Výroková logika

Pro připomenutí…

- $\mathbb{N}$ - množina všech přirozených čísel,
- $\mathbb{N}_0$ - množina všech přirozených čísel (včetně nuly),
- $\mathbb{Z}$ - množina všech celých čísel,
- $\mathbb{Q}$ - množina všech racionálních čísel,
- $\mathbb{R}$ - množina všech reálných čísel.

Výrok

každé sdělení, o kterém můžeme rozhodnout, zda je pravdivé či nepravdivé

výrok pravdivý vs. výrok nepravdivý

výrok pravdivý	výrok platí	pravdivostní hodnota 1
výrok nepravdivý	výrok neplatí	pravdivostní hodnota 0

Výroky

- Brno je hlavní město České republiky.
- Bratislava je hlavní město Slovenska.
- $5 > 3$
- $8 + 5 = 11$
- Král Karel IV. dostal v říjnu 1347 rýmu.
- Zákaz vstupu!
- $3 + 5 - 1$
- Přijdeš zítra?
- $x > 3$

Hypotézy (domněnky)

- výrok, u kterého nejsme v daném okamžiku schopni rozhodnout, zda je pravdivý či nepravdivý
- vědecké bádání – ověření zkoumáním či experimentem

Negace výroku

„Připojíme-li před určitý výrok slova „není pravda, že“, popř. provedeme stylistické úpravy, které mají týž význam jako uvedená slova, dostaneme negaci výroku.“

Negace výroku - příklad

$$2 \cdot 5 = 10$$

$$2 \cdot 5 \neq 10$$

Není pravda, že $2 \cdot 5 = 10$.

Negace výroku

Negace výroku A zapisujeme jako ¬A

Je-li výrok A pravdivý, je jeho negace ¬A nepravdivá (a obráceně).

A	¬A
1	0
0	1

Složené výroky

vznikají spojením dvou nebo více výroků

tvoříme je pomocí výrokotvorných spojek

tyto spojky zapisujeme zvláštními symboly - funktory

Konjunkce výroků

spojení dvou výroků spojkou „a“ („a současně“, „a zároveň“)

označujeme $\boldsymbol{A \wedge B}$

pravdivá, jsou-li oba výroky A, B pravdivé

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Disjunkce výroků

spojení výroků spojkou „nebo“

značíme $\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}$

pravdivá, je-li pravdivý aspoň jeden z výroků A, B

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Ostrá disjunkce výroků

spojení výroků spojkou „buď … nebo“

značíme $\boldsymbol{A} \veebar \boldsymbol{B}$

pravdivá, je-li pravdivý právě jeden z výroků A, B

A	*B*	$\boldsymbol{A} \veebar \boldsymbol{B}$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Implikace výroků

Implikace výroků A, B je nepravdivá, jestliže první výrok je pravdivý a současně druhý nepravdivý. V ostatních případech je implikace pravdivá.

$$\boldsymbol{A \Rightarrow B}$$

A	B	$\boldsymbol{A \Rightarrow B}$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Ekvivalence výroků

výroky spojené pomocí „tehdy a jen tehdy, když“ nebo „právě tehdy, když“

$$\boldsymbol{A \Leftrightarrow B}$$

A	*B*	$\boldsymbol{A \Leftrightarrow B}$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Složené výroky a jejich využití

abeceda výrokové logiky

výroková formule

matematizace reálné situace

tautologie, kontradikce, splnitelná formule

abeceda výrokové logiky

znaky pro výrokové proměnné A, B

znaky pro konstanty 1, 0 (pravdivý, nepravdivý)

znaky pro funktory

závorky

Výroková formule / složený výrok

Každá výroková proměnná A, B, C, … je výrokovou formulí.

Konstanty 1, 0 jsou výrokové formule.

