**Ekvivalence množin, konečné a nekonečné množiny**

*Definice 1:* Říkáme, že dvě množiny A, B jsou **ekvivalentní** právě tehdy, když existuje prosté zobrazení množiny A na množinu B. Zapisujeme A ~ B.

*Příklad 1.* Jsou dány množiny A = {a, b, c}, B = {x, y, z}, C = {x, y}. Rozhodněte, které dvojice zadaných množin jsou ekvivalentní.

*Poznámka.* Relace ~ dvou množin definovaná v libovolném systému množin M má vlastnosti: reflexivní, symetrická, tranzitivní. Relace ~ je tedy relací ekvivalence. Relace ekvivalence dvou množin v libovolném systému množin M vytváří rozklad systému M na třídy ekvivalentních množin.

*Příklad 2.* Je dán systém množin M = {A, B, C, D, E, F, G, H}, kde A = {a, b, c}, B = {1, 2}, C = {x, y}, D = {○, ○, ○, ○}, E = {∆, ∆, ∆}, F = { \*, \*}, G = { □ }, H = {☺, ☺, ☺, ☺}. Rozhodněte, které množiny ze systému M jsou ekvivalentní.

*Definice 2:* Množina A je **konečná** právě tehdy, když žádná vlastní podmnožina množiny A není ekvivalentní s množinou A.

*Definice 3:* Množina B je **nekonečná** právě tehdy, když existuje alespoň jedna vlastní podmnožina množiny B, která je ekvivalentní s množinou B.

*Poznámka.* Množina M je **vlastní podmnožinou** množiny N právě tehdy, když

M  N  M ≠ N.

**KARDINÁLNÍ ČÍSLA**

*Definice 4:* Třídu, do které patří množina **A** z neprázdného systému množin Ma všechny množiny z tohoto systému, které jsou s množinou **A** ekvivalentní, nazveme **kardinální číslo množiny A**. Kardinální číslo množiny **A** budeme značit: |**A**|

*Poznámka:*Pro kardinální číslo množiny se užívá také pojmu mohutnost množiny.

*Příklad 3.* Je dán systém množin M = {A, B, C, D, E, F, G, H} z *Příkladu 2* výše. Určete kardinální čísla množin ze systému M.

*Řešení:* V *Příkladu 2* relace ekvivalence množin rozložila zadaný systém množin na následující třídy:

T1 = {A, E}, T2 = {B, C, F}, T3 = {D, H}, T4 = {G}.

Třída T1 je kardinálním číslem každé z množin A, E. Můžeme psát T1 = |A| = |E|.

K označení třídy, tj. kardinálního čísla, si můžeme vybrat kteroukoli z množin patřících do této třídy. Každá z těchto množin dané kardinální číslo (danou třídu rozkladu) reprezentuje.

Třída T2 je kardinálním číslem množin B, C, F, tedy T2 = |B| = |C| = |F|. Dále T3 = |D| = |H|, T4 = |G|.

**Důležité:** Pro každé dvě množiny X, Y platí: Kardinální čísla množin X, Y se rovnají, právě když jsou množiny X, Y ekvivalentní. **|X| = |Y|  X ~ Y**

*Definice 4:* Kardinální čísla konečných množin nazveme **přirozenými čísly**.

*Poznámka:* Kardinální číslo množiny L tedy nazveme „pět“ a označíme |L| = 5.

Z uvedených příkladů je zřejmé, že kardinální číslo konečné množiny vyjadřuje společnou vlastnost této množiny a všech množin, které mají stejně prvků jako tato množina, tj. jsou stejně početné.

**Porovnávání kardinálních čísel**

*Definice 5:* Jestliže |A|  |B| a množina A je ekvivalentní s vlastní podmnožinou množiny B, říkáme, že kardinální číslo množiny A **je menší** **než** kardinální číslo množiny B, píšeme **|A| |B|.**

*Poznámka:* Z této definice vycházíme při porovnávání přirozených čísel.

*Příklad 4:* Uvažujme systém množin M = {A, B, C, D, E, F, G, H} z minulého příkladu:

Platí např. |A| |D|, protože |A|  |D| a A je ekvivalentní např. s množinou D\*= {○, ○, ○}, což je vlastní podmnožina množiny D.

|A| |D|, protože |D|  |A| a A ~ D\*, D\* D, D\*≠ D, kde D\* = {○, ○, ○}.

**Sčítání kardinálních čísel**

V dalším textu budeme pracovat se systémem množin *M*, který obsahuje prázdnou množinu, jednoprvkovou množinu, s každými dvěma množinami A, B i jejich sjednoceni AB a jejich kartézský součin A×B a také s každými dvěma množinami A,B i množinu B\*, která je s množinou B ekvivalentní (B ~ B\*) a s množinou A disjunktní (AB = Ø)

*Definice 6:* Jestliže pro množiny A, B ze systému množin M platí A B = Ø, pak **součtem kardinálních čísel** **|A|, |B|** rozumíme kardinální číslo sjednocení množin A, B, tj. |**A| + |B| = |AB|**.

*Příklad 5:* Vypočtěte součet kardinálních čísel množin A, B, kde

1. A = {a, b, c}, B = {1, 2}, b) množin A, B, kde A = {a, b, c}, B = {a, x}.

*Řešení:*

1. A B = Ø, tedy |A| + |B| = |AB|, tj. |A| + |B| = |{a, b, c, 1, 2}|

Srovnejte: |A| = 3, |B| = 2, 3 + 2 = 5 = |AB|.

1. A B  Ø, množiny A, B mají společný prvek. K určení součtu kardinálních čísel si tedy musíme zvolit jiného reprezentanta jednoho z kardinálních čísel, např. místo množiny B zvolíme jinou množinu, která je s ní ekvivalentní (tedy také má stejné kardinální číslo s B) a která je současně s tou druhou množinou (tedy s A) disjunktní (nemá s ní společné prvky):

Např. zvolíme C = . Platí C ~ B a AC = Ø.

Pak |A| + |B| = |A| + |C| = |AC| , tj.

|| + || = || + || = | | = || .

Srovnejte: |A| = 3, |B| = |C| = 2, 3 + 2 = 5 = |AC|.

**Násobení kardinálních čísel**

*Definice 7:* **Součinem kardinálních čísel** **|A|, |B|** rozumíme kardinální číslo kartézského součinu množin A, B, tj. |**A| ∙ |B| = |AB|** .

*Příklad 6:* Vypočtěte součet kardinálních čísel množin A, B, kde A = {a, b, c}, B = {a, x}.

*Řešení:*

|A| ∙ |B| = |AB|, tj. |A| · |B| = |{[a,a], [a,x], [b,a], [b,x],[c,a], [c,x]}|

Srovnejte: |A| = 3, |B| = 2, 3 · 2 = 6 = |AB| .