Metody řešení matematických úloh 1

IMAp08 – podzimní semestr 2022

Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D.

1. setkání

Téma: INDUKTIVNÍ A DEDUKTIVNÍ METODY PŘI ŘEŠENÍ MATEMATICKÝCH ÚLOH

Dedukce

- logické vyvození,
- způsob logického myšlení postupujícího od obecného pravidla k jednotlivým případům,
- typ úsudku, při němž se z předpokladů použitím určitých pravidel dospívá k novému tvrzení, tzv. závěru, důsledku,
- je přechodem od obecného ke zvláštnímu.

Deduktivní metoda

- způsob výstavby vědecké teorie založený pouze na dedukci.
- uplatňuje se zpravidla v těch případech, kdy byl nahromaděn a teoreticky vyložen empirický materiál, který chceme uvést v systém, abychom mohli odvodit všechny důsledky plynoucí z přijatých předpokladů,
- takto vybudovaná vědecká teorie je vědecká deduktivní soustava.

Deduktivní metoda

- Užitím dedukce v matematice se vytvořila tzv. axiomatická metoda, která pomáhá budovat matematickou disciplínu (axiomaticky)

Axiomy →

- Věty obsahující **základní pojmy** a jejich vztahy
- Základní pojmy nedefinujeme

- Definujeme nové pojmy
- Odvozujeme další platné věty

Deduktivní metoda

Využití deduktivních závěrů:

- Při důkazech matematických vět (důkazové techniky = implikace)
- Při řešení matematických úloh (řetězením deduktivních závěrů dojdeme k řešení)

Matematická věta tvaru implikace

$$\mathbf{A(x)} \Longrightarrow \mathrm{B(x)}$$

předpoklad tvrzení

- Přímý důkaz: $A(x) \Longrightarrow A_1(x) \Longrightarrow A_2(x) \Longrightarrow \dots \Longrightarrow B(x)$
- Nepřímý důkaz: $\urcorner B(x) \Longrightarrow \urcorner A(x)$ (Věta obměněná k větě $A(x) \Longrightarrow B(x)$)

- Věta obměněná je ekvivalentní s původní větou, tj.

$$\mathbf{A(x)} \Longrightarrow \mathrm{B(x)} \sim \urcorner\, \mathrm{B(x)} \Longrightarrow \urcorner\, \mathrm{A(x)}$$

Důkaz matematické věty

Příklad 1: Dokažte, že pro každá dvě lichá přirozená čísla platí, že jejich součin je liché číslo.

Indukce

- Jeden z typů úsudků a metoda zkoumání, kdy se na základě pozorování jednotlivých případů vyvozují všeobecné závěry.
- Jedná se o postup od zvláštního k obecnému.

Indukce

jednotlivé případy → obecné pravidlo

Dedukce

obecné pravidlo → jednotlivé případy

Indukce a dedukce

- uplatňování indukce a dedukce souvisí s pozorováním, zkoumáním zákonitostí, zobecňováním.
- různé pokusy vést ostrou hranici mezi deduktivní metodou a induktivní se nezdařily, neboť obě metody jsou ve skutečnosti vnitřně spjaty.

V následujících příkladech vycházejte vždy z **induktivních postupů**, tj. ověřujte platnost uvedených pravidel pro několik přirozených čísel. Všímejte si zákonitostí a snažte se formulovat příslušné matematické věty. Věty pak dokažte.

Příklad 2:

Sčítání přirozených čísel – sčítejte postupně přirozená čísla a sledujte, jak se dá vyjádřit jejich součet:

Princip matematické indukce:

Chceme dokázat, že $\forall n \in \mathbb{N}: A(n)$

1. Dokážeme, že tvrzení platí pro $n = 1$
2. Předpokládáme, že tvrzení platí pro $n = k$ a dokážeme, že platí pro $n = k + 1$

Gaussova úloha:

Sečtěte všechna přirozená čísla od 1 do 100.

Příklad 3:

Sledujte součet několika lichých čísel a pokuste se tento součet obecně vyjádřit:

Příklad 4:

Určete součet všech lichých čísel od 1 do 100.

Příklad 5:

Sledujte součet několika sudých čísel a pokuste se tento součet obecně vyjádřit:

Příklad 6:

Určete součet všech sudých čísel od 1 do 100.

Příklad 7:

Vynásobte vždy po sobě jdoucí přirozená čísla a tento součin vynásobte čtyřmi. Všimněte si, jak se dá tento součin vyjádřit.

Příklad 8:

Vyberte si libovolná prvočísla $p > 3$ a sledujte následující vývoj:

Příklad 9:

Proveďte součin dvou rovných činitelů od 0 do 10 a sledujte číslo zapsané na místě jednotek.

Příklad 10:

Napište do řady násobky čísla 3 malé násobilky vzestupně.

Pod ně napište do řady násobky čísla 7 malé násobilky sestupně.

Pozorujte cifry na místě jednotek…

Příklad 11:

Vyjádřete obecně, kolik úhlopříček má konvexní n-úhelník.

Příklad 12:

Vyjádřete obecně, jaký je součet vnitřních úhlů konvexního n-úhelníka.

Příklad 13:

Uvažujme obdélníky s celočíselnými rozměry

1 x 49, 2 x 48, 3 x 47, 4 x 46, …

Tyto obdélníky mají obvod roven 100. Nalezněte ostrou nerovnost, která platí pro obsahy všech těchto obdélníků,