I. kolo kategorie Z5

Z5–I–1

Na louce bylo 45 ovcí a několik pastýřů. Po odchodu poloviny pastýřů a třetiny ovcí měli zbývající pastýři a ovce dohromady 126 nohou. Přitom všechny ovce a všichni pastýři měli obvyklé počty nohou.

Kolik pastýřů bylo původně na louce? (*L. Hozová*)

Z5–I–2

Marta hraje hru, ve které hádá pětimístné číslo tvořené navzájem různými číslicemi. Průběh prvních tří kol vypadá takto:

1. kolo	2	6	1	3	8
2. kolo	4	1	9	6	2
3. kolo	8	1	0	2	5

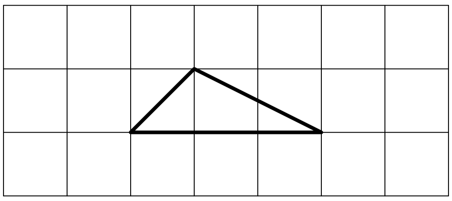
Barva políčka prozrazuje něco o číslici v něm obsažené:

- zelené políčko znamená, že číslice se v hádaném čísle vyskytuje, a to na tomtéž místě,
- žluté políčko znamená, že číslice se v hádaném čísle vyskytuje, ale na jiném místě,
- šedé políčko znamená, že číslice se v hádaném čísle nevyskytuje.

Vysvětlete, zda Marta může, či nemůže číslo s jistotou uhodnout v následujícím kole? (*J. Tkadlec*)

Z5–I–3

Ve čtvercové síti je dán trojúhelník, jehož vrcholy jsou uzlovými body sítě:



V dostatečně rozšířené síti nakreslete čtyři rozdílné (navzájem neshodné) mnohoúhelníky s dvojnásobným obvodem. (*E. Novotná*)

Z5–I–4

Nikola měla jedno trojmístné a jedno dvojmístné číslo. Každé z těchto čísel bylo tvořeno navzájem různými číslicemi. Rozdíl Nikoliných čísel byl 976.

Jaký byl jejich součet? (*L. Hozová*)

Do soutěže se přihlaste na http://osmo.matematickaolympiada.cz

Z5–I–5

Tři žáby se naučily skákat po žebříku. Každá dovede skákat jak nahoru, tak dolů, ovšem jen o určité počty příček. Žáby začínají na zemi a každá by se ráda dostala na svoji oblíbenou příčku:

- malá žába umí skákat o 2 nebo o 3 příčky a chce se dostat na sedmou příčku,
- střední žába umí skákat o 2 nebo o 4 příčky a chce se dostat na první příčku,
- velká žába umí skákat o 6 nebo o 9 příček a chce se dostat na třetí příčku.

Pro jednotlivé žáby rozhodněte, zda je jejich přání splnitelné. Pokud ano, popište jak. Pokud ne, vysvětlete proč. (*V. Hucíková*)

Z5–I–6

Jindra sbírá hrací kostky, všechny stejné velikosti. Včera našel krabičku, do níž začal kostky skládat. Jednou vrstvou kostek se mu podařilo přesně vyskládat čtvercové dno. Obdobně vyskládal pět dalších vrstev, ovšem v polovině následující vrstvy mu došly kostky. Dnes Jindra od babičky dostal 18 dalších kostek, které mu přesně chyběly na dokončení této vrstvy.

Kolik kostek měl Jindra včera? (*M. Petrová*)

72. ročník Matematické olympiády (2022/23)

I. kolo kategorie Z6

Z6–I–1

Pan Špaček byl známým chovatelem ptáků. Celkem jich měl více než 50 a méně než 100. Andulky tvořily devítinu a kanáři čtvrtinu celkového množství.

