Opakování - relace

Příklad 1. Jsou dány množiny $A = \{1, 2\}$ a $B = \{1, -2\}$. Určete kartézský součin $A \times A$, $A \times B$, $B \times A$ a zakreslete jeho kartézský graf

Příklad 2. V množině $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ jsou definovány binární relace

$$R = \{[x, y] \in A \times A; y = 2x - 4\},$$
$$S = \{[x, y] \in A \times A; x^2 < y\},$$
$$T = \{[x, y] \in A \times A; x + y < 5\}.$$

Zapište tyto relace výčtem prvků. Vytvořte relace R^{-1}, S^{-1}, T^{-1}, $S \cap T$, $R \cap T^{-1}$, $S \cup R$ a zapište je výčtem prvků. Zapište symtolicky relace R', S', T', $R \cap T'$.

Příklad 3. V množině $M = \{1, 2, 3\}$ je definována binární relace

a) $R_1 = \{[x, y] \in M \times M; x < 3 \Rightarrow x + y = 3\}$,
b) $R_2 = \{[x, y] \in M \times M; x \neq y \Rightarrow x = y\}$,
c) $R_3 = \{[x, y] \in M \times M; x \neq y \Rightarrow x + y = 3\}$,
d) $R_4 = \{[x, y] \in M \times M; x < y \Leftrightarrow x = y\}$,
e) $R_5 = \{[x, y] \in M \times M; x = 2 \ \vee \ y > x + 2\}$,
f) $R_6 = \{[x, y] \in M \times M; x < y \ \wedge \ x|y\}$.

Zapište tyto relace výčtem prvků, určete jejich kartézské a uzlové grafy, určete jejich vlastnosti.

Příklad 4. Je dána množina $A = \{a, b, c, d\}$. Určete některý z jejích rozkladů, který má 2 třídy. Zapište výčtem prvků relaci ekvivalence R, která je tímto rozkladem určena. Sestrojte uzlový graf relace R. Jaké má relace R další vlastnosti?

Příklad 5. Určete vlastnosti binárních relací daných v množině všech žijících lidí následujícími výrokovými formami:

a) „x je starší než y“,
b) „x se narodil v týž den jako y“,
c) „x je bratrem y“,

d) „x je synem y“,

e) „x bydlí ve stejném městě jako y“.

Příklad 6. Určete vlastnosti binárních relací definovaných v množině všech přímek roviny ρ:

a) $R_1 = \{[x, y] \in \rho; x \parallel y\}$,

b) $R_2 = \{[x, y] \in \rho; x \perp y\}$,

c) $R_1 = \{[x, y] \in \rho; x, y \text{ mají společný alespoň jeden bod}\}$.

Příklad 6. Určete vlastnosti binárních relací definovaných v množině trojúhelníků roviny ρ:

a) $R_1 = \{[x, y] \in \rho; x \text{ je shodný s } y\}$,

b) $R_2 = \{[x, y] \in \rho; x \text{ má stejný obsah jako } y\}$.

Příklad 7. Určete vlastnosti relace dané následujícími výrokovými formami v množině všech podmnožin libovolné neprázdné množiny.

a) „množina X je podmnožinou množiny Y“,

b) „množina X se rovná množině Y“,

c) „množina X se nerovná množině Y“.

Příklad 8. V množině $A = \{a, b\}$ určete všechny neprázdné binární relace, které jsou

a) antireflexivní,

b) symetrické,

c) antireflexivní a symetrické.

Příklad 9. V množině $A = \{a, b, c, d\}$ utvořte alespoň jednu binární relaci, která je tranzitivní, přitom však není reflexivní ani symetrická.

Příklad 10. Je dána množina A pěti chlapců: Filip, Pavel, Tomáš, Adam, David. Určete výčtem prvků libovolnou binární relaci danou výrokovou formou

$$R = \{[x, y] \in A \times A; x \text{ se kamarádí s } y\}.$$

Rozhodněte o vlastnostech relace R.

