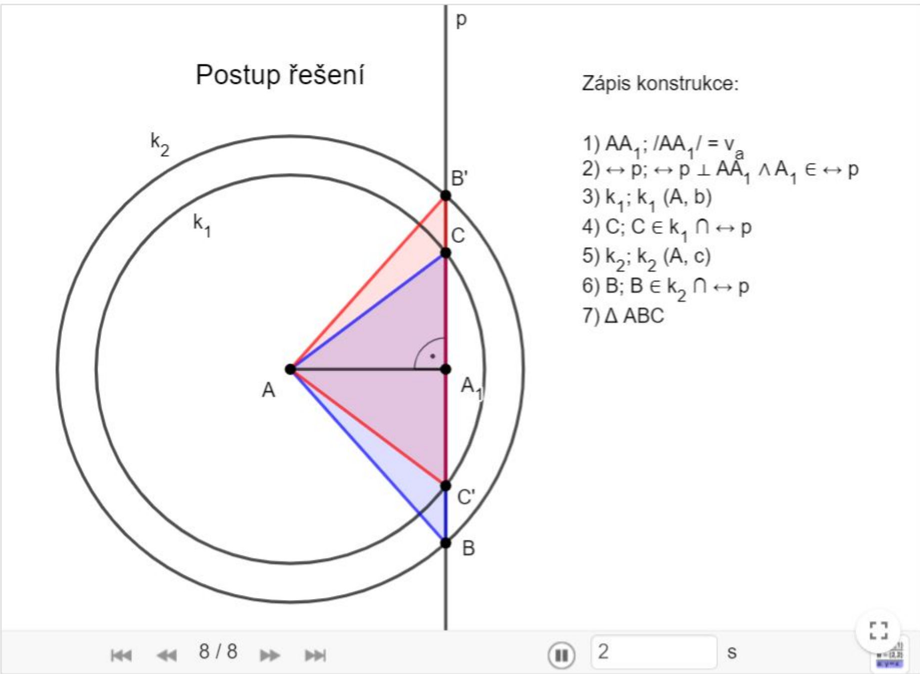
kde r_o je poloměr kružnice opsané a r_v je poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC. Některé z těchto úloh najdete vyřešené v následujících příkladech.

Příklad 4.17. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: a, α, v_b.



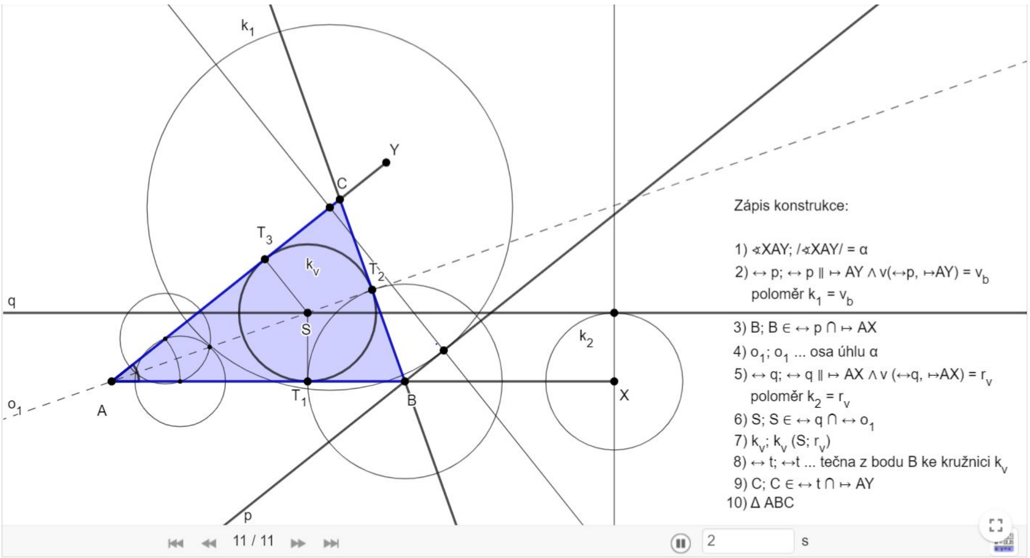
Konstrukce "krok po kroku":
https://www.geogebra.org/m/u7e5f3qn#material/raxdkacg

Příklad 4.18. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: b, c, v_a.



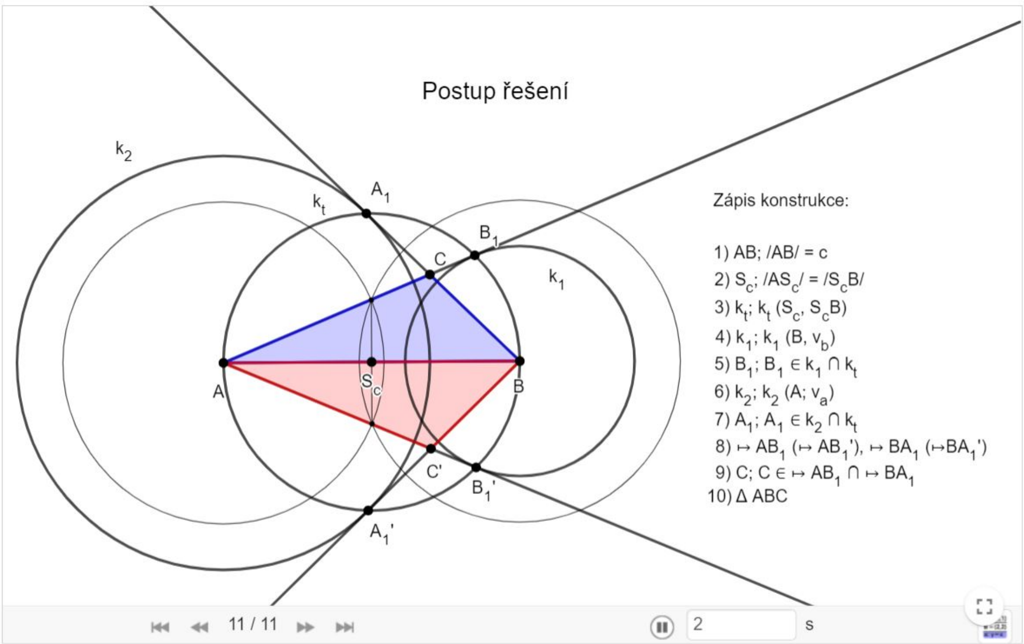
Konstrukce "krok po kroku":
https://www.geogebra.org/m/u7e5f3qn#material/ny5an7tf

Příklad 4.19. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: α, v_b, r_v.



