KOMBINATORIKA

KOMBINATORIKA

Zkoumá skupiny (podmnožiny) prvků vybraných z jisté základní množiny. Podle toho, zda se prvky v jednotlivých skupinách **mohou či nemohou opakovat**, rozdělujeme skupiny prvků na **skupiny s opakováním a skupiny bez opakování.**

Poznámka

Skupiny, kde se prvky nemohou opakovat, si lze tedy představit tak, že prvky, které vybíráme ze základní skupiny do ní nevracíme zpět a nemůžeme je tedy použít při dalším výběru. Naopak skupiny, kde se prvky mohou opakovat, vznikají tak, že vybrané prvky vracíme do základní skupiny a v dalším výběru je můžeme znovu použít.

MNOŽINY

množina

- soubor prvků
- prvky množiny

zápis

- $M=\{1, 2, 3\}$
- $M=\{\}$ nebo $M=\emptyset$
- $1 \in M$; $5 \notin M$

FAKTORIÁL

faktoriál čísla n je roven součinu všech přirozených čísel, která jsou menší nebo rovna číslu n.

Zápis – n!

Př. $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

$0! = 1$

KOMBINATORICKÉ PRAVIDLO SOUČTU

př. Máme 6 červených míčků a 8 modrých míčků. Kolik máme možností, když budeme losovat jeden míček z osudí, kam dáme všechny míčky dohromady?

KOMBINATORICKÉ PRAVIDLO SOUČINU

př. Máme opět dvě množiny – množinu Z, v které jsou 3 ženy a množinu M, obsahující 4 muže. Kolik různých párů muž – žena můžeme vytvořit?

Ž1 – M1	Ž2 – M1	Ž3 – M1
Ž1 – M2	Ž2 – M2	Ž3 – M2
Ž1 – M3	Ž2 – M3	Ž3 – M3
Ž1 – M4	Ž2 – M4	Ž3 – M4

$4 + 4 + 4 = 12$ resp. $3 \cdot 4 = 12$ párů

Vynásobili jsme velikost obou množin.

KOMBINATORICKÉ PRAVIDLO SOUČINU

př. Kolik existuje různých dvojciferných čísel?

__ __

první pozice 1 – 9, druhá pozice 0 – 9

$9 \cdot 10 =$ **90 čísel**

KOMBINATORICKÉ PRAVIDLO SOUČINU

př. Kolik existuje různých trojciferných čísel, kde se žádná číslice nesmí vyskytnout dvakrát?

__ __ __

první pozice 1 – 9

druhá pozice 0 – 9 bez čísla na první pozici

třetí pozice 0 – 9 bez čísel na první a druhé pozici

$9 \cdot 9 \cdot 8 =$ **648 čísel**

KOMBINATORICKÉ PRAVIDLO SOUČINU

Dvakrát za sebou hodíme klasickou hrací kostkou. Kolik různých výsledků můžeme získat?

__ __ - v prvním hodu 6 možností, v druhém hodu opět 6 možností

$6 \cdot 6 =$ **36 možností**

Opět dva hody kostkou. Kolik různých výsledků můžeme získat, pokud nám v prvním hodu padlo sudé číslo?

__ __ - v prvním hodu 3 možnosti, v druhém 6 možností

$3 \cdot 6 =$ **18 možností**

VARIACE

variace *k*-té třídy z *n* prvků

z nějaké množiny objektů vybíráme určitý počet objektů, přičemž **záleží na pořadí**, v jakém tyto objekty vybíráme

VARIACE – PŘÍKLAD A ODVOZENÍ

Soutěž v pojídání knedlíků. Do finále postoupilo 7 účastníků. Kolik existuje možností, jak těchto sedm účastníků může obsadit první tři místa?

__ __ __

první pozice – 7 možností, druhá pozice – 6 možností, třetí pozice – 5 možností

$7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ možností

obecně → první pozice – n možností, druhá pozice – (n – 1) možností, třetí pozice (n – 2) možností

$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$

VARIACE - VZOREC

$$V(k,n) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

VARIACE

Zůstaňme u závodů v pojídání knedlíků. Jak se změní počet medailových umístění, jestliže na závod přijel favorit, který vždy zvítězí?

__ __ __

první místo favorit, druhé místo 6 možností, třetí místo 5 možností

$$V(2,6) = \frac{6!}{(6-2)!} = 30$$

VARIACE

Jak se změní počet možností, jestliže víme, že zmíněný favorit vždy obsadí medailové umístění?

__ __ __

$$3 \cdot V(2,6) = 3 \cdot \frac{6!}{(6-2)!} = 3 \cdot 30 = 90$$

VARIACE S OPAKOVÁNÍM

Kolik existuje trojciferných čísel, které lze zapsat pomocí cifer {1, 2, 3, 4, 5}?

__ __ __

cifry se mohou opakovat – první pozice – 5 možností, druhá pozice – 5 možností, třetí pozice – 5 možností

$V'_3(5) = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 =$ **125 čísel**

VARIACE S OPAKOVÁNÍM - VZOREC

$$V'_k(n) = n^k$$

VARIACE S OPAKOVÁNÍM

Kolik různých značek teoreticky existuje v Morseově abecedě, sestavují-li se tečky a čárky do skupin po jedné až pěti?