Jestliže některé výrazy X, Y jsou výrokovými formulemi, potom i $\neg X$, $\neg Y$, $X \wedge Y$, $X \vee Y$, $X \underline{\vee} Y$, $X \Rightarrow Y$, $X \Leftrightarrow Y$ jsou výrokové formule.

Žádné jiné výrazy nejsou výrokové formule.

Tabulka pravdivostních hodnot

dva výroky (A, B) – 4 řádky

tři výroky (A, B, C) – 8 řádků

obecně: Jestliže výroků je n, pak tabulka pravdivostních hodnot obsahuje 2^n řádků.

Tautologie

Výroková formule, která je vždy pravdivá pro jakékoliv pravdivostní hodnoty výrokových proměnných, se nazývá tautologie.

Kontradikce

Výroková formule, která je vždy nepravdivá pro všechny pravdivostní hodnoty výrokových proměnných, se nazývá kontradikce.

Splnitelná formule

Výroková formule, která je pro některé pravdivostní hodnoty výrokových proměnných pravdivá a pro jiné pravdivostní hodnoty výrokových proměnných nepravdivá, se nazývá splnitelná formule.

Logicky ekvivalentní výroky

Jestliže dva složené výroky mají stejné sloupce pravdivostních hodnot, říkáme, že jsou logicky ekvivalentní (rovnocenné). Výroková formule X je logicky ekvivalentní s výrokovou formulí Y právě tehdy, když $X \Leftrightarrow Y$ je tautologií. Logicky ekvivalentní formule X, Y budeme zapisovat $X{\sim}Y$.

Příklad

V dílně pracují tři stroje, dle následujících podmínek :

a) Pracuje-li první stroj, pracuje i druhý stroj.

b) Pracuje druhý nebo třetí stroj.

c) Jestliže nepracuje první stroj, pak nepracuje ani třetí stroj.

Jak pracují jednotlivé stroje ?

A	B	C	¬A	¬C	A⇒ B	B ∨C	¬A⇒ ¬C	K
1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	0	1	0

Příklad

$$[(3 < 7) \wedge (7 \mid 11)] \wedge (111 \mid 111)$$

Příklad

$$[(3 < 7) \wedge (7 \mid 11)] \wedge (111 \mid 111)$$

$$\quad 1 \qquad\qquad 0 \qquad\qquad\qquad\qquad 1$$

Příklad

$$\overline{[(3 < 7) \wedge (7 \mid 11)] \wedge (111 \mid 111)}$$

1 0 1

0

Příklad

$$[(3 < 7) \wedge (7 \mid 11)] \wedge (111 \mid 111)$$

1 0 1

0

0

Příklad

$[\neg(7 \mid 91) \vee (13 \text{ není sudé})] \wedge (1 \text{ je prvočíslo})$

Příklad

$[\neg(7 \mid 91) \vee (\text{13 není sudé})] \wedge (\text{1 je prvočíslo})$

0 1 0

Příklad

$[\neg(7 \mid 91) \lor (13 \text{ není sudé})] \land (1 \text{ je prvočíslo})$

0 1 0

1

Příklad

[¬(7 | 91) ∨ (13 není sudé)] ∧ (1 je prvočíslo)

0 1 0

1

0

Příklad

Určete tabulkovou metodou, jak závisí pravdivost či nepravdivost následujících výrokových formulí na pravdivosti či nepravdivosti výroků A, B:

a) $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ b) $\neg(A \vee B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)$ c) $(\neg A \vee \neg B) \Rightarrow \neg(A \vee B)$

Příklad

a) $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

A	B	$B \Rightarrow A$	$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
1	1		
1	0		
0	1		
0	0		

Příklad

a) $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

A	B	$B \Rightarrow A$	$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
1	1	1	
1	0	1	
0	1	0	
0	0	1	

Příklad

a) $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

A	B	$B \Rightarrow A$	$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$
1	1	1	1
1	0	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1

