**Kartézský součin množin, binární relace, zobrazení - opakování**

**Kartézský součin množin A, B** je množina, ozn. **A x B**, která se skládá ze všech uspořádaných dvojic, jejichž první složkou je prvek množiny A a druhou složkou prvek množiny B.

**Binární relace z množiny A do množiny B** je kterákoliv množina R, která je podmnožinou kartézského součinu A x B.

(Pokud A = B, pak mluvíme o **binární relaci v množině A** – a jde o libovolnou podmnožinu kartézského součinu A x A.

**Doplňková relace R´ k relaci R v množině A** je množina všech uspořádaných dvojic z AxA, které nepatří do relace R, tj. R´= (AxA) – R.

**Inverzní relace R-1 k relaci R** v množině A je relace R-1 = {[x,y]AxA; [y,x]  R} )

První obor relace O1(R) je množina všech prvních složek uspořádaných dvojic z relace R.

Druhý obor relace O2(R) je množina všech prvních složek uspořádaných dvojic z relace R.

Relace R z množiny A do množiny B se nazývá **zobrazením z A do B**, právě když ke každému prvek *a* A existuje nejvýše jeden prvek b  B takový, že platí [*a,b*]R.

(Tedy každý prvek z množiny A se může vyskytnout jako první složka uspořádané dvojice v relaci R nejvýše jednou.)

Jestliže [*a,b*]R, pak prvek ***a*** nazýváme **vzorem** prvku *b* a prvek ***b* obrazem** prvku *a* v zobrazení R (nebo že zobrazení R přiřazuje prvku *a* prvek *b*)*.*

***Příklad:***

Jsou dány množiny A, B: A = {a, b, c, d}, B = {1, 2, 3}. Rozhodněte, které z binárních relací R1 - R5  jsou zobrazení z A do B.

R1 = {[a,1], [b,2], [d,3]} - je zobrazení

R2 = {[a,2], [c,1], [a,3], [b,3]} - není zobrazení - prvek *a* je 1. složkou ve dvou dvojicích

R3 = {[a,1], [b,2],[c, 3] [d,1]} - je zobrazení

R4 = {[b,3]} - je zobrazení

R5 = {[a,2], [c,1], [d,2], [b,3]} - je zobrazení

**Typy zobrazení:**

Podle toho, jaký je vztah mezi prvním oborem relace R a množinou A a druhým oborem relace R a množinou B, rozlišujeme:

 **zobrazení celé** **množiny A na necelou** **množinu B**, je-li O1(R) = A a O2(R) B,

 (tzn. každý prvek z A je vzorem a v B existuje aspoň jeden prvek, který není obrazem žádného prvku z A),

 **zobrazení necelé množiny A na** **celou** **množinu B**, je-li O1(R)  A a O2(R) = B,

 (tzn.v A existuje prvek, který není vzorem žádného prvku z B a každý prvek z B je aspoň jednou obrazem

 nějakého prvku z A)

 **zobrazení necelé množiny A na necelou** **množinu B**, je-li O1(R)  A a O2(R) B,

 (tzn. v A existuje prvek, který není vzorem žádného prvku z B a v B existuje aspoň jeden prvek, který není

 obrazem žádného prvku z A )

 **zobrazení celé** **množiny A na celou** **množinu B**, je-liO1(R) = A a O2(R) = B.

 (tzn. každý prvek z A je vzorem a každý prvek z B je aspoň jednou obrazem nějakého prvku z A)

Každé z uvedených typů zobrazení může být navíc **prosté zobrazení**:

**Zobrazení** R z  A do B se nazývá **prosté**, právě když každé dva různé vzory mají různé obrazy. (Jinak řečeno: Zobrazení je prosté, právě když relace inverzní R-1 je zobrazením z B do A.)

**Prosté zobrazení celé množiny na celou množinu** se nazývá **vzájemně jednoznačné zobrazení**.

Říkáme, že dvě **množiny** A, B jsou **ekvivalentní (A ~ B),** právě když existuje aspoň jedno prosté zobrazení (=vzájemně jednoznačné zobrazení) jedné z těchto množin na druhou.

**Cvičení:**

1. Rozhodněte přesně o typu jednotlivých zobrazení ve výše uvedeném příkladu včetně toho, zda jsou prostá .

2. Zapište několik zobrazení z množiny M do množiny N tak, abyste na nich mohli ilustrovat jednotlivé typy zobrazení. M = {1, 2, 3, 4, 5}, N = {x, y, z, u, v}.

3. Uvažujte množinu všech cestujících v jisté tramvaji, množinu všech sedadel v této tramvaji a binární relaci určenou vztahem „Osoba X sedí na sedadle Y“. Přemýšlejte o různých situacích v této tramvaji (např. Každý cestující sedí na jednom sedadle a ještě jsou dvě místa volná.) a rozhodněte, zda se jedná o zobrazení z množiny cestujících do množiny sedadel. Pokud ano, určete přesně typ tohoto zobrazení.

4. Rozhodněte a zdůvodněte, zda jsou některé z množin ve výše uvedeném textu ekvivalentní?

5. Zdůvodněte, že množina N všech přirozených čísel N = {1, 2, 3, 4, .... } je ekvivalentní s množinou S všech sudých čísel S = {2, 4, 6, ... } a množinou všech desetinásobků přirozených čísel D = {10, 20, 30, ... }.

(návod: Je potřeba najít prosté zobrazení množiny N na množinu S a na množinu D.

Připoměňte si: Množina je **nekonečná**, právě když je ekvivalentní se svou vlastní podmnožinou.

Ve cvičení 5 jste tedy zdůvodnili nekonečnost množiny všech přirozených čísel. Množina N je ekvivalentní se svou vlastní podmnožinou (N **~** S, S ⊂ N, S ≠ N).