IMAk13 Matematika 3

2. setkání

Binární operace a jejich vlastnosti - opakování

RNDr. Milena Vaňurová, CSc.

Binární operace v množině a jejich vlastnosti

Definice: Nechť M je libovolná neprázdná množina. **Binární operací** ○ **v množině** M rozumíme zobrazení z množiny M x M do množiny M.

Např. Sčítání v množině N_0 všech přirozených čísel s nulou je zobrazení N_0 x N_0 do N_0.

Místo zápisu [[a,b],c] □ + obvykle píšeme a + b = c ,
[[2,3],5] □ + píšeme 2 + 3 = 5

Operace zapisujeme do tzv. operační tabulky (v případě množiny s malým počtem prvků) nebo je definujeme předpisem (např. v nekonečných číselných množinách)

Vlastnosti binárních operací v množině M

ND $(\forall x,y \in M)(\exists z \in M)\ [\, x \circ y = z \,]$

A $(\forall x, y, z \in M)\ [(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)]$

K $(\forall x,y \in M)\ [x \circ y = y \circ x\,]$

EN $(\exists e \in M)(\forall x \in M)\ [x \circ e = e \circ x = x]$

EI $(\forall x \in M)(\exists \bar{x} \in M)\ [x \circ \bar{x} = \bar{x} \circ x = e]$

ZR $(\forall a, b \in M)(\exists x, y \in M)\ [a \circ x = b \wedge y \circ a = b]$

Zjistěte vlastnosti binární operace o v množině všech celých čísel , která je zadána předpisem: ***a o b = a + b - 1***

~~ND~~ ~~$(\forall x,y \in M)(\exists z \in M)\ [x \circ y = z]$~~

~~Pro~~ libovolná celá čísla a,b vždy najdeme jejich součet zmenšený o 1 a bude to celé číslo

K $(\forall x,y \in M)\ [x \circ y = y \circ x]$

Zjišťujeme, zda a o b = b o a , pro libovolná celá čísla a,b:

L: a o b = a + b – 1 P: b o a = b + a – 1 L = P

A $(\forall x, y, z \in M)\ [(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)]$

Zjišťujeme, zda (a o b) o c = a o (b o c) , pro libovolná celá čísla a,b,c:

L: (a o b) o c = (a + b – 1) o c = (a + b – 1) + c - 1 = a + b + c – 2

P: a o (b o c) = a o (b + c – 1) = a + (b + c – 1) - 1 = a + b + c - 2 L = P

EN $(\exists e \in M)(\forall x \in M)\ [x \circ e = e \circ x = x]$

Zjišťujeme, zda existuje celé číslo e takové, že pro každé celé číslo a platí: a o e = a a e o a = a .

Protože operace o je K, stačí řešit jen jednu část, např. a o e = a (řešíme rovnici s neznámou e)

a + e – 1 = a

e = 1 neutrálním prvkem je číslo 1

Zjistěte vlastnosti binární operace o v množině všech celých čísel, která je zadána předpisem: $\boldsymbol{a \circ b = a + b - 1}$

EI $(\forall \boldsymbol{x} \in M)(\exists \bar{x} \in M)\ [\boldsymbol{x} \circ \bar{x} = \bar{x} \circ \boldsymbol{x} = e]$

Zjišťujeme, zda ke každému celému číslu a existuje k němu inverzní $\bar{a}$ tak, že

$$a \circ \bar{a} = e$$

$$a + \bar{a} - 1 = 1 \quad \text{(řešíme rovnici s neznámu } \bar{a}\text{)}$$

$$\bar{a} = 2 - a \qquad \text{v množině C existuje pro každé a}$$

ZR $(\forall\ a, b \in M)(\exists\ x, y \in M)\ [a \circ x = b \wedge\ y \circ a = b]$

Zjišťujeme, zda pro libovolná celá čísla a,b, jsou řešitelné základní rovnice, tj., existují celá čísla x, y, pro která platí a o x = b a x o a = b.

Protože operace o je komutativní, je x = y a stačí řešit jednu rovnici:

$$a \circ x = b$$

$$a + x - 1 = b$$

$$x = b - a + 1$$ najdeme vždy k libovolným a, b celým.

Algebraická struktura (C, o) je komutativní grupa.

Zjistěte vlastnosti binární operace * v množině všech celých čísel dané předpisem:

a * b = 2.a.b

ND Pro libovolná celá čísla a,b vždy najdeme součin 2.a.b a bude to celé číslo

K Zjišťujeme, zda a * b = b * a , pro libovolná celá čísla a,b:

L: a * b = 2.a.b P: b * a = 2.b.a L = P

A Zjišťujeme, zda (a * b) * c = a * (b * c) , pro libovolná celá čísla a,b,c:

L: (a * b) * c = (2.a.b) * c = 2 . 2.a.b . c = 4.a.b.c

P: a * (b * c) = a * 2.b.c = 2.a . 2.b.c = 4.a.b.c L = P

EN Zjišťujeme, zda existuje celé číslo e takové, že pro každé celé číslo a platí:

a * e = a a také e * a = a . Protože operace * je K, stačí řešit jen jednu část,

např. a * e = a (vlastně řešíme rovnici s neznámou e)

2.a.e = a

e = a/2a , což není celé číslo, proto ~~EN~~ - neutrální prvek v C neexistuje

EI neplatí, protože neex. neutrální prvek

Zjistěte vlastnosti binární operace * v množině všech celých čísel $a * b = 2.a.b$

ZR Zjišťujeme, zda pro libovolná celá čísla a,b, jsou řešitelné základní rovnice, tj., existují celá čísla x, y, pro která platí $a * x = b$ a $x * a = b$.
Protože operace * je komutativní, je $x = y$ a stačí řešit jednu rovnici:

$$a * x = b$$
$$2.a.x = b$$
$$x = b/2a$$ toto číslo není vždy z množiny celých čísel, proto ~~ZR~~

Algebraická struktura (C, *) je komutativní pologrupa, která není grupou.