Příklad

b) $\neg(A \vee B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)$

A	B	$\neg A$	$(A \vee B)$	$\neg(A \vee B)$	$(\neg A \Rightarrow B)$	$\neg(A \vee B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)$
1	1					
1	0					
0	1					
0	0					

Příklad

b) $\neg(A \vee B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)$

A	B	$\neg A$	$(A \vee B)$	$\neg(A \vee B)$	$(\neg A \Rightarrow B)$	$\neg(A \vee B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)$
1	1	0				
1	0	0				
0	1	1				
0	0	1				

Příklad

b) $\neg(A \vee B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)$

A	B	$\neg A$	$(A \vee B)$	$\neg(A \vee B)$	$(\neg A \Rightarrow B)$	$\neg(A \vee B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)$
1	1	0	1			
1	0	0	1			
0	1	1	1			
0	0	1	0			

Příklad

b) $\neg(A \vee B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)$

A	B	$\neg A$	$(A \vee B)$	$\neg(A \vee B)$	$(\neg A \Rightarrow B)$	$\neg(A \vee B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)$
1	1	0	1	0		
1	0	0	1	0		
0	1	1	1	0		
0	0	1	0	1		

Příklad

b) $\neg(A \vee B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)$

A	B	$\neg A$	$(A \vee B)$	$\neg(A \vee B)$	$(\neg A \Rightarrow B)$	$\neg(A \vee B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)$
1	1	0	1	0	1	
1	0	0	1	0	1	
0	1	1	1	0	1	
0	0	1	0	1	0	

Příklad

b) $\neg(A \vee B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)$

A	B	$\neg A$	$(A \vee B)$	$\neg(A \vee B)$	$(\neg A \Rightarrow B)$	$\neg(A \vee B) \wedge (\neg A \Rightarrow B)$
1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0	0

Příklad

c) $(\neg A \vee \neg B) \Rightarrow \neg(A \vee B)$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A \vee \neg B)$	$(A \vee B)$	$\neg(A \vee B)$	$(\neg A \vee \neg B) \Rightarrow \neg(A \vee B)$
1	1						
1	0						
0	1						
0	0						

Příklad

c) $(\neg A \vee \neg B) \Rightarrow \neg(A \vee B)$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A \vee \neg B)$	$(A \vee B)$	$\neg(A \vee B)$	$(\neg A \vee \neg B) \Rightarrow \neg(A \vee B)$
1	1	0	0				
1	0	0	1				
0	1	1	0				
0	0	1	1				

Příklad

c) $(\neg A \vee \neg B) \Rightarrow \neg(A \vee B)$

A	B	¬A	¬B	$(\neg A \vee \neg B)$	$(A \vee B)$	$\neg(A \vee B)$	$(\neg A \vee \neg B) \Rightarrow \neg(A \vee B)$
1	1	0	0	0			
1	0	0	1	1			
0	1	1	0	1			
0	0	1	1	1			

Příklad

c) $(\neg A \vee \neg B) \Rightarrow \neg(A \vee B)$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A \vee \neg B)$	$(A \vee B)$	$\neg(A \vee B)$	$(\neg A \vee \neg B) \Rightarrow \neg(A \vee B)$
1	1	0	0	0	1	0	
1	0	0	1	1	1	0	
0	1	1	0	1	1	0	
0	0	1	1	1	0	1	

Příklad

c) $(\neg A \vee \neg B) \Rightarrow \neg(A \vee B)$

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$(\neg A \vee \neg B)$	$(A \vee B)$	$\neg(A \vee B)$	$(\neg A \vee \neg B) \Rightarrow \neg(A \vee B)$
1	1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1

Příklad

Nacházíte se na ostrově padouchů a poctivců. Padouši vždy lžou, poctivci vždy mluví pravdu. Dva domorodci pronesou následující výroky:

A: „Oba jsme poctivci.“

B: „A je padouch.“

Jakou povahu mají domorodci A a B?