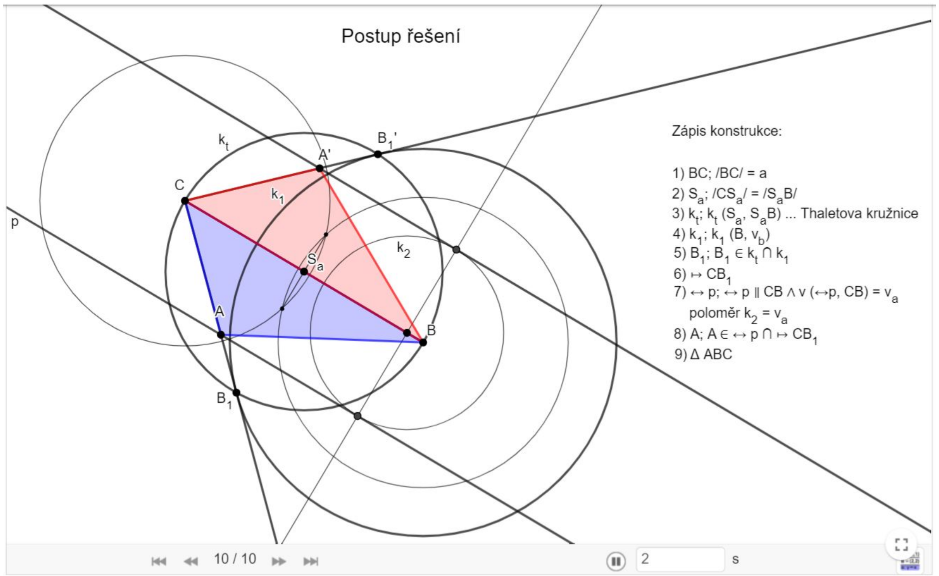
Konstrukce "krok po kroku":
https://www.geogebra.org/m/u7e5f3qn#material/smnfqkqf

Příklad 4.20. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: c, v_a, v_b.



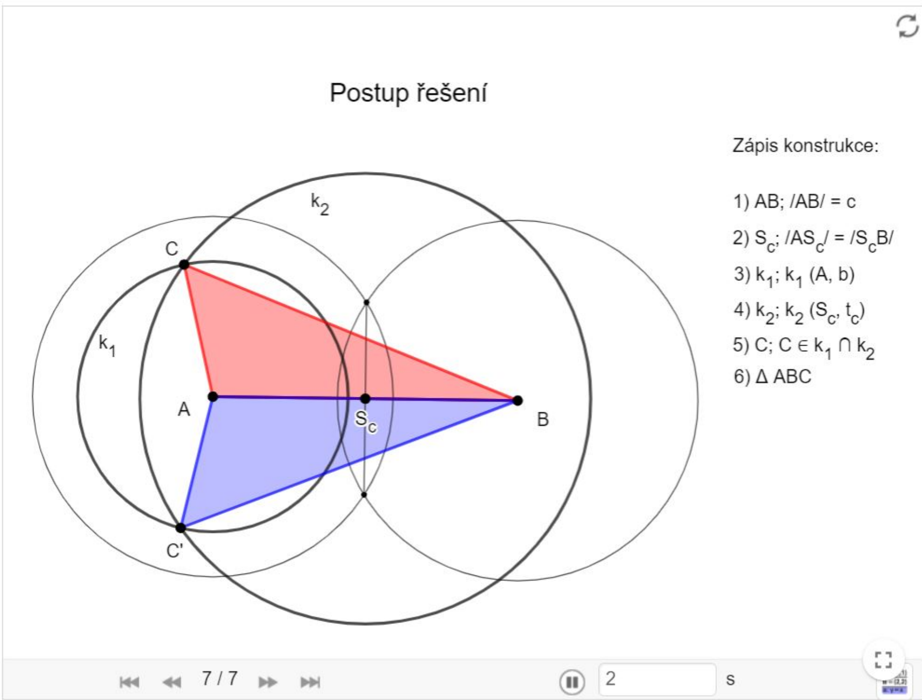
Konstrukce "krok po kroku":
https://www.geogebra.org/m/u7e5f3qn#material/yzcd6acd

Příklad 4.21. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: a, v_a, v_b.



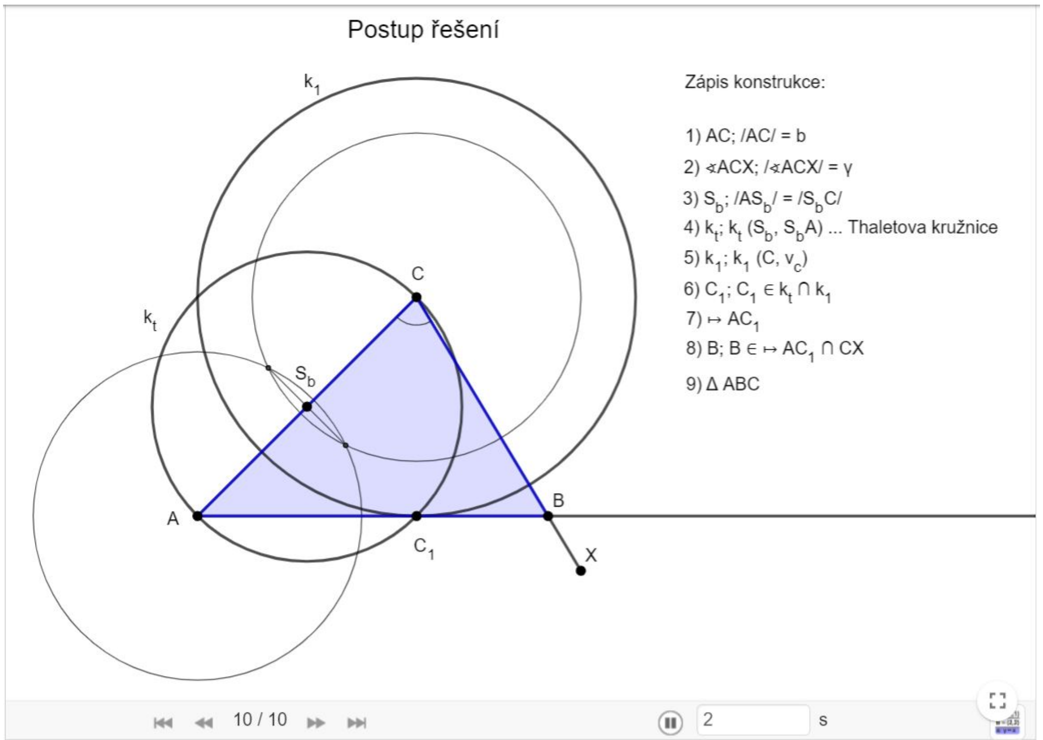
Konstrukce "krok po kroku":
https://www.geogebra.org/m/u7e5f3qn#material/rkdepcxf

Příklad 4.22. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: b, c, t_c.