Opakování - zobrazení

Příklad 1. Jsou dány množiny Jsou dány množiny $A = \{x, y, z\}$, $B = \{a, b\}$. Rozhodněte, zda dané relace z množiny A do množiny B jsou zobrazení, případně určete definiční obor a obor hodnot zobrazení.

a) $R_1 = \{[x, a], [y, b], [z, a], [z, b]\}$,

b) $R_2 = \{[x, a], [z, b]\}$,

c) $R_3 = \{[x, a], [y, a], [z, a]\}$.

Příklad 2. Jsou dány množiny $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b, c, d\}$. Rozhodněte, o jaký typ zobrazení se jedná a zda je toto zobrazení prosté:

a) $R_1 = \{[1, a], [2, c], [3, d]\}$,

b) $R_2 = \{[1, a], [2, c], [3, d], [4, a]\}$,

c) $R_3 = \{[2, a], [1, c], [3, b], [4, d]\}$.

Příklad 3. Jsou dány množiny $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $B = \{1, 2, a, b\}$. Určete výčtem prvků jednu binární relaci

1. R_1, která není zobrazením,
2. R_2, která je zobrazením z množiny A do množiny B,
3. R_3, která je zobrazením množiny A do množiny B,
4. R_4, která je zobrazením množiny A na množinu B,
5. R_5, která je zobrazením z množiny A na množinu B.

Příklad 4. Jsou dány množiny $A = \{1, 2, 3, 4\}$ a $B = \{a, b\}$. Určete výčtem prvků jednu binární relaci, která

1. je zobrazením z množiny A do množiny B, které je prosté,
2. je zobrazením z množiny A na množinu B, které je prosté,
3. je zobrazením z množiny A na množinu B, které není prosté,
4. je zobrazením z množiny A do množiny B, které není prosté,
5. je zobrazením množiny A do množiny B, které je prosté.

Příklad 5. Jsou dány množiny $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y, z\}$, $C = \{x, y\}$. Rozhodněte, které dvojice zadaných množin jsou ekvivalentní.

Příklad 6. Je dán systém množin $\mathbb{M} = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$, kde $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{x, y\}$, $D = \{\circ, \circ, \circ, \circ\}$, $E = \{\triangle, \triangle, \triangle\}$, $F = \{\star, \star\}$, $G = \{\heartsuit\}$, $H = \{\spadesuit, \spadesuit, \spadesuit, \spadesuit\}$. Rozhodněte, které množiny ze systému $\mathbb{M}$ jsou ekvivalentní.

Opakování - binární operace a algebraické struktury

Příklad 1. Určete typ algebraické struktury s jednou operací $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Q}, \cdot)$.

Příklad 2. Určete typ algebraické struktury se dvěma operacemi $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Poznámka: Je dána algebraická struktura $(M, \oplus, \odot)$ se dvěma operacemi. Přehled algebraických struktur se dvěma operacemi je uveden v tabulkce níže:

	operace s vlastností	**název algebraické struktury**
$(M, \oplus, \odot)$	$\oplus : \mathcal{ND} \wedge \mathcal{K} \wedge \mathcal{A}$ $\odot : \mathcal{ND} \wedge (\mathcal{K}) \wedge \mathcal{A}$ $\odot D \oplus$	**polookruh (komutativní)**
$(M, \oplus, \odot)$	$\oplus : \mathcal{ND} \wedge \mathcal{K} \wedge \mathcal{A} \wedge \mathcal{EN} \wedge \mathcal{EI}$ $\odot : \mathcal{ND} \wedge (\mathcal{K}) \wedge \mathcal{A}$ $\odot D \oplus$	**okruh (komutativní)**
$(M, \oplus, \odot)$	$\oplus : \mathcal{ND} \wedge \mathcal{K} \wedge \mathcal{A} \wedge \mathcal{EN} \wedge \mathcal{EI}$ $\odot : \mathcal{ND} \wedge \mathcal{K} \wedge \mathcal{A}$ $\odot D \oplus$ Neexistují $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a, b \in M$, kde $a \odot b = 0$	**komutativní okruh bez dělitelů nuly = obor integrity**
$(M, \oplus, \odot)$	$\oplus : \mathcal{ND} \wedge \mathcal{K} \wedge \mathcal{A} \wedge \mathcal{EN} \wedge \mathcal{EI}$ $\odot : \mathcal{ND} \wedge (\mathcal{K}) \wedge \mathcal{A}$ $\odot D \oplus$ $(M - \{0\}, \odot)$ je grupa	**těleso (komutativní)**

Číselné soustavy

Příklad 1. Trojciferné číslo zapsané v desítkové soustavě je zakončeno číslicí 4. Přesuneme-li ji na první místo a ostatní dvě číslice ponecháme beze změny, dostaneme číslo, které je o 81 menší než původní číslo. Určete původní číslo.