Kolik ptáků choval pan Špaček? (*L. Hozová*)

Z6–I–2

Václav násobil dvě trojmístná čísla obvyklým písemným způsobem. Ověřil, že výsledek je správně, a svůj výpočet někam založil. Po čase potřeboval výsledek použít. Našel sice svůj dřívější výpočet, ale mnoho číslic bylo tak rozmazaných, že nešly přečíst (hvězdičky nahrazují nečitelné číslice):

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & * & * & * \\
\times & & 1 & * & * \\
\hline
 & 2 & 2 & * & * \\
 & 9 & 0 & * & \\
* & * & 2 & & \\
\hline
5 & 6 & * & * & *
\end{array}
$$

Václav si už nepamatoval, která čísla násobil, přesto byl schopen určit jejich součin. Jaký byl onen součin? (*L. Hozová*)

Z6–I–3

Magda si vystřihla dva stejné rovnoramenné trojúhelníky, z nichž každý měl obvod 100 cm. Nejprve z těchto trojúhelníků složila čtyřúhelník tak, že je k sobě přiložila rameny. Poté z nich složila čtyřúhelník tak, že je k sobě přiložila základnami. V prvním případě jí vyšel čtyřúhelník s obvodem o 4 cm kratším než ve druhém případě.

Určete délky stran vystřižených trojúhelníků. (*E. Semerádová*)

Z6–I–4

Sedm trpaslíků se narodilo ve stejný den v sedmi po sobě jdoucích letech. Součet věků tří nejmladších trpaslíků byl 42 let. Když jeden trpaslík odešel se Sněhurkou pro vodu, zjistili zbylí trpaslíci, že jejich průměrný věk je stejný jako průměrný věk všech sedmi.

Kolik let bylo trpaslíkovi, který šel se Sněhurkou pro vodu? (*L. Hozová*)

Do soutěže se přihlaste na http://osmo.matematickaolympiada.cz

Z6–I–5

Pat a Mat se procvičovali v počítání. Ve čtvercové síti orientované podle světových stran přiřadili posunu o jedno políčko následující početní operace:

- při posunu na sever (S) přičítali sedm,
- při posunu na východ (V) odečítali čtyři,
- při posunu na jih (J) dělili dvěma,
- při posunu na západ (Z) násobili třemi.

Např. když Mat zadal Patovi číslo 5 a cestu S–V–J, vyšlo jim při správném počítání 4.

Které číslo zadal Pat Matovi, jestliže pro cestu S–V–J–Z–Z–J–V–S při správném počítání vyšlo 57? (*M. Petrová*)

Z6–I–6

Boris má zvláštní digitální hodiny. Jdou sice přesně, ale místo hodin a minut ukazují jiná dvě čísla: první je ciferným součtem číslic, která by byla na displeji za normálních okolností, druhé je součtem hodin a minut (např. v 7:30 ukazují 10:37).

Jaký může být čas, když Borisovy hodiny ukazují 6:15? Určete všechny možnosti. (*M. Dillingerová*)

I. kolo kategorie Z7

Z7–I–1

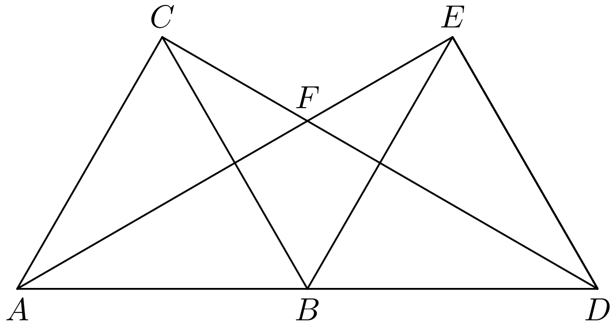
Průměrný věk dědy, babičky a jejich pěti vnoučat je 26 let. Průměrný věk samotných vnoučat je 7 let. Babička je o rok mladší než děda.

Kolik let je babičce? (*L. Hozová*)

Z7–I–2

Jsou dány dva shodné rovnostranné trojúhelníky ABC a BDE tak, že body A, B, D leží na jedné přímce a body C, E leží ve stejné polorovině vymezené onou přímkou. Průsečík CD a AE je označen F.

Určete velikost úhlu AFD. (*I. Jančigová*)



Z7–I–3

Obkročné číslo je takové přirozené číslo, v jehož zápise

- je každá nenulová číslice použita právě dvakrát,
- mezi dvěma stejnými nenulovými číslicemi se nachází právě tolik nul, jaká je hodnota těchto číslic.

Příklady obkročných čísel jsou např. 40001041 či 300103100.

Kolik existuje sedmimístných obkročných čísel, v jejichž zápise se vyskytují právě jedničky, dvojky a nuly? (*M. Papšo*)

Z7–I–4

Jarda měl napsánu posloupnost slabik:

ZU ZA NA NE LA LU CI SA MU EL

Písmena chtěl nahradit číslicemi od 0 do 9 tak, aby různým písmenům odpovídaly různé číslice a aby (v daném pořadí) vznikla vzestupná posloupnost dvojmístných čísel.