Příklad

Nacházíte se na ostrově padouchů a poctivců. Padouši vždy lžou, poctivci vždy mluví pravdu.

Dva domorodci pronesou následující výroky:

A: „Oba jsme poctivci.“

B: „A je padouch.“

Jakou povahu mají domorodci A a B?

a	b	$\neg a$	$a \wedge b$	$a \Leftrightarrow (a \wedge b)$	$b \Leftrightarrow \neg a$	$(a \Leftrightarrow (a \wedge b)) \wedge (b \Leftrightarrow \neg a)$
1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0

Příklad

Některý z žáků A, B, C rozbil okno. Je zjištěno, že v té době nebyl u okna žák A nebo u něho nebyl žák B. Když B nebyl u okna, nebyl tam ani A. Žák C byl u okna právě tehdy, když u něho nebyl žák A. Lze určit pachatele jednoznačně v případě, že byl právě jeden?

Příklad

Některý z žáků A, B, C rozbil okno. Je zjištěno, že v té době nebyl u okna žák A nebo u něho nebyl žák B. Když B nebyl u okna, nebyl tam ani A. Žák C byl u okna právě tehdy, když u něho nebyl žák A. Lze určit pachatele jednoznačně v případě, že byl právě jeden?

a	b	c	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \vee \neg b$	$\neg b \Rightarrow \neg a$	$c \Leftrightarrow \neg a$	$(\neg a \vee \neg b) \wedge (\neg b \Rightarrow \neg a) \wedge (c \Leftrightarrow \neg a)$
1	1	1						
1	1	0						
1	0	1						
1	0	0						
0	1	1						
0	1	0						
0	0	1						
0	0	0						

Příklad

Některý z žáků A, B, C rozbil okno. Je zjištěno, že v té době nebyl u okna žák A nebo u něho nebyl žák B. Když B nebyl u okna, nebyl tam ani A. Žák C byl u okna právě tehdy, když u něho nebyl žák A. Lze určit pachatele jednoznačně v případě, že byl právě jeden?

a	b	c	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \vee \neg b$	$\neg b \Rightarrow \neg a$	$c \Leftrightarrow \neg a$	$(\neg a \vee \neg b) \wedge (\neg b \Rightarrow \neg a) \wedge (c \Leftrightarrow \neg a)$
1	1	1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	1	0
0	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	1	0	1	0	1	1	0	0
0	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	0	0	1	1	1	1	0	0

Příklad

Jan, Karel a Petr se dohodli, že půjdou na brigádu za těchto podmínek:

a) Půjde-li na brigádu Karel, půjde i Petr

b) Nepůjde-li na brigádu Jan, nepůjde ani Petr

c) Na brigádu půjde Jan nebo Karel

Jaké jsou možnosti účasti těchto tří na brigádě?

Příklad

Jan, Karel a Petr se dohodli, že půjdou na brigádu za těchto podmínek:

a) Půjde-li na brigádu Karel, půjde i Petr

b) Nepůjde-li na brigádu Jan, nepůjde ani Petr

c) Na brigádu půjde Jan nebo Karel

Jaké jsou možnosti účasti těchto tří na brigádě?

K	J	P	$\neg J$	$\neg P$	$K \Rightarrow P$	$\neg J \Rightarrow \neg P$	$J \vee K$	$(K \Rightarrow P) \wedge (\neg J \Rightarrow \neg P) \wedge (J \vee K)$
1	1	1						
1	1	0						
1	0	1						
1	0	0						
0	1	1						
0	1	0						
0	0	1						
0	0	0						

Příklad

Jan, Karel a Petr se dohodli, že půjdou na brigádu za těchto podmínek:

a) Půjde-li na brigádu Karel, půjde i Petr

b) Nepůjde-li na brigádu Jan, nepůjde ani Petr

c) Na brigádu půjde Jan nebo Karel

Jaké jsou možnosti účasti těchto tří na brigádě?