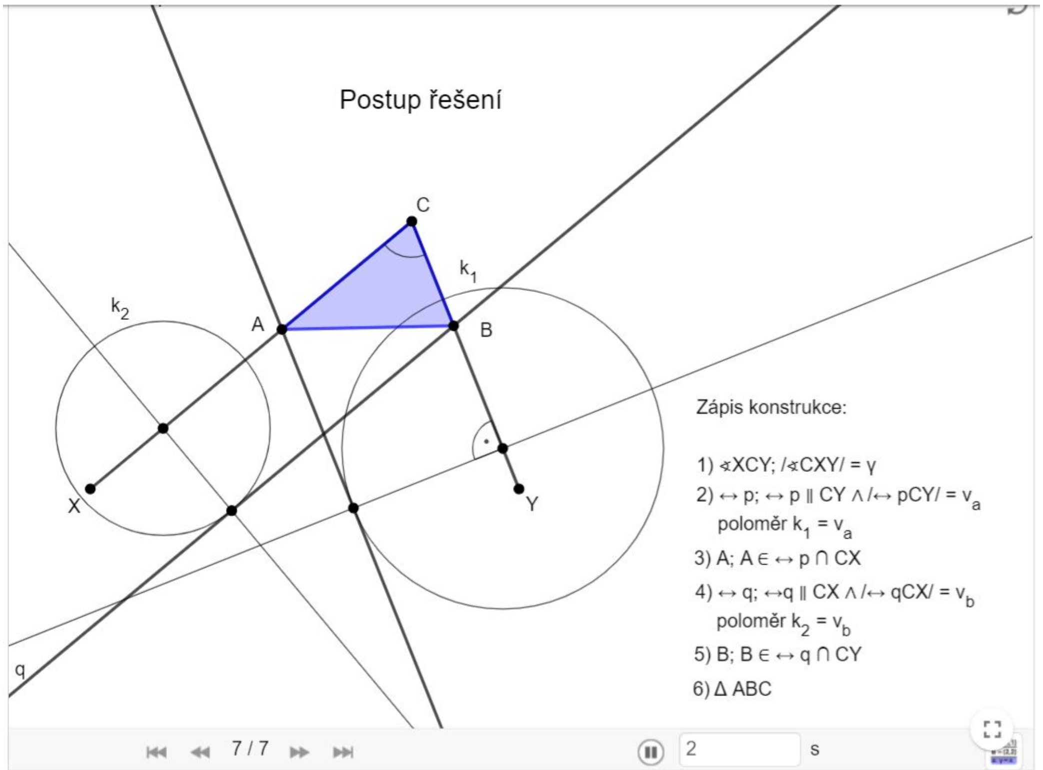
Konstrukce "krok po kroku":
https://www.geogebra.org/m/u7e5f3qn#material/gnr4vvnn

Příklad 4.23. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: b, γ, v_c.



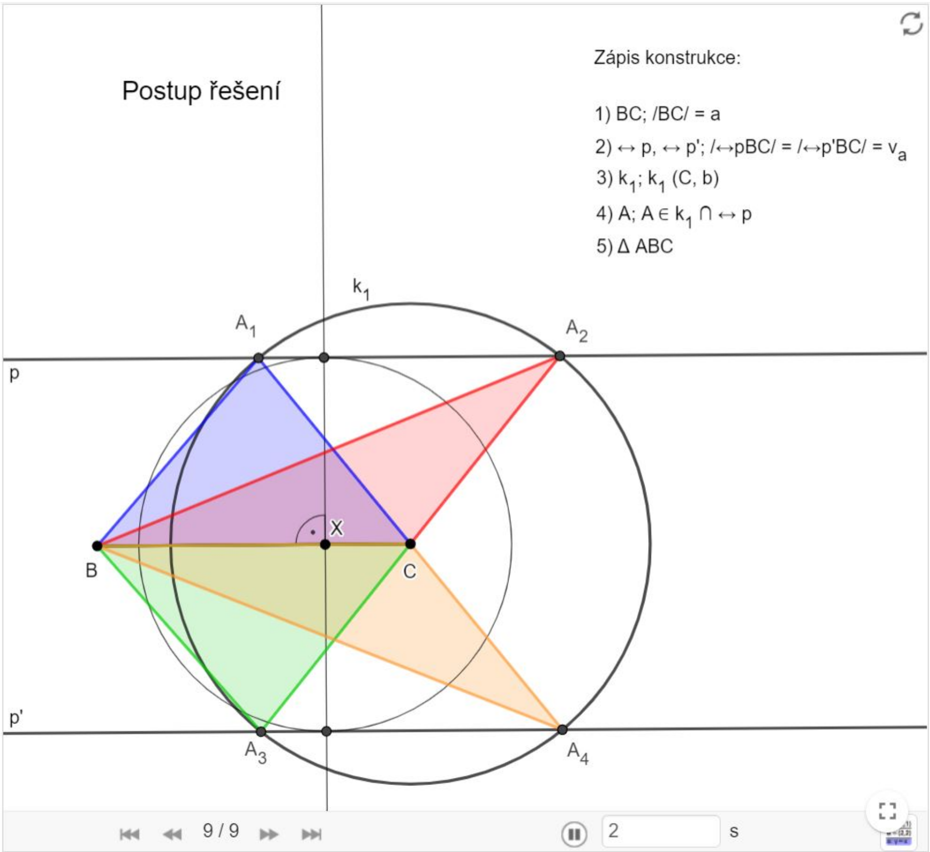
Konstrukce "krok po kroku":
https://www.geogebra.org/m/u7e5f3qn#material/rssprtnv

Příklad 4.24. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: γ, v_a, v_b.



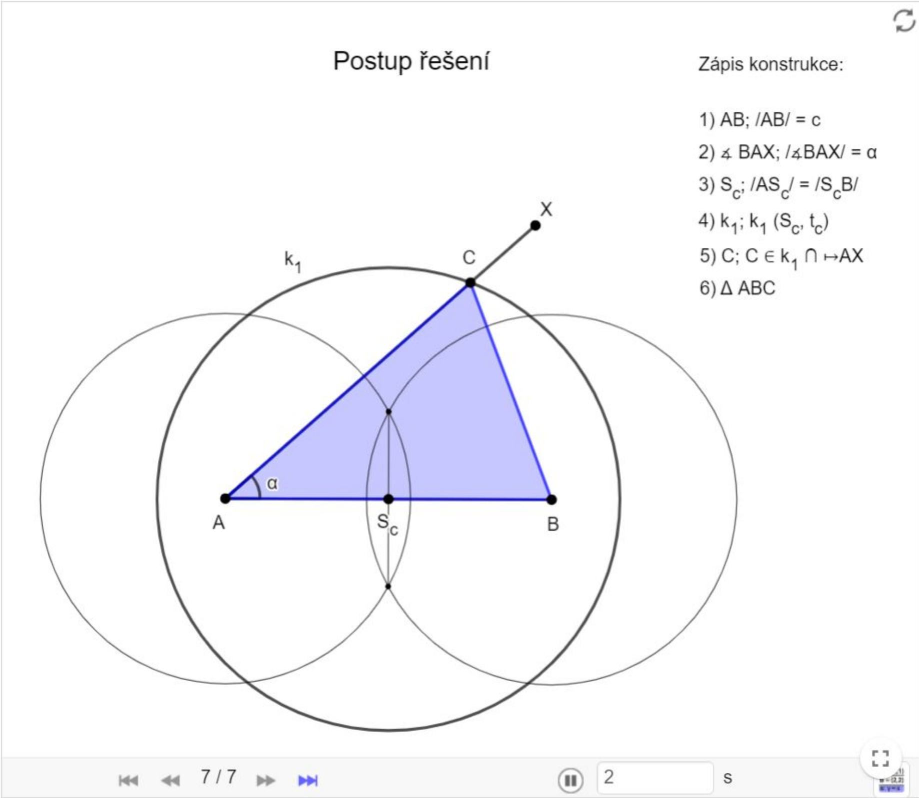
Konstrukce "krok po kroku":
`https://www.geogebra.org/m/u7e5f3qn#material/sn3wvaed`

Příklad 4.25. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: a, v_a, b.