Příklad 2. Které dvojciferné číslo zapsané v desítkové soustavě se po vzájemné výměně cifer zmenší o 36?

Příklad 3. Převeďte zadaná čísla do zápisu v desítkové soustavě:

a) 10201_3 b) 175_8 c) $A5C_{16}$

Příklad 4. Zapište číslo a v soustavě o základu z:

a) $a = 17$, $z = 3$ b) $a = 9$, $z = 2$ c) $a = 561$, $z = 4$
d) $a = 102$, $z = 8$ e) $a = 12477$, $z = 16$ f) $a = 197$, $z = 12$.

Příklad 5. Zapište číslo 197 v soustavě o základu z:

a) $z = 2$ b) $z = 3$ c) $z = 4$ d) $z = 8$ e) $z = 9$.

Příklad 6. Převeďte číslo 122_3 do soustavy o základu $z = 8$.

Příklad 7. Převeďte číslo 11000110_2 do soustavy o základu $z = 4$.

Příklad 8. Převeďte číslo 1110011101_2 do soustavy o základu $z = 8$.

Příklad 9. Vypočítejte základ číselné soustavy, platí-li:

a) $243_z = 99$ b) $21_z = 9$ c) $120_z = 35$

Příklad 10. Určete součet čísel:

a) 336_7 a 355_7 b) 5274_8 a 756_8 c) 425_7 a 562_7
d) $AC2_{16}$ a $2BA_{16}$ e) BDF_{16} a BCA_{16} c) $A1B2_{16}$ a $F3E4_{16}$

Příklad 11. Určete rozdíl čísel:

a) 614_7 a 325_7 b) 354_7 a 135_7 c) 3412_6 a 543_6
d) $AE3_{16}$ a $1A4_{16}$ e) 3412_{16} a 543_{16}

Příklad 12. Určete předchůdce a následovníka čísel:

a) 99_{10} b) 33203_4 c) 1100101_2 d) 166_7 e) 777_8

Příklad 13. Určete součin čísel:

a) 325_7 a 124_7	b) 354_7 a 135_7	c) 3412_6 a 543_6
d) $AE3_{16}$ a $1A4_{16}$	e) 3412_{16} a 543_{16}	f) 1011011_2 a 11001_2

Příklad 14. Určete podíl čísel:

a) 30632_7 a 5_7 b) 40432_5 a 3_5 c) 212011_3 a 2_3

Kardinální čísla

Příklad 1. Je dán systém množin $\mathcal{M} = \{A, B, C, D, E, F, G, H, \mathbb{N}, P, K\}$, kde kde $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$, $C = \{t, u\}$, $D = \{1, a, x, y\}$, $E = \{a\}$, $F = \{o, x\}$, $G = \{x, y, z\}$, $H = \{[1, d], [2, r]\}$, $K = \{o\}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$, $P = \{5, 10, 15, 20, 25, ...\}$. Rozhodněte, které množiny ze systému $\mathcal{M}$ mají stejné kardinální číslo.

Příklad 2. Uvažujme systém všech množin.

a) Zapište výčtem prvků alespoň dvě množiny, které mají stejné kardinální číslo jako množina D z Příkladu 1.

b) Zapište výčtem prvků množinu R tak, aby $|R| = |L|$, kde $L = \{t, u, v, x, z\}$.

Příklad 3. Vypočtěte součet kardinálních čísel množin A, B, kde

a) $A = \{a, b, c\}$ a $B = \{1, 2, 3, 4\}$,

b) $A = \{a, b, c\}$ a $B = \{a, b, 1, 2\}$.

Příklad 4. Vypočtěte součin kardinálních čísel množin A, B, kde $A = \{a, b, c\}$ a $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Celá čísla

Příklad 1. Zapište tři uspořádané dvojice přirozených čísel, které jsou ekvivalentní s uspořádanou dvojicí $[4, 1]$.

Příklad 2. Vyjádřete celá čísla $\mathbf{A} = [8\dot{,}5]$, $\mathbf{B} = [1\dot{,}9]$ pomocí alespoň dvou reprezentantů a vypočítejte $\mathbf{A} + \mathbf{B}$. Určete $-\mathbf{A}$, $-\mathbf{B}$.

Příklad 3. Jsou dána celá čísla $\mathbf{A} = [8\dot{,}2]$, $\mathbf{B} = [1\dot{,}4]$.
Určete celé číslo $\mathbf{X} = [x\dot{,}y]$, pro které platí $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{X}$.

Příklad 4. Jsou dána celá čísla $\mathbf{A} = [4\dot{,}2]$, $\mathbf{B} = [1\dot{,}5]$.
Určete $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, $\mathbf{B} - \mathbf{A}$.

Příklad 5. Jsou dána celá čísla $\mathbf{A} = [8\dot{,}5]$, $\mathbf{B} = [1\dot{,}9]$. Určete $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

Příklad 6. Jsou dána celá čísla $\mathbf{A} = [8\dot{,}2]$, $\mathbf{B} = [1\dot{,}4]$.
Určete celé číslo $\mathbf{X} = [x\dot{,}y]$, pro které platí $\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{X}$.

Příklad 7. Dokažte, že rovnice $\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{X}$ nemá pro celá čísla $\mathbf{A} = [0\dot{,}2]$, $\mathbf{B} = [3\dot{,}0]$ řešení.

Příklad 8. Dokažte, že celé číslo $[1\dot{,}0]$ je neutrální prvek vzhledem k násobení celých čísel (tzv. jednotkový prvek).

Příklad 9. Dokažte, že pro každá tři celá čísla $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ platí:

$$(-\mathbf{A})\cdot (\mathbf{C} - \mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}.$$

Příklad 10. Dokažte, že pro každá tři celá čísla $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ platí:

$$\mathbf{C}\cdot[(-\mathbf{A})-(-\mathbf{B})] = \mathbf{C}\cdot\mathbf{B} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}.$$

Příklad 11. Dokažte, že v množině všech celých čísel platí distributivní zákon pro násobení vzhledem ke sčítání.

Příklad 12. Porovnejte celá čísla

a) $\mathbf{A} = [4\dot{,}1]$, $\mathbf{B} = [3\dot{,}5]$,

b) $\mathbf{A} = [4\dot{,}1]$, $\mathbf{B} = [2\dot{,}1]$.

Příklad 13. Dokažte, že celé číslo $\mathbf{O} = [0\dot{,}0]$ je neutrální prvek vzhledem ke sčítání celých čísel (tzv. nulový prvek).

Příklad 14. Dokažte, že celé číslo $\mathbf{O} = [0\dot{,}0]$ je agresivní prvek vzhledem k násobení celých čísel.

Příklad 15. Vypočtěte

a) $b \cdot |a| + |a| \cdot |b| - |a|^2 - |\frac{b}{a}|$, kde $a = 3, b = -6$,

b) $|a + b| : |a - b|$, kde $a = -5, b = -4$.

Příklad 16. Vypočtěte neúplný podíl a zbytek při dělení čísla a číslem b, kde

a) $a = 38$, $b = 5$,

b) $a = 38$, $b = -5$,

c) $a = -23$, $b = -4$,

d) $a = -19$, $b = 7$.

Racionální čísla

Příklad 1. Rozhodněte, kolik tříd reprezentují následující zlomky: $\frac{-3}{8}, \frac{3}{-5}, \frac{-4}{2}, \frac{6}{-16}, \frac{-9}{15}, \frac{-9}{24}, \frac{8}{-4}$.

Příklad 2. Vypočtěte součet a součin racionálních čísel $\mathbf{\frac{9}{4}}$ a $\mathbf{\frac{7}{6}}$.