K	J	P	¬J	¬P	K⇒P	¬J⇒¬P	J∨K	(K⇒P)∧(¬J⇒¬P)∧(J∨K)
1	1	1	0	0				
1	1	0	0	1				
1	0	1	1	0				
1	0	0	1	1				
0	1	1	0	0				
0	1	0	0	1				
0	0	1	1	0				
0	0	0	1	1				

Příklad

Jan, Karel a Petr se dohodli, že půjdou na brigádu za těchto podmínek:

a) Půjde-li na brigádu Karel, půjde i Petr

b) Nepůjde-li na brigádu Jan, nepůjde ani Petr

c) Na brigádu půjde Jan nebo Karel

Jaké jsou možnosti účasti těchto tří na brigádě?

K	J	P	¬J	¬P	K⇒P	¬J⇒¬P	J∨K	(K⇒P)∧(¬J⇒¬P)∧(J∨K)
1	1	1	0	0	1	1	1	
1	1	0	0	1	0	1	1	
1	0	1	1	0	1	0	1	
1	0	0	1	1	0	1	1	
0	1	1	0	0	1	1	1	
0	1	0	0	1	1	1	1	
0	0	1	1	0	1	0	0	
0	0	0	1	1	1	1	0	

Příklad

Jan, Karel a Petr se dohodli, že půjdou na brigádu za těchto podmínek:

a) Půjde-li na brigádu Karel, půjde i Petr

b) Nepůjde-li na brigádu Jan, nepůjde ani Petr

c) Na brigádu půjde Jan nebo Karel

Jaké jsou možnosti účasti těchto tří na brigádě?

K	J	P	¬J	¬P	K⇒P	¬J⇒¬P	J∨K	(K⇒P)∧(¬J⇒¬P)∧(J∨K)
1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	0

Příklad

Určete pravdivostní hodnoty složených výroků
$\neg(A \vee B)$ a $\neg A \wedge \neg B$ a porovnejte je.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1

Oba složené výroky mají stejné sloupce pravdivostních hodnot - říkáme, že jsou logicky ekvivalentní (rovnocenné).

Tautologie

Tautologie výrokové logiky jsou v podstatě „větami“ výrokové logiky. Ve výrokové logice máme celou řadu takových vět:

$(A \wedge B) \sim (B \wedge A)$	komutativnost konjunkce
$(A \vee B) \sim (B \vee A)$	komutativnost disjunkce
$(A \wedge B) \wedge C \sim A \wedge (B \wedge C)$	asociativnost konjunkce
$(A \vee B) \vee C \sim A \vee (B \vee C)$	asociativnost disjunkce
$(A \wedge B) \vee C \sim (A \vee C) \wedge (B \vee C)$	distributivnost disjunkce vzhledem ke konjunkci
$(A \vee B) \wedge C \sim (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$	distributivnost konjunkce vzhledem k disjunkci

Tautologie

$\neg(\neg A) \sim A$	zákon dvojité negace
$A \vee \neg A \sim 1$	zákon vyloučení třetí možnosti
$A \wedge \neg A \sim 0$	zákon sporu
$(A \Rightarrow B) \sim (\neg A \vee B)$	nahrazení implikace pomocí negace a disjunkce
$(A \Leftrightarrow B) \sim (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	nahrazení ekvivalence pomocí implikace a konjunkce
$\neg(A \vee B) \sim (\neg A \wedge \neg B)$	de Morganův zákon
$\neg(A \wedge B) \sim (\neg A \vee \neg B)$	de Morganův zákon
$(A \Rightarrow B) \sim (\neg B \Rightarrow \neg A)$	nahrazení implikace implikací obměněnou

Predikátová logika

Výroková forma (predikáty)

vyjádření, které obsahují jeden nebo i více blíže neurčených údajů proměnné

např. student X, $x < 3$

výrokové formy značíme $A(x)$, $B\ (x, y)$, atd.