Variace s opakováním, $n = 2$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$

$V'_1(2) + V'_2(2) + V'_3(2) + V'_4(2) + V'_5(2) = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 =$

$= 2 + 4 + 8 + 16 + 32 =$ **62 značek**

PERMUTACE

uspořádaná n-tice vybraná z n prvků

příklad – kolik trojciferných čísel dokážeme sestavit z čísel {1, 2, 3, 4, 5}?

- trojciferná $$V(3,5) = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$$
- pěticiferná $$V(5,5) = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{5!}{(5-5)!} = \frac{5!}{0!} = 5! = 120$$

výsledek je tedy roven 5!

Vzorec $$P(n) = n!$$

PERMUTACE - PŘÍKLAD

Máme 6 knih a chceme je uložit na poličku v nějakém pořadí. Kolik celkem různých pořadí existuje?

$P(6) = 6! = 720$

720 různých pořadí uložení knih

PERMUTACE - PŘÍKLAD

K našim šesti knihám psaných českým jazykem přidejme další čtyři knihy psané latinou. Kolik existuje různých způsobů uložení těchto 10 knih na poličku, pokud chceme mít všechny české knihy a všechny latinské knihy pohromadě?

české knihy – 6!, latinské knihy – 4!

$6! \cdot 4! = 17\,280$ způsobů

latinské a pak české

$17\,280 \cdot 2$

Celkem tedy je **34 560** různých způsobů.

PERMUTACE S OPAKOVÁNÍM

Kolik různých šesticiferných čísel lze vytvořit z číslic 1, 2, 2, 3, 3, 3?

$$P'(n) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$$

Jestliže se mezi *n* prvky vyskytuje:

první prvek n_1 krát
druhý prvek n_2 krát
…
k-tý prvek n_k krát

$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$

$$P'(6) = \frac{6!}{1! \cdot 2! \cdot 3!}$$

PŘÍKLAD

Zjistěte, kolik různých pěticiferných čísel lze vytvořit použitím cifer 1, 2, 3, 4, 5 (cifry se v čísle mohou opakovat).

Permutace bez opakování?

Permutace s opakováním?

Variace s opakováním?

- k=n

$V'_5(5) = 5^5 = \mathbf{3\ 125}$

KOMBINACE

vybíráme určitý počet objektů z nějaké množiny bez ohledu na pořadí

typickým příkladem – losování Sportky

kombinační číslo

$$C(k,n)=\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$$

KOMBINAČNÍ ČÍSLO – ZÁKLADNÍ PRAVIDLA

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

KOMBINACE - PŘÍKLAD

V osudí je 49 míčků, losuje se 6 míčků. Kolik různých možností můžeme vylosovat?

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{(49-6)! \cdot 6!} = \frac{49!}{43! \cdot 6!} = 13\,983\,816$$

Existuje tedy 13 983 816 možností.

BTW pravděpodobnost výhry je 1:13 983 816, tedy cca 0,00000715 %. ☺

KOMBINACE - PŘÍKLAD

Na „tour de pub“ máme na výběr ze 13 hospůdek. Stihnout ale můžeme pouze 4. Kolik různých čtveřic hospůdek můžeme navštívit?

$$\binom{13}{4} = \frac{13!}{9! \cdot 4!} = 715$$

Máme 715 možností různých čtveřic hospůdek.

KOMBINACE - PŘÍKLAD

Máme skupinu padesáti lidí – polovina muži a polovina ženy. Kolik existuje různých trojic lidí, pokud nesmí být složeny pouze z jednoho pohlaví (tj. v trojici se nesmí vyskytnout jen tři muži nebo jen tři ženy).

$$2 \cdot \binom{25}{2} \cdot \binom{25}{1} = 15000$$

KOMBINACE S OPAKOVÁNÍM

$$C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k}$$

PŘÍKLADY

Ve škole je celkem 20 učitelů. Je třeba sestavit komisi pro maturity v tomto složení: jeden předseda, jeden hodný přísedící a jeden zlý přísedící. Kolik existuje celkem možností?

Variace

$$V(3,20) = \frac{20!}{17!} = 6840$$

PŘÍKLADY

Kolik trojciferných čísel můžeme poskládat z číslic {0, 1, 2, 3, 4, 5}, pokud se žádná číslice nesmí opakovat?

$$V(3,6) = \frac{6!}{3!} = 120$$

Musíme odečíst ty variace, které mají na prvním místě nulu.

0 __ __ z čísel 1, 2, 3, 4, 5

$$V(2,5) = \frac{5!}{3!} = 20$$

Celkový počet je tedy 120 – 20 = **100 možností.**

PŘÍKLADY

Kolik různých trojciferných čísel dokážeme sestavit z číslic {1, 2, 3, 4, 5}, pokud se žádná číslice nesmí opakovat a výsledné číslo má být liché?