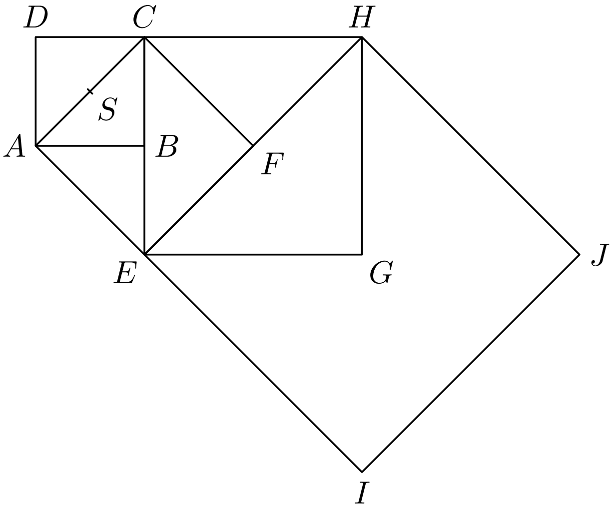
Uveďte možné Jardovo řešení, nebo vysvětlete, že to možné není. (*J. Zhouf*)

Do soutěže se přihlaste na http://osmo.matematickaolympiada.cz

Z7–I–5

Na obrázku jsou znázorněny čtverce $ABCD$, $EFCA$, $GHCE$ a $IJHE$. Body S, B, F a G jsou po řadě středy těchto čtverců. Úsečka AC je dlouhá 1 cm.

Určete obsah trojúhelníku IJS. (*E. Semerádová*)



Z7–I–6

Eva si myslela dvě přirozená čísla. Čísla nejprve správně sečetla, poté odečetla. V obou případech dostala dvojmístný výsledek. Součin takto vzniklých dvojmístných čísel byl 645.

Která čísla si Eva myslela? (*E. Novotná*)

I. kolo kategorie Z8

Z8–I–1

Jsou dána tři navzájem různá čísla. Průměr průměru dvou menších čísel a průměru dvou větších čísel je roven průměru všech tří čísel. Průměr nejmenšího a největšího čísla je 2022.

Určete součet tří daných čísel. (*K. Pazourek*)

Z8–I–2

Čtyřúhelník $ABCD$ je kosočtvercem se stranou délky 6 cm a výškou 4 cm. Bod E je středem strany AD, bod G je středem strany BC, bod F je průsečíkem úseček AG a BE, bod H je průsečíkem úseček CE a DG.

Určete obsah čtyřúhelníku $EFGH$. (*K. Pazourek*)

Z8–I–3

Pro posloupnost čísel začínající

$$1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ 18,\ \ldots$$

platí, že každé číslo počínaje třetím je součtem předchozích dvou.

Kterou číslicí končí 2023. číslo v této posloupnosti? (*J. Mazák*)

Z8–I–4

Ctibor na mapě s měřítkem 1 : 50 000 vyznačil čtvercový pozemek a vypočítal si, že jeho strana ve skutečnosti odpovídá 1 km. Mapu zmenšil na kopírce tak, že vyznačený čtverec měl obsah o $1{,}44\,\mathrm{cm}^2$ menší než původně.

Jaké bylo měřítko takto zmenšené mapy? (*M. Petrová*)

Z8–I–5

Petra měla napsána přirozená čísla od 1 do 9. Dvě z těchto čísel sečetla, smazala a výsledný součet napsala místo smazaných sčítanců. Měla tak napsáno osm čísel, která se jí podařilo rozdělit do dvou skupin se stejným součinem.

Určete jaký největší mohl být tento součin. (*E. Novotná*)

Z8–I–6

Je dán obdélník $ABCD$ a body E, F tak, že trojúhelníky BEC a CFD jsou rovnostranné a každý z nich má s pravoúhelníkem $ABCD$ společnou pouze stranu.

Zdůvodněte, že také trojúhelník AEF je rovnostranný. (*J. Švrček*)

Do soutěže se přihlaste na http://osmo.matematickaolympiada.cz

I. kolo kategorie Z9

Z9–I–1

Aritmetická posloupnost je taková posloupnost čísel, v níž je rozdíl každého čísla od čísla jemu předcházejícího stále stejný; tomuto rozdílu se říká *diference*. (Např. 2, 8, 14, 20, 26, 32 je aritmetická posloupnost s diferencí 6.)

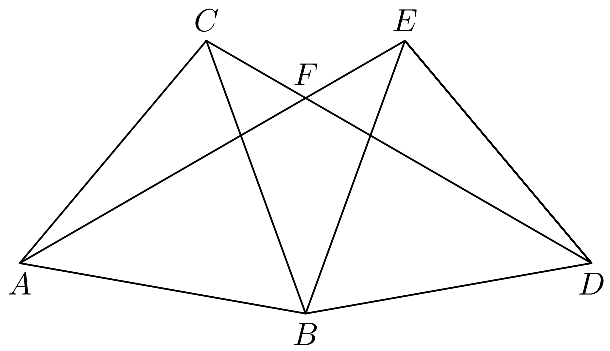
Bolek a Lolek měli každý svou aritmetickou posloupnost. Jak Bolkova, tak Lolkova posloupnost začínala číslem 2023 a končila číslem 3023. Tyto dvě posloupnosti měly 26 společných čísel. Poměr Bolkovy a Lolkovy diference byl 5 : 2.

Určete rozdíl Bolkovy a Lolkovy diference. (*E. Novotná*)

Z9–I–2

Jsou dány dva shodné rovnostranné trojúhelníky ABC a BDE tak, že velikost úhlu ABD je větší než 120° a menší než 180° a body C, E leží ve stejné polorovině vymezené přímkou AD. Průsečík CD a AE je označen F.

Určete velikost úhlu AFD. (*I. Jančigová*)



Z9–I–3

Tři kouzelníci kouzlí s čísly, každý však umí jen jedno kouzlo:

- první kouzelník umí od libovolného čísla odečíst jedna,
- druhý kouzelník umí libovolné číslo vydělit dvěma,
- třetí kouzelník umí libovolné číslo vynásobit třemi.

Kouzelníci se při čarování mohou libovolně střídat, každý však může svoje kouzlo během jednoho vystoupení použít nejvýše pětkrát a žádný mezivýsledek nesmí být větší než 10. Při jednom vystoupení měli z dané pětice čísel 3, 8, 9, 2, 4 vykouzlit pětici trojek, při jiném vystoupení měli z téže pětice čísel vykouzlit pětici pětek.

Jak si mohli s problémem poradit? Najděte možná řešení, nebo vysvětlete, proč to možné není. (*E. Novotná*)

Do soutěže se přihlaste na http://osmo.matematickaolympiada.cz

Z9–I–4

Najděte nejmenší kladná celá čísla a a b, pro která platí

$$7a^3 = 11b^5.$$

(*A. Bohiniková*)

Z9–I–5

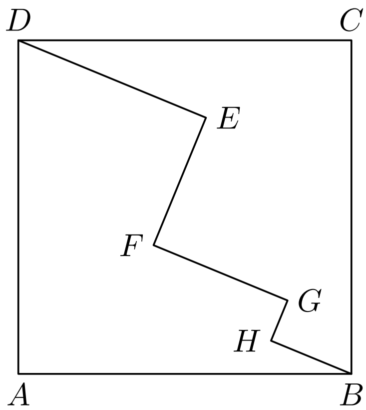
Na snovém tržišti nabídla Sfinga cestovateli za čtyři sny sedm iluzí, dva šlofíky a jednu noční můru. Jinému cestovateli tatáž Sfinga nabídla za sedm snů čtyři iluze, čtyři šlofíky a dvě noční můry. Sfinga měří všem cestovatelům vždy stejně.

Kolik iluzí stál jeden sen? (*K. Pazourek*)

Z9–I–6

Vrcholy čtverce $ABCD$ spojuje lomená čára $DEFGHB$. Menší úhly u vrcholů E, F, G, H jsou pravé a úsečky DE, EF, FG, GH, HB po řadě měří 6 cm, 4 cm, 4 cm, 1 cm, 2 cm.

Určete obsah čtverce $ABCD$. (*M. Dillingerová*)



Do soutěže se přihlaste na http://osmo.matematickaolympiada.cz