$A(x)$ … výroková forma o jedné proměnné x

$B(x, y)$ … výroková forma o dvou proměnných x, y

např.

$$A(x)\text{: } x < 5$$

$$B(x, y)\text{: } x > y$$

Př.

Je dána výroková forma $A(x)$: $x < 5$.

Jestliže za x dosadíme číslo 4, dostaneme výrok $4 < 5$, který je pravdivý.
Dosadíme-li za x číslo 7, dostaneme nepravdivý výrok $7 < 5$.
Jestliže za x dosadíme slovo lavice, dostaneme sdělení, které nemá smysl.

Definiční obor, obor pravdivosti

Definičním oborem D výrokové formy A(x) o jedné proměnné x rozumíme množinu D, pro jejíž libovolný prvek d platí, že A(d) je výrok.

Po dosazení prvku z D za proměnnou dostáváme výrok, který nazýváme individuální. Ten může být pravdivý nebo nepravdivý.

Oborem pravdivosti A výrokové formy A(x) jedné proměnné x je podmnožina definičního oboru D, pro jejíž libovolný prvek a platí, že A(a) je pravdivý výrok.

Př.

Na definičním oboru $D = \{1, 2, 3, \ldots, 15\}$ jsou definovány výrokové formy $A(x)$: $5 \mid x$ a $B(x)$: $3 \mid x$. Nalezněte obory pravdivosti složených výrokových forem:

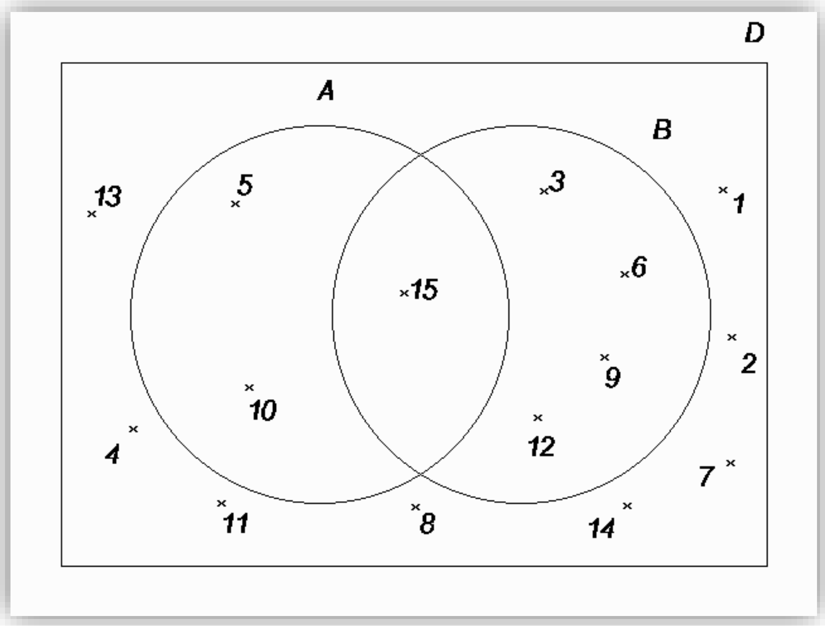
a) $\neg A(x)$ b) $A(x) \wedge B(x)$ c) $A(x) \vee B(x)$

Př.

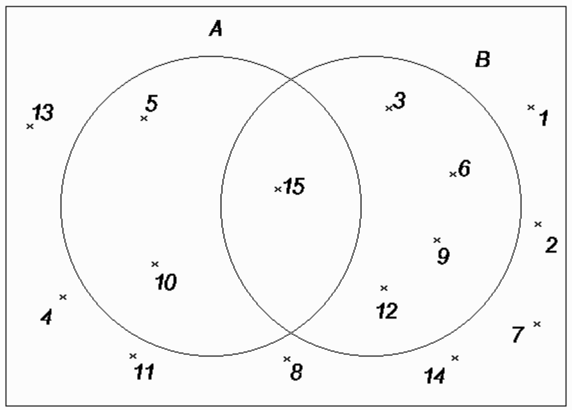
Řešení:

Oborem pravdivosti výrokové formy A(x) je množina $A = \{5, 10, 15\}$.