— — —

$$V(3,5) = \frac{5!}{2!} = 60$$

Každá číslice se může vyskytovat na poslední pozici stejně často, takže pokud máme 5 číslic, každá se bude na posledním místě vyskytovat

(60 : 5 =) 12 krát.

1 na konci – 12x, 3 na konci – 12x, 5 na konci – 12x

36 možností

PŘÍKLADY

S připomínkami k navrhovanému zákonu chce v parlamentu vystoupit šest poslanců (A, B, C, D, E, F). Určitě počet:

a) všech možných pořadí jejich vystoupení

b) všech pořadí, v nichž vystupuje A po E

c) všech pořadí, v nichž vystupuje A ihned po E

PŘÍKLADY

K sestavení vlajky, která má být složena ze tří různobarevných vodorovných prvků, jsou k dispozici barvy bílá, červená, modrá, zelená a žlutá. Urči:

a) počet vlajek, které můžeme z látek těchto barev sestavit
b) kolik z nich má modrý pruh
c) kolik jich má modrý pruh uprostřed
d) kolik jich nemá červený pruh uprostřed

PŘÍKLAD

Výbor sportovního klubu tvoří 6 mužů a 4 ženy. Urči:

a) kolika způsoby z nich lze vybrat předsedu, místopředsedu, jednatele a hospodáře
b) kolika způsoby z nich lze vybrat funkcionáře podle a) tak, aby ve funkci předsedy byl muž a ve funkci místopředsedy žena nebo obráceně
c) kolika způsoby z nich lze vybrat funkcionáře podle a) tak, aby právě jedním z nich byla žena

PŘÍKLAD

Státní poznávací značka v nějakém státě je tvořena uspořádanou sedmicí, jejíž první tři členy jsou písmena vybíraná z 28 písmen a další 4 číslice. Urči, kolik poznávacích značek je ve státě k dispozici.

$V'_3(28) \cdot V'_4(10) = 28^3 \cdot 10^4 = \mathbf{219\ 520\ 000}$

Mají k dispozici 219 520 000 značek.

PŘÍKLAD

Kolik různých SPZ ve tvaru OSB XX-XX existuje s alespoň dvěma trojkami?

PŘÍKLADY

Urči počet všech přirozených čísel menších než 1 000 000, která lze zapsat dekadicky pouze užitím čísel 5 a 8.

PŘÍKLADY

V sáčku jsou červené, modré a zelené kuličky. Kuličky téže barvy jsou nerozlišitelné. Urči, kolika způsoby lze vybrat 5 kuliček, jestliže v sáčku je:

a) alespoň 5 kuliček od každé barvy

b) 5 červených, 4 modré, 4 zelené

PŘÍKLADY

Urči, kolika způsoby je možno ze 7 mužů a 4 žen vybrat šestičlennou skupinu, v níž jsou:

a) právě dvě ženy

b) alespoň dvě ženy

PŘÍKLADY

Urči, kolika způsoby lze sestavit rozvrh na jeden den pro třídu, v níž se vyučuje 12 předmětů. Každý předmět má být nejvýše jednou denně a třída má mít 6 předmětů za den.

V kolika z nich se vyskytuje matematika?

V kolika z nich je zařazena matematika na 1. vyučovací hodinu?

PŘÍKLADY

Hokejové družstvo má 20 hráčů: 13 útočníků, 5 obránců a 2 brankáře. Urči, kolik sestav by mohl trenér vytvořit, jestliže sestava má mít 3 útočníky, 2 obránce a 1 brankáře.

PŘÍKLADY

O telefonním čísle svého spolužáka si Petr zapamatoval jen to, že je šestimístné, začíná sedmičkou, neobsahuje žádné dvě stejné číslice a je dělitelné 25. Urči, kolik telefonních čísel přichází v úvahu.

7 __ __ __ 2 5

7 __ __ __ 5 0

$2 \cdot V_3(7)$

V úvahu přichází 420 telefonních čísel.

PŘÍKLADY

Jméno a příjmení každého člověka bydlícího v městečku s 1 500 obyvateli může začínat jedním ze 32 písmen. Dokaž, že alespoň dva obyvatelé městečka mají stejné iniciály.

$V'_2(32) = 32^2 = 1\ 024$

Počet možných iniciál je 1 024, což je více než polovina počtu obyvatel. Zbývajících 476 obyvatel tedy musí mít stejné iniciály jako některý z těchto 1 024 obyvatel.

PŘÍKLADY

Kufřík má kódový zámek, který se otevře, když na každém z pěti kotoučů nastavíme správnou číslici. Na každém kotouči je 9 číslic. urči největší možný počet pokusů, které je nutno provést, chceme-li kufřík otevřít po zapomenutí kódu.

$V'_5(9) = 9^5 = 59\ 049$

Největší možný počet pokusů je 59 049.

PŘÍKLADY

Urči počet způsobů, jimiž lze umístit všechny bílé šachové figurky (král, dáma, 2 věže, 2 jezdci, 2 střelci, 8 pěšců):

a) na dvě pevně zvolené řady šachovnice (8x8 polí)

b) na libovolné dvě řady šachovnice