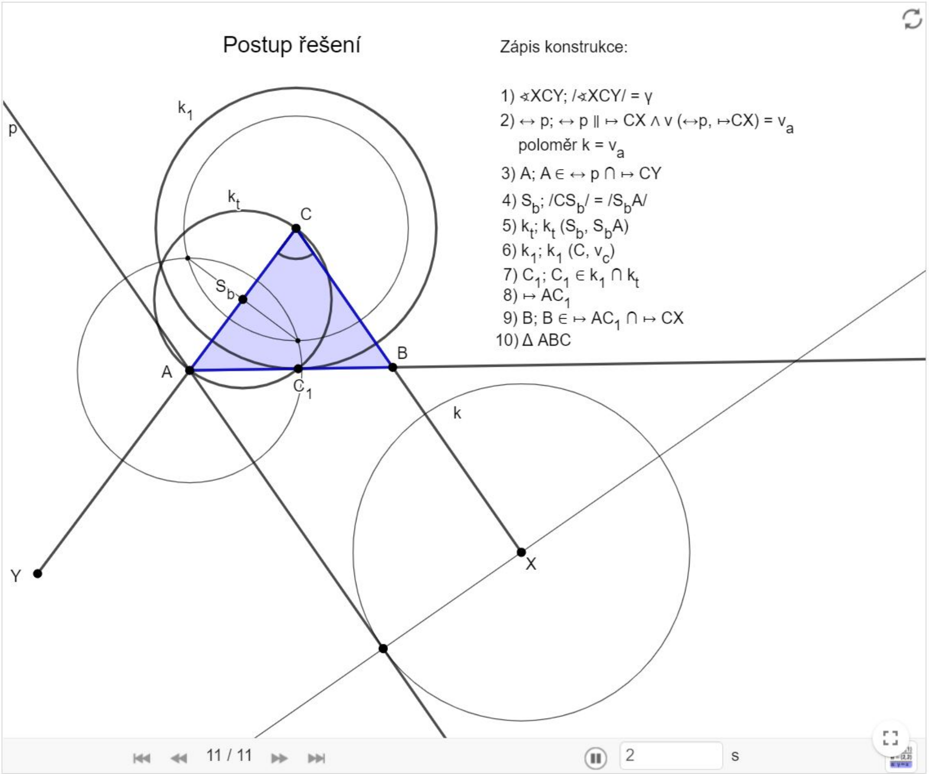
Konstrukce "krok po kroku":
`https://www.geogebra.org/m/u7e5f3qn#material/ntwfvxns`

Příklad 4.26. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: α, c, t_c.



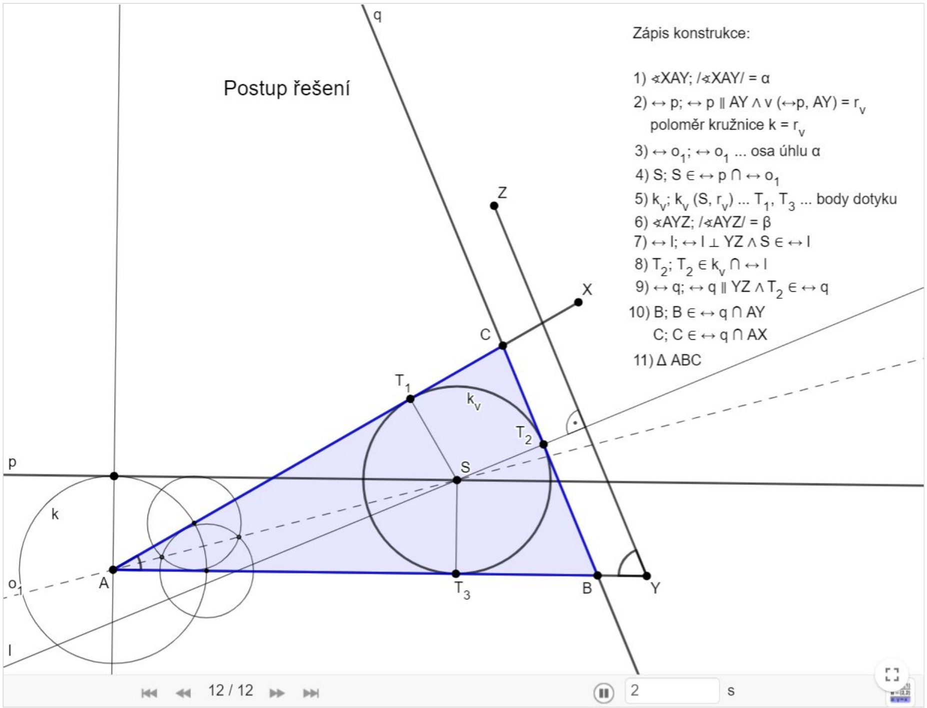
Konstrukce "krok po kroku":
`https://www.geogebra.org/m/u7e5f3qn#material/trhbazkf`

Příklad 4.27. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: γ, v_a, v_c.



Konstrukce "krok po kroku":
`https://www.geogebra.org/m/u7e5f3qn#material/njnjbvh9`

Příklad 4.28. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno: α, β, r_v, kde r_v je poloměr kružnice trojúhelníku vepsané.



Konstrukce "krok po kroku":
https://www.geogebra.org/m/u7e5f3qn#material/w547a5au

Cvičení 4.29. Sestrojte trojúhelník ABC je-li dáno:

a) $a+b, \gamma, v_a$	b) $a-b, \gamma, c$	c) $a+b+c, \alpha, \beta$
d) $a, b, \alpha-\beta$	e) $a+b+c, \alpha, v_c$	

Cvičení 4.30. Je dána úsečka AB.

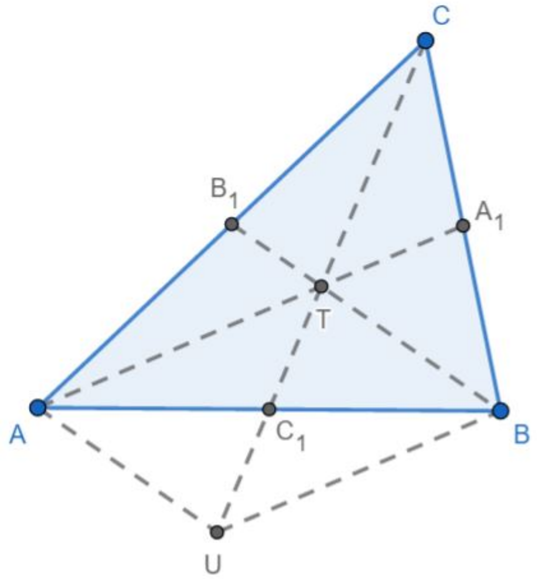
a) Sestrojte množinu všech vrcholů konvexního úhlu $\sphericalangle ACB = \gamma$, jehož ramena procházejí krajními body úsečky AB.

b) Sestrojte $\triangle ABC$, je-li $|AB| = 6$, $\gamma = 60°$, $v_C = 4$.

Cvičení 4.31. Sestrojte trojúhelník ABC je-li dáno t_a, t_b, t_c.

Příklad 4.32. Dokažte větu o těžnicích trojúhelníku:
Těžnice libovolného trojúhelníku se protínají v jednom bodě, zvaném těžiště trojúhelníku. Těžiště dělí každou těžnici na dvě úsečky, z nichž ta, která obsahuje vrchol trojúhelníka, je dvojnásobkem druhé.

Důkaz: Je dán trojúhelník ABC, body A_1, B_1, C_1 jsou po řadě středy jeho stran BC, AC a AB, úsečky AA_1, BB_1 a CC_1 jsou jeho těžnice. V daném trojúhelníku uvažujeme těžnice AA_1 a BB_1, které se protínají v bodě T. Dokážeme, že bodem T prochází i třetí těžnice CC_1.



