Předmět: **IMAp03 a IMAk03 Aritmetika 1**

Vyučující*: doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc., Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D., RNDr. Milena Vaňurová, CSc.*

# Vybrané typy úloh k písemné části zkoušky

1. Jsou dány množiny M = $\{1,2,3,4\}$ a N = $\{a,b,c,d\}$.
   a) Definujte výčtem prvků relaci R z množiny M do N, která není zobrazením.
   b) Definujte relaci Z, která je zobrazením z množiny N do M a určete přesně jeho typ.
   c) Zapište výčtem prvků relaci R•Z a rozhodněte, zda je tato relace zobrazením. Pokud ano, určete, zda je prosté.
   d) Zapište dvě různé bijekce množiny N na množinu M.
   e) Na množině N definujte dvě různé permutace $P_1$, $P_2$ a určete permutace $P_1 \bullet P_2$ a $P_2 \bullet P_1$.

2. Je dána množina M = $\{1,2,3\}$. V množině M jsou dány relace R, T, U, V takto:
   R = $\{[x,y] \in M \times M;\ x \neq y \Rightarrow x+y=5\}$, T = $\{[x,y] \in M \times M;\ x \neq 2 \vee y = x+1\}$,
   U = $\{[x,y] \in M \times M;\ x < 3 \wedge y = x+1\}$, V = $\{[1,3],[2,1],[3,2]\}$.
   a) Rozhodněte a zdůvodněte, zda jsou některé z relací R, T, U, V zobrazení v množině M. Pokud ano, určete přesně jejich typ. Je některá z těchto relací permutací na množině M?
   b) Zapište relace $R^{-1}$, $V^{-1}$, V•V, U•V, R•U, R•(V•U). Je některá z těchto relací zobrazením v množině M? Pokud ano, určete přesně typ.

3. Rozhodněte a zdůvodněte, které z vlastností ND, A, K, EN, EI, ZR má v množině M = $\{a,b,c\}$ operace * :

| * | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | | a | b |
| b | a | b | c |
| c | b | c | b |

| * | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | b | a | c |
| b | c | b | a |
| c | a | c | b |

| * | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | c | a | a |
| b | | c | b |
| c | a | b | c |

| * | a | b | c |
|---|---|---|---|
| a | a | b | c |
| b | b | a | c |
| c | c | b | a |

4. V množině M = $\{a,b,c\}$ definujte tabulkou aspoň jednu binární operaci, která má vlastnosti:
   a) $K \wedge \cancel{EN}$ b) $ND \wedge \cancel{K} \wedge EN$ c) $ND \wedge EN \wedge \cancel{EI}$ d) $A \wedge \cancel{ZR}$ e) $\cancel{K} \wedge EN \wedge \cancel{EI}$ f) $EI \wedge ZR$ g) $ND \wedge \cancel{A} \wedge EI \wedge \cancel{ZR}$
   U všech nalezených operací určete i zbývající vlastnosti. Rozhodněte, zda v M existuje agresivní prvek vzhledem k jednotlivým operacím. Stanovte přesně typy algebraických struktur, které množina M spolu s jednotlivými operacemi tvoří.

5. Rozhodněte a zdůvodněte, které vlastnosti má operace $\circ$ v množině **N** (**C, Q, R**) :
   a) $x \circ y = 2x + y$ b) $x \circ y = x + y + 1$ c) $x \circ y = 2x + 2y$
   d) $x \circ y = 2x - y$ e) $x \circ y = x + y - 2$ f) $x \circ y = x - 2y$
   g) $x \circ y = xy + 1$ h) $x \circ y = x + y + xy$ i) $x \circ y = \frac{1}{2}(x + y)$

Vyučující: *doc. RNDr. Jaroslav Beránek, CSc., Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D., RNDr. Milena Vaňurová, CSc.*