Oborem pravdivosti výrokové formy B(x) je množina $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$.



Př.



Řešení:

a) Oborem pravdivosti výrokové formy $\neg A(x)$ je množina $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14\}$.

b) Oborem pravdivosti složené výrokové formy $A(x) \wedge B(x)$ je množina $\{15\}$.

c) Oborem pravdivosti $A(x) \vee B(x)$ je množina $\{3, 5, 6, 9, 10, 12, 15\}$.

Složené výrokové formy (predikátové formule)

konjunkce

disjunkce

implikace

ekvivalence

Konjunkce výrokových forem

Konjunkcí výrokových forem A(x), B(x) o jedné proměnné x s týmž definičním oborem rozumíme výrokovou formu téže proměnné x s týmž definičním oborem, kterou zapisujeme $A(x) \wedge B(x)$ a z níž vznikne pravdivý výrok právě tehdy, když za proměnnou x dosadíme kterýkoliv prvek z definičního oboru, který dává pravdivé výroky po dosazení do obou výrokových forem A(x), B(x).

Disjunkce výrokových forem

Disjunkcí výrokových forem A(x), B(x) o jedné proměnné x s týmž definičním oborem rozumíme výrokovou formu téže proměnné x nad týmž definičním oborem, kterou zapisujeme $A(x) \vee B(x)$ a u níž vznikne pravdivý výrok právě tehdy, když za proměnnou x dosadíme kterýkoli prvek z definičního oboru, který dává pravdivý výrok po dosazení aspoň do jedné z výrokových forem A(x), B(x).

Implikace výrokových forem

Implikací výrokových forem A(x), B(x) o jedné proměnné x s týmž definičním oborem rozumíme výrokovou formu téže proměnné x nad týmž definičním oborem, kterou zapisujeme $A(x) \Rightarrow B(x)$ a u níž vznikne pravdivý výrok právě tehdy, když za proměnnou x dosadíme kterýkoli prvek z definičního oboru, který dává nepravdivý výrok po dosazení do výrokové formy A(x) (na pravdivosti výroku po dosazení do výrokové formy B(x) nezáleží) a jestliže po dosazení do výrokové formy A(x) i B(x) dává výrok pravdivý.

Ekvivalence výrokových forem

Ekvivalencí výrokových forem A(x), B(x) o jedné proměnné x s týmž definičním oborem rozumíme výrokovou formu téže proměnné x nad týmž definičním oborem, kterou zapisujeme $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ a z níž vznikne pravdivý výrok právě tehdy, když za proměnnou x dosadíme kterýkoli prvek z definičního oboru, který dává výroky ze stejnou pravdivostní hodnotou po dosazení do obou výrokových forem A(x), B(x).

Kvantifikovaný výrok

Př.

Uvažujte výrokovou formu s jednou proměnnou $A(x)$: $x < 5$, kde $x \in N$, připojte k ní po řadě sousloví "pro každé", "existuje aspoň jedno".

Řešení:

Dostaneme kvantifikované výroky:

a) Pro každé $x \in N$ platí $x < 5$.

Tento výrok je nepravdivý, neboť např. pro $x = 10$, není pravda, že $x < 5$.

b) Existuje aspoň jedno $x \in N$ takové, že platí $x < 5$.

Tento výrok je pravdivý, neboť např. číslo 3 je menší než číslo 5.

Kvantifikovaný výrok

Sousloví „pro každé“ budeme nazývat obecný kvantifikátor a značit symbolem $\forall$, sousloví „existuje aspoň jedno“ budeme nazývat existenční kvantifikátor a značit $\exists$.