Sestrojme přímku CT a na ní bod U tak, že bod T je střed úsečky CU, tj. $CT \cong TU$. V trojúhelníku AUC je úsečka B_1T střední příčka, a proto $B_1T \parallel AU$. Protože body B_1, T, B leží na jedné přímce, je i $BT \parallel AU$. Analogicky v trojúhelníku BUC je úsečka A_1T střední příčka, a proto $A_1T \parallel BU$, a tedy i $AT \parallel BU$. Odtud plyne, že čtyřúhelník $ATBU$ má každé dvě protější strany rovnoběžné, tj. je to rovnoběžník a jeho uhlopříčky AB a TU se půlí. Odtud plyne, že střed strany AB, bod C_1, leží na přímce CT. Tím je dokázáno, že těžnice CC_1 prochází bodem T. Platí tedy, že těžnice trojúhelníku ABC se protínají v jednom bodě. Tento bod náleží vždy vnitřku daného trojúhelníku.

Z vlastností středních příček B_1T a A_1T trojúhelníků AUC a BUC a z vlastností rovnoběžníku $AUBT$ dále plyne:

pro trojúhelník AUC: $B_1T = \frac{1}{2}AU$, $AU \cong BT$, tj. $B_1T = \frac{1}{2}BT$,

pro trojúhelník BUC: $A_1T = \frac{1}{2}BU$, $BU \cong AT$, tj. $A_1T = \frac{1}{2}AT$.

Tím je dokázáno, že těžiště T dělí každou z těžnic AA_1, BB_1 na dvě části, z nichž ta, která obsahuje vrchol trojúhelníku je dvojnásobkem druhé. Opakováním úvah při volbě jiné dvojice těžnic získáme další vztahy, z nichž plyne pravdivost tvrzení druhé části věty.

Cvičení 4.33. Dokažte, že dva trojúhelníky jsou shodné, když se shodují ve dvou stranách a v těžnici k jedné z nich.

Návod: Shodnost trojúhelníků dokažte užitím trojúhelníků, které vzniknou rozdělením daného trojúhelníku těžnicí.

Cvičení 4.34. Nad stranami ostroúhlého trojúhelníku ABC jsou vně sestrojeny rovnostranné trojúhelníky ABH a ACK. Dokažte shodnost úseček CH a BK.

Návod: Tvrzení plyne ze shodnosti trojúhelníků ACH a AKB.

Cvičení 4.35. Je dán trojúhelník ABC. Jeho vrcholy jsou vedeny rovnoběžky s protilehlými stranami. Dokažte, že průsečíky těchto přímek určí trojúhelník, který je sjednocením čtyř trojúhelníků shodných s trojúhelníkem ABC.

Návod: Použijte věty o shodnosti trojúhelníků a vlastnosti dvojic úhlů mezi rovnoběžnými přímkami.

Cvičení 4.36. Největší strana konvexního čtyřúhelníka $ABCD$ je AB, nejmenší CD. Dokažte, že $\sphericalangle ABC < \sphericalangle ADC$.

Návod: Uhlopříčka BD rozdělí čtyřúhelník $ABCD$ na dva trojúhelníky. Z předpokladu plynou nerovnosti, jejichž sečtením obdržíme tvrzení.

Cvičení 4.37. Na uhlopříčce AC čtverce $ABCD$ je dán bod E tak, že $AE \cong AB$. Kolmice na přímku AC vedená bodem E protne stranu BC v bodě F. Dokažte, že $BF \cong EF \cong EC$.

Návod: Dokažte, že trojúhelník ECF je rovnoramenný a trojúhelník AFE je shodný s trojúhelníkem AFB.

Příklad 4.38. Na obrázku je sedm různých čtyřúhelníků. Přiřaďte je k jejich názvům a poté k nim doplňte jejich vlastnosti (některé vlastnosti mohou patřit i k více než jednomu čtyřúhelníku):
čtverec, obdélník, kosočtverec, (obecný) rovnoběžník, nekonvexní čtyřúhelník, deltoid, lichobežník.

a) Protější strany jsou vždy shodné.

b) Minimálně dva vnitřní úhly jsou vždy pravé.

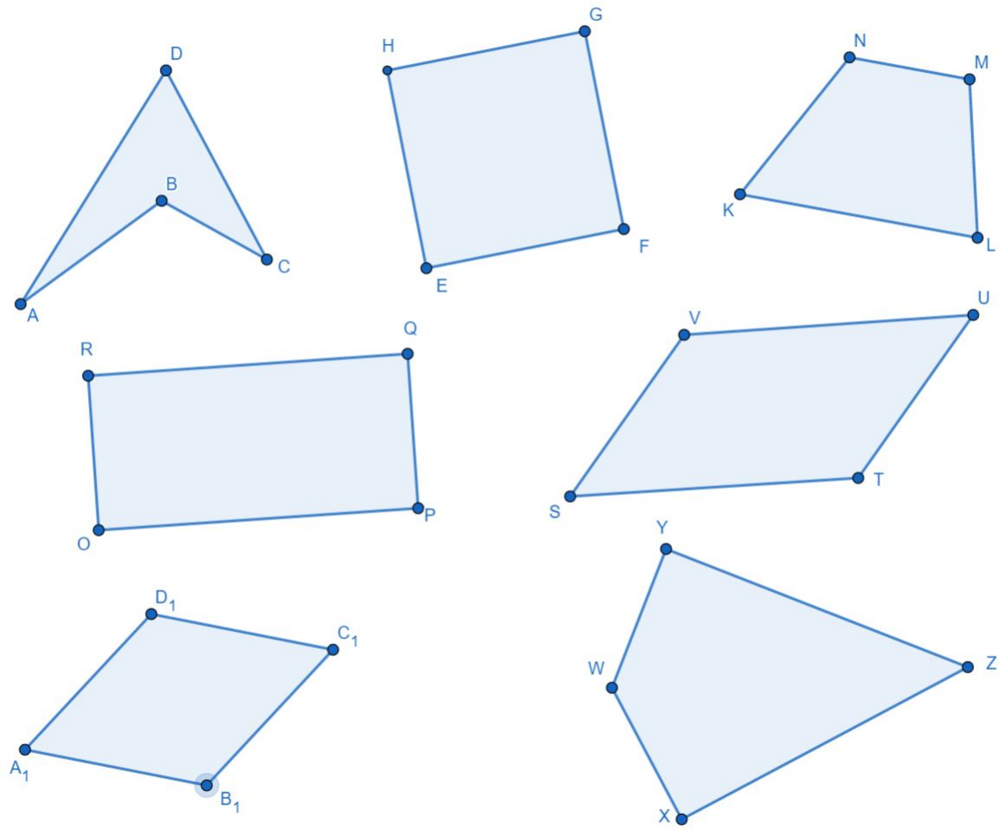
c) Uhlopříčky se půlí.

d) Uhlopříčky jsou shodné.

e) Lze mu opsat kružnici.

f) Lze mi vepsat kružnici.

g) Právě jedna dvojice stran jsou rovnoběžné úsečky.