6. Rozhodněte, které vlastnosti mají (nemají) operace určující níže uvedené algebraické struktury a přesně určete typ každé z nich (symboly +, - , ·, : označují obvyklé číselné operace):
   $(\mathbf{N}, +)$, $(\mathbf{N}, -)$, $(\mathbf{N}, \cdot)$, $(\mathbf{N}, :)$, $(\mathbf{C}, +)$, $(\mathbf{C}, -)$,
   $(\mathbf{C}, \cdot)$, $(\mathbf{C}, :)$, $(\mathbf{Q}, \cdot)$, $(\mathbf{N}, +, \cdot)$, $(\mathbf{C}, +, \cdot)$, $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$
   $(P(\mathrm{M}), \cup)$, $(P(\mathrm{M}), \cap)$, $(P(\mathrm{M}), \cup, \cap)$, $(P(\mathrm{M}), \cap, \cup)$, kde $P(\mathrm{M})$ je potenční systém množiny $\mathrm{M} = \{a, b,\}$

7. Množina $\mathrm{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ je množina všech přirozených čísel. Určete 2 její podmnožiny, které jsou a) konečné , b) nekonečné .

8. Zvolte si výčtem prvků tři navzájem různé konečné množiny A, B, C tak, že množiny A, B mají společné dva prvky.
   a) Rozhodněte a zapište, zda jsou některé dvě z těchto množin ekvivalentní.
   b) Porovnejte kardinální čísla množin A, B, C. Tvrzení zdůvodněte podle definice nerovnosti mezi kardinálními čísly.
   c) Určete $|A| + |B|$, $|A| + |C|$, $|B| + |C|$, $|A| \mathbf{.} |B|$, $|A| \mathbf{.} |C|$.

9. Dokažte, že pro každá dvě celá čísla A, B platí:
   a) $-(A + B) = (-A) + (-B)$ b) $(-A) \mathbf{.} B = -(A \mathbf{.} B)$ c) $(-A) \mathbf{.} (-B) = A \mathbf{.} B$
   (v důkazu využijte této reprezentace: $A = [\,a \overset{\bullet}{,} b\,]$, $B = [\,c \overset{\bullet}{,} d\,]$).

10. Pro celá čísla A, B, X platí A + X = B. Určete celé číslo $X = [\,x \overset{\bullet}{,} y\,]$, jestliže
    $A = [\,1 \overset{\bullet}{,} 3\,]$, $B = [\,7 \overset{\bullet}{,} 2\,]$ .

11. Dokažte, že sčítání a násobení celých čísel jsou komutativní a asociativní operace a že násobení je distributivní vzhledem ke sčítání. (Pomocí tříd uspořádaných dvojic přirozených čísel.)

12. Dokažte, že rovnice $A \mathbf{.} X = B$ nemá v množině všech celých čísel řešení pro
    $A = [\,3 \overset{\bullet}{,} 0\,]$, $B = [\,0 \overset{\bullet}{,} 4\,]$ .

13. Pomocí tříd uspořádaných dvojic přirozených čísel zapište dvě kladná celá čísla a dvě záporná celá čísla.

14. Zapište tři uspořádané dvojice přirozených čísel, která reprezentují
    a) celé číslo O (nula) b) celé číslo J (jedna)

15. Jsou dána celá čísla $A = [\,1 \overset{\bullet}{,} 3\,]$, $B = [\,4 \overset{\bullet}{,} 5\,]$.
    a) Vypočítejte A + B , A . B, A – B. b) Porovnejte čísla A, B.
    Vyřešte úlohu pro několik dalších dvojic celých čísel.

16. Dokažte, že pro každá tři celá čísla A, B, C platí: $(A < B \wedge C < 0) \Rightarrow A \cdot C > B \cdot C$ .
    Dokažte alespoň jednu další vlastnost relace „<“ v úloze 16 na s. 199 v učebnici.

17. Vypočtěte: $a + |b| \, . \, |a| - |-a| + |a \, . \, b| - |a|^2 + |-b|$ pro $a = -6$ , $b = 3$ .

*18.* Dokažte, že pro každé celé číslo $a$ platí $|a| = |-a|$ .

19. Dokažte, že sčítání a násobení racionálních čísel jsou komutativní a asociativní operace a že násobení je distributivní vzhledem ke sčítání.(Pomocí tříd zlomků.)

20. Zvolte si dvě záporná a jedno kladné celé číslo. Tato tři čísla dělte postupně číslem 7 a číslem (−5). Ve všech šesti případech určete neúplný podíl a zbytek.

21. Zