

IMAk13 Matematika 3

3. konzultace

Celá čísla

Konstrukce $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

Na kartézském součinu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definujeme binární relaci \sim (tzv., ekvivalenci uspořádaných dvojic přirozených čísel“):

$$[a,b] \sim [c,d] \Leftrightarrow a + d = b + c$$

Tato relace je reflexivní, symetrická a tranzitivní na množině $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (dokažte).

Je tedy relací ekvivalence na $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ a vytváří rozklad množiny $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ na třídy navzájem ekvivalentních dvojic přirozených čísel.

Rozklad množiny $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vytvořený relací \sim nazýváme **množinou všech celých čísel** ozn. \mathbb{C} .
Třídy rozkladu nazýváme **celá čísla**.

Celá čísla jsou tedy třídy navzájem ekvivalentních dvojic přirozených čísel.

► $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{[0,0], [0,1], [0,2], [0,3], \dots, [0,25], \dots, [1,0], [1,1], [1,2], [1,3], \dots, [2,0], [2,1], [2,2], \dots, [3,0], [3,1], [3,2], \dots, \dots\}$

$$[a,b] \sim [c,d] \Leftrightarrow a + d = b + c$$

$$[2,0] \sim [3,1] \sim [19,17] \sim$$

$$\mathbf{A} = \{[2,0], [3,1], [4,2], [5,3], \dots, [19,17], \dots\} = [2,0] = [3,1]$$

$$\mathbf{B} = \{[0,4], [1,5], [2,6], \dots, [101,105], \dots\} = [0,4] = [3,7]$$

Sčítání a násobení celých čísel:

Nechť celá čísla A, B jsou reprezentována uspořádanými dvojicemi $[a,b], [c,d]$, tj.

$$A = [a,b] \text{ a } B = [c,d]. \text{ Pak}$$

$$A + B = [a,b] + [c,d] = [a+c, b+d]$$

$$A \cdot B = [a,b] \cdot [c,d] = [ac+bd, ad+bc]$$

Součet ani součin celých čísel nezávisí na volbě reprezentantů.

$$A = \{ [2,0], [3,1], [4,2], [5,3], \dots [19,17] \dots \dots \} = [2,0] = [3,1]$$

$$B = \{ [0,4], [1,5], [2,6], \dots, [101,105] \dots \dots \} = [0,4] = [5,9]$$

$$A + B = [3,1] + [5,9] = [3+5, 1+9] = [8,10] = [2,4] = [0,2] \quad [8,10] \sim [2,4] \sim [0,2]$$

$$A \cdot B = [3,1] \cdot [5,9] = [3 \cdot 5 + 1 \cdot 9, 3 \cdot 9 + 1 \cdot 5] = [24,32] \\ = [2,0] \cdot [0,4] = [2 \cdot 0 + 0 \cdot 4, 2 \cdot 4 + 0 \cdot 0] = [0,8] \quad [24,32] \sim [0,8]$$

Algebraická struktura $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ je obor integrity s jednotkovým prvkem.

Vlastnosti $(\mathbf{C}, +, \cdot)$:

$+$: ND, A, K, ZR, EN, EI

\cdot : ND, A, K, EN

\cdot D +

neexistují vlastní dělitelé nulového prvku

Nulový prvek: $\mathbf{O} = [x, x] = [0, 0] = \{[0, 0], [1, 1], [2, 2], \dots\}$

Jednotkový prvek: $\mathbf{J} = [x+1, x] = [1, 0] = \{[1, 0], [2, 1], [3, 2], \dots\}$

Opačné číslo k celému číslu $A = [a, b]$: $-A = [b, a]$

Rozdíl $A - B$ dvou celých čísel A, B je celé číslo X , pro které platí $A = B + X$.

Je-li $A = [a, b]$, $B = [c, d]$, je $X = [a+d, b+c]$.

Př. Vypočítejte $\mathbf{X} = [x,y]$ z rovnice $\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{X}$, je-li $\mathbf{A} = [9,1]$, $\mathbf{B} = [5,7]$

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{X}$$

$$[9,1] = [5,7] \cdot [x,y]$$

$$[9,1] = [5 \cdot x + 7 \cdot y, 5 \cdot y + 7 \cdot x] \quad \text{na L a P straně je totéž celé číslo, tzn. příslušné dvojice jsou ekvivalentní}$$

$$[9,1] \sim [5 \cdot x + 7 \cdot y, 5 \cdot y + 7 \cdot x]$$

$$9 + 5 \cdot y + 7 \cdot x = 1 + 5 \cdot x + 7 \cdot y$$

$$8 + 2 \cdot x = 2 \cdot y$$

$$4 + x = y \quad \text{X je reprezentováno usp. dvojicemi, kde druhá složka je o 4 větší než první složka}$$

$$\mathbf{X} = [0,4] = [1,5] = [x, x+4]$$

$$\text{Zk.: } \mathbf{L} = [9,1]$$

$$\mathbf{P} = [5,7] \cdot [0,4] = [5 \cdot 0 + 7 \cdot 4, 5 \cdot 4 + 7 \cdot 0] = [28, 20]$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{P} \quad \text{protože } [9,1] \sim [28,20] \quad 9 + 20 = 1 + 28$$

Př. Vypočítejte $\mathbf{X} = [x,y]$ z rovnice $\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{X}$, je-li $\mathbf{A} = [9,0]$, $\mathbf{B} = [5,7]$

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{X}$$

$$[9,0] = [5,7] \cdot [x,y]$$

$$[9,0] = [5 \cdot x + 7 \cdot y, 5 \cdot y + 7 \cdot x] \quad \text{na } L \text{ a } P \text{ straně je totéž celé číslo, tzn. příslušné dvojice jsou ekvivalentní}$$

$$[9,0] \sim [5 \cdot x + 7 \cdot y, 5 \cdot y + 7 \cdot x]$$

$$9 + 5 \cdot y + 7 \cdot x = 0 + 5 \cdot x + 7 \cdot y$$

$$9 + 2 \cdot x = 2 \cdot y \quad \text{taková přirozená čísla } x, y \text{ nenajdeme}$$

liché \neq sudé \mathbf{X} neexistuje

Def. Celé číslo $A = [a, b]$ je

- **kladné**, právě když $a > b$ $A \in \mathbb{C}^+$
- **záporné**, právě když $a < b$ $A \in \mathbb{C}^-$
- **nulové**, právě když $a = b$ $A = 0$

Na základě izomorfismu algebraických struktur $(\mathbb{C}_0^+, +, \cdot)$ a $(\mathbb{N}_0, +, \cdot)$ - viz konzultace AR1

budeme dále celá čísla zapisovat takto:

$[x + n, x] = n$	např. $[5, 1] = 4$
$[x, x + n] = -n$	$[1, 5] = -4$
$[x, x] = 0$	$[5, 5] = 0$

Def. Celé číslo A je větší než celé číslo B , právě když $A - B$ je kladné.

$$A > B \Leftrightarrow A - B \in \mathbb{C}^+$$

Absolutní hodnota celého čísla

- ▶ Absolutní hodnota celého čísla a je celé číslo $|a|$, pro které platí:
 - je-li $a > 0$, je $|a| = a$,
 - je-li $a = 0$, je $|a| = 0$
 - je-li $a < 0$, je $|a| = -a$ (*číslo opačné k a*)

Dělení se zbytkem v \mathbb{C}

Dělení se zbytkem množině celých čísel je zobrazení, které každé dvojici celých čísel $a, b, b \neq 0$ přiřazuje celá čísla q a r tak, že

$$a = b \cdot q + r \quad , \quad \text{kde } 0 \leq r < |b|$$