Máme-li výrokovou formu A(x) s proměnnou x a definičním oborem D, potom kvantifikací výrokové formy A(x) rozumíme připojení jednoho z kvantifikátorů před výrokovou formu A(x).

a) $\forall x \in D; A(x)$ - čteme: Pro každé (pro libovolné, pro všechna) x z množiny D platí A(x). Uvedený výrok se nazývá výrok obecný.

b) $\exists x \in D; A(x)$ - čteme: Existuje aspoň jedno x z množiny D tak, že platí A(x). Uvedený výrok se nazývá výrok existenční.

Př.

Na definičním oboru $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ je dána výroková forma $A(x)\colon\ 5 \mid x$. Určete pravdivostní hodnotu kvantifikovaného výroku.

a) $\forall x \in D;\ A(x)$

b) $\exists\, x \in D;\ A(x)$

Řešení:

a) Pravdivost obecného výroku $\forall x \in D; 5 \mid x$ lze chápat jako zkratku pravdivostí výroku $[(5 \mid 1) \wedge (5 \mid 2) \wedge (5 \mid 3) \wedge (5 \mid 4) \wedge (5 \mid 5) \wedge (5 \mid 6) \wedge (5 \mid 7) \wedge (5 \mid 8) \wedge (5 \mid 9) \wedge (5 \mid 10)]$.

Konjunkce je nepravdivá, tedy $\forall$x $\in$ D; 5 | x je nepravdivý výrok.

b) Pravdivost existenčního výroku $\exists\, x \in D; 5 \mid x$ lze chápat jako zkratku pravdivosti výroku $[(5 \mid 1) \vee (5 \mid 2) \vee (5 \mid 3) \vee (5 \mid 4) \vee (5 \mid 5) \vee (5 \mid 6) \vee (5 \mid 7) \vee (5 \mid 8) \vee (5 \mid 9) \vee (5 \mid 10)]$.

Disjunkce je pravdivá, tedy $\exists\, x \in D\ ; 5 \mid x$ je pravdivý výrok.

Z výrokové formy můžete tvořit výroky:

dosazením za proměnnou z definičního oboru $\rightarrow$ vytvořený výrok se nazývá
individuální výrok

kvantifikací $\rightarrow$ vytvořený výrok se nazývá kvantifikovaný výrok

Negace kvantifikovaného výroku

Všechna okna v této místnosti jsou zavřena. Negujte tento obecný kvantifikovaný výrok.

Řešení:
Není pravda, že všechna okna v této místnosti jsou zavřena.
Znamená to, že existuje aspoň jedno okno v této místnosti, které není zavřeno.

Negace kvantifikovaného výroku

Negujte kvantifikované výroky a) $\forall x \in N;\ x < 5$, b) $\exists\, x \in N;\ x < 5$. Určete pravdivostní hodnoty výroků i jejich negací.

Řešení:

a) $\neg[\,\forall x \in N;\ x < 5\,] \sim \exists\, x \in N;\ x \geq 5$

Výrok $\forall x \in N;\ x < 5$ je nepravdivý, jeho negace $\exists\, x \in N;\ x \geq 5$ je pravdivá.

b) $\neg[\exists\, x \in N;\ x < 5\,] \sim \forall x \in N;\ x \geq 5$

Výrok $\exists\, x \in N;\ x < 5$ je pravdivý, jeho negace $\forall\, x \in N;\ x \geq 5$ je nepravdivá.

Negace kvantifikovaného výroku

Kvantifikovaný výrok negujeme tak, že zaměníme kvantifikátor a negujeme výrokovou formu.

$$\neg[\forall\, x \in M; A(x)] \sim \exists\, x \in M;\ \neg A(x)$$

$$\neg[\exists\, x \in M; A(x)] \sim \forall x \in M;\ \neg A(x)$$