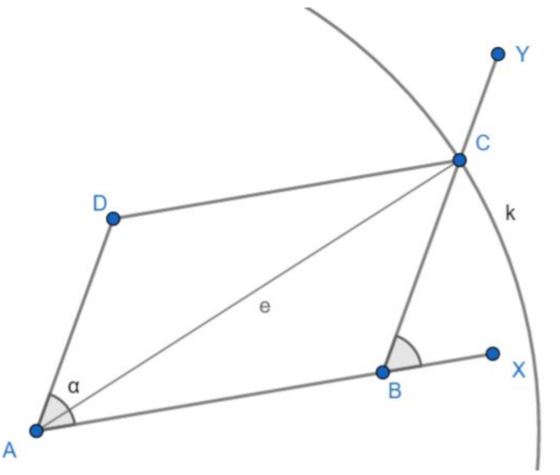


Řešení:

- čtverec $EFGH$, a), b), c), d), e), f),
- obdélník $OPQR$, a), b), c), d), e),
- kosočtverec $A_1B_1C_1D_1$, a), c), f),
- (obecný) rovnoběžník $STUV$, a), c),
- nekonvexní čtyřúhelník $ABCD$,
- deltoid $XZYW$, b), e), f),
- lichobežník $KLMN$, g).

Příklad 4.39. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, je-li dána strana a, úhel DAC, $|\sphericalangle DAC| = \alpha$ a velikost uhlopříčky $e = |AC|$.

Řešení: Zvolíme úsečku AB, $|AB| = a$. Bod C leží ve vzdálenosti e od bodu A, tj. na kružnici $k(A, e)$. Dále platí, že polopřímka BC svírá se stranou AB také úhel α. Pro bod D platí $CD \parallel AB$ a $AD \parallel BC$.



Postup konstrukce:

1. AB, $|AB| = a$
2. k, $k(A, e)$
3. X, $X \in \mapsto AB$
4. $\sphericalangle XBY$, $|\sphericalangle XBY| = \alpha$

5. C, $C \in k \cap \mapsto BY$

6. D, $CD \parallel AB \wedge AD \parallel BC$

7. rovnoběžník $ABCD$

Závěr: Úloha má jedno řešení v dané polorovině.

Cvičení 4.40. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, jsou-li dány velikosti jeho úhlopříček e, f a velikost výšky v_a.

Cvičení 4.41. Sestrojte rovnoběžník $PQRS$, je-li dána jeho úhlopříčka PR, velikost úhlu RPQ a vzdálenost rovnoběřných stran PQ a RS.

Cvičení 4.42. Sestrojte kosočtverec $ABCD$, je-li dáno $e = |AC|$ a velikost úhlu DAB je α.

Cvičení 4.43. Sestrojte obdélník $KLMN$, je-li dáno $|KL| = 6$ a velikost úhlu KSL je $120°$, kde S je průsečík uhlopříček.

Cvičení 4.44. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jsou-li dány velikosti všech jeho stran a, b, c, d.

Cvičení 4.45. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, $AB \parallel CD$, jsou-li dány velikosti úhlopříček e, f, velikost úhlu $DAB = \alpha$ a velikost úhlu $AEB = \omega$, kde E je průsečík úhlopříček.

Cvičení 4.46. Sestrojte různoběžník $ABCD$, je-li dáno: velikost strany AB, velikost strany BC, velikosti obou úhlopříček AC, BD a velikost úhlu $AEB = \omega$, kde E je průsečík úhlopříček.

Cvičení 4.47. Čtyřúhelník, jemuž lze opsat i vepsat kružnici, tj. čtyřúhelník, který je současně tětivový i tečnový *dvojstředový*. Dovedete určit alespoň jeden dvojstředový čtyřúhelník, který není čtvercem?

Cvičení 4.48. Sestrojte kružnici k, je-li dána její tečna t s bodem dotyku T a další tečna q.

Cvičení 4.49. Sestrojte kružnici k, která se dotýká dané kružnice m v daném bodě T a

a) má střed na dané přímce p,

b) prochází daným bodem M,

c) dotýká se dané přímky q.

Cvičení 4.50. Je dána kružnice k a mimo ni dva různé body K, L. Sestrojte kosočtverec $KLMN$ tak, aby jeden jeho vrchol ležel na kružnici k.

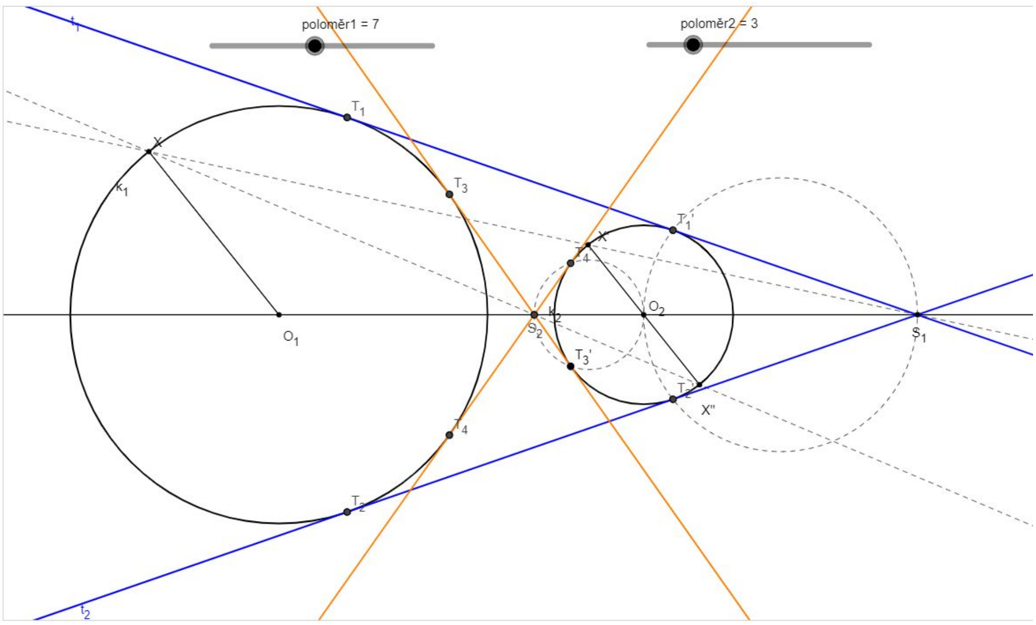
Cvičení 4.51. Sestrojte kružnici, která prochází daným bodem A a dotýká se dané přímky t v bodě T.

Cvičení 4.52. Sestrojte kružnici, která má střed na dané kružnici m a dotýká se dvou daných

- rovnoběžných přímek a, b,
- různoběžných přímek c, d.

Příklad 4.53. Jsou dány dvě různé kružnice $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$. Sestrojte společné tečny těchto dvou kružnic.

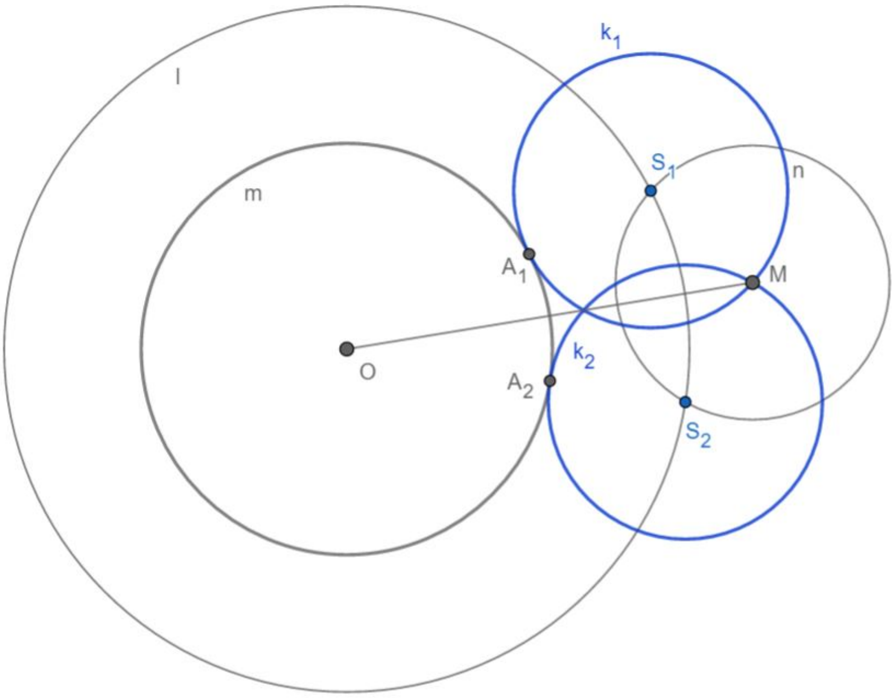
Řešení:



Možnost dynamicky měnit poloměry kružnic na obrázku:
`https://www.geogebra.org/m/GTefJvRH`

Příklad 4.54. Sestrojte kružnici, o poloměru $r = 2$ cm, která se vně dotýká dané kružnice $m(O, 3\,\text{cm})$ a prochází daným bodem M, $|SM| = 6$ cm.

Řešení: Sestrojíme kružnici m, $m(O, 3\,\text{cm})$ a bod M, $|SM| = 6$ cm. Střed S hledané kružnice k leží ve vzdálenosti $2\,\text{cm}$ od bodu M, tj. na kružnici $n(M, 2\,\text{cm})$. Dále platí, že také vzdálenost středu S od bodů dotyku, např. A, hledané kružnice k s danou kružnicí m je 2cm. Množina všech takových bodů bude na kružnici s poloměrem o 2cm větším než je poloměr dané kružnice m, tj. např. na kružnici $l(O, 5\,\text{cm})$. Hledaný střed S leží v průsečíku kružnice n a l.



Postup konstrukce:

1. m, $m(O, 3\,\text{cm})$; M, $|SM| = 6$ cm
2. n, $n(M, 2\,\text{cm})$
3. l, $l(O, 5\,\text{cm})$
4. S, $S \in n \cap l$
5. k, $k(S, 2\,\text{cm})$

Závěr: Úloha má dvě řešení v rovině.

Cvičení 4.55. Sestrojte kružnici, která se dotýká dvou soustředných kružnic k_1, k_2 a prochází bodem P, který je vnitřním bodem mezikruží určeného kružnicemi k_1, k_2.

Cvičení 4.56. Jsou dány dvě soustředné kružnice $k_1(S, r_1)$, $k_2(S, r_2)$. Vyšetřete množinu středů všech kružnic, které se dotýkají kružnic k_1, k_2.

Cvičení 4.57. Vyšetřete množinu středů všech kružnic, které

a) mají daný poloměr r a procházejí dvěma různými body A,B;

b) mají daný poloměr r a dotýkají se dané přímky p;

c) se dotýkají dvou daných rovnoběžek a, b;

d) se dotýkají dvou daných různoběžek a, b;

e) se dotýkají dané přímky p v daném bodě A;

f) se dotýkají dané kružnice k v daném bodě A;

g) mají daný poloměr r a mají s danou kružnicí $k(S, r_1)$ vnější dotyk.

Modelujte tyto úlohy v programu GeoGebra.

Cvičení 4.58. Je dána kružnice $k(S, r)$ a na ní bod A. Vyšetřete množinu středů všech tětiv kružnice k, které procházejí bodem A. Modelujte úlohu v programu GeoGebra.

Cvičení 4.59. Je dána kružnice $k(S, r)$ a na ní bod N, který náleží vnější oblasti této kružnice. Vyšetřete množinu středů všech tětiv kružnice k, které leží na sečnách procházejících bodem N.
Modelujte úlohu v programu GeoGebra.

Cvičení 4.60. Sestrojte pravidelný

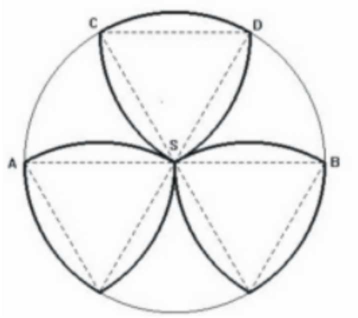
a) osmiúhelník,

b) dvanáctiúhelník,

c) šestnáctiúhelník.

Modelujte úlohu v programu GeoGebra

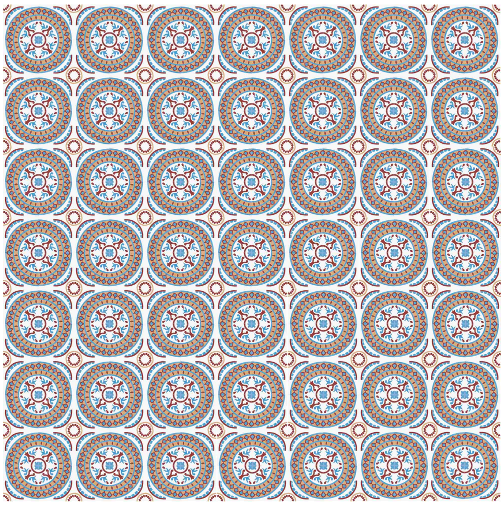
Příklad 4.61. Sestrojte síť křivek, podle které bylo vytvořeno gotické okno.

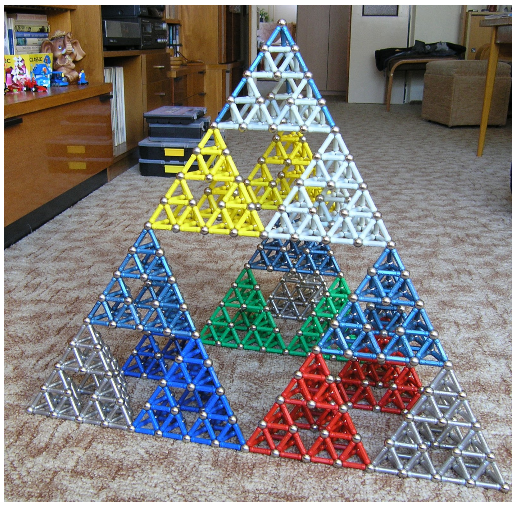


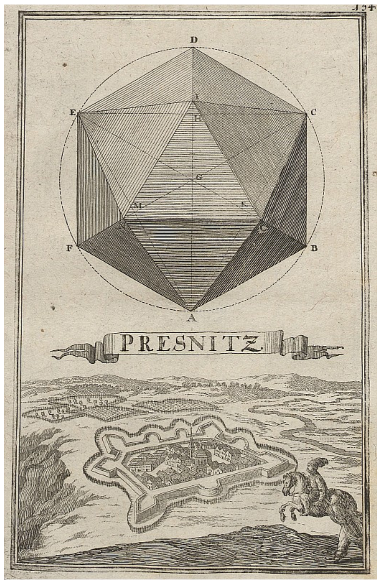
Přílohy

Obrázky ke cvičení 1.1

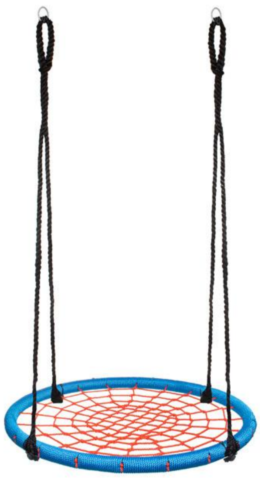
4	9	2
3	5	7
8	1	6

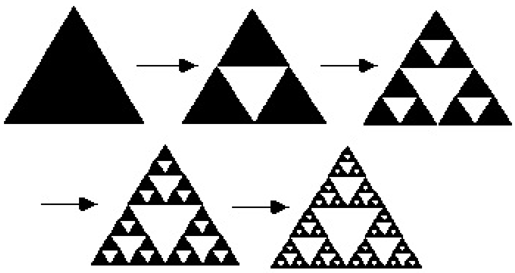


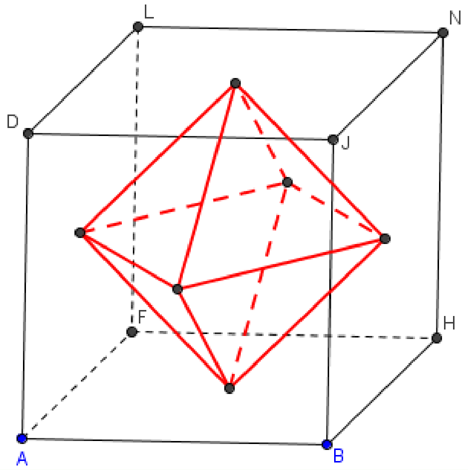


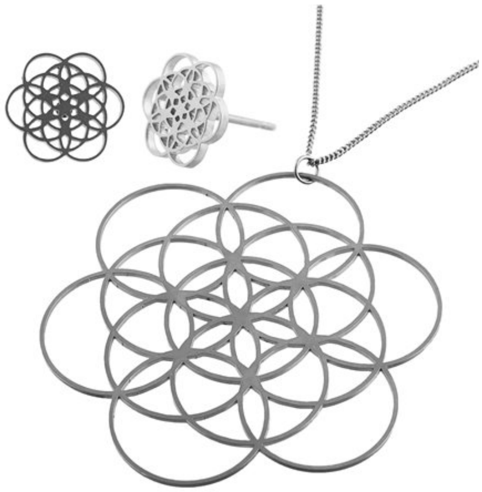


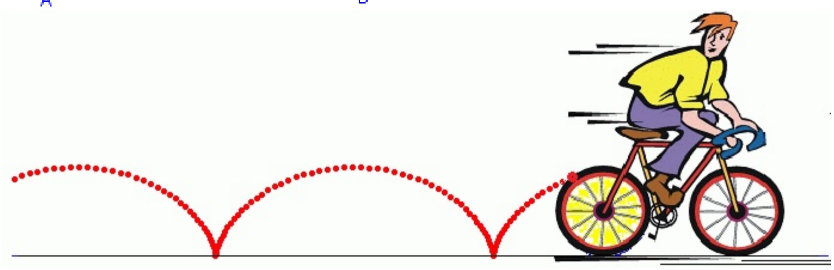
PRESNITZ





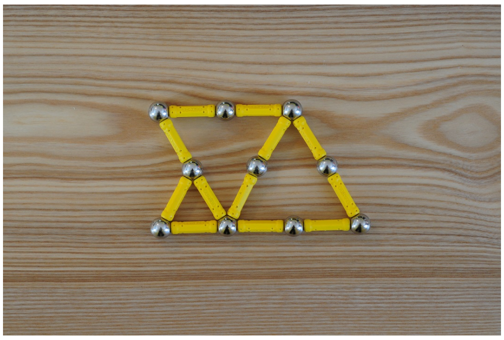

L
N
D
J
F
H
A
B



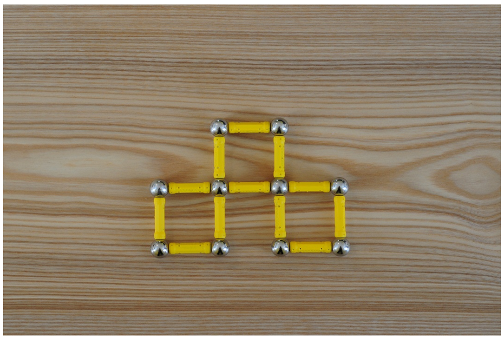


Řešení hlavolamů z příkladu 3.13

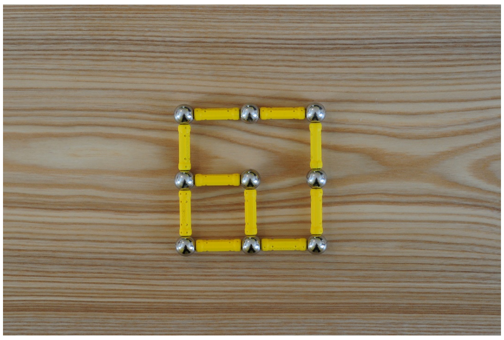
A)



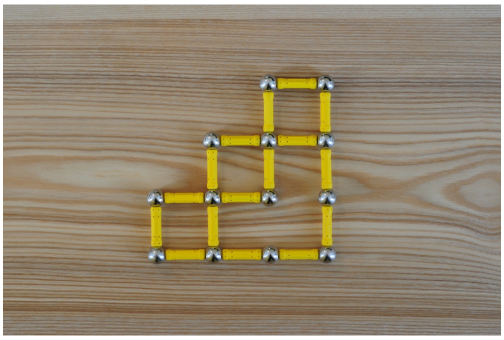
B)



C)



D)



Contents

References

[1] Francová, M., Lvovská, L., *Texty k základům elementární geometrie pro studium učitelství 1. stupně základní školy*, skriptum PedF MU, Brno 2014.

[2] Francová, M., Matoušková, K., Vaňurová, M. *Texty k základům elementární geometrie pro studium učitelství 1. stupně základní školy*, skriptum UJEP, Brno 1985.

[3] Francová, M., Matoušková, K., Vaňurová, M. *Sbírka úloh z elementární geometrie*, skriptum MU, Brno 1996.

[4] Lomtatidze, L. *Historický vývoj pojmu křivka*, Scintilla Svazek 3, Brno 2007

[5] Vopěnka, P. *Rozpravy s geometrií*, Academia, Praha 1989

[6] Struik, D. J. *Dějiny matematiky*, Praha 1963. (z angl. originálu *A concise History of Mathematics*, G. Bell and Sons Ltd., London 1956, přeložili Nový, L. - Folta, J.)

[7] Katz, V. J. *A history of mathematics: an introduction*, Addison-Wesley Educational Publishers, Inc., 2. vydání, 1998.

[8] Servít, F. *Eukleidovy Základy (Elementa).* Nákladem Jednoty českých matematiků a fyziků, Praha, 1907.

[9] Bečvářová M., *Eukleidovy Základy, jejich vydání a překlady* Dějiny matematiky, svazek 20. Prometheus, Praha, 2001.

[10] Citáty na téma geometrie, https://citaty.net/temata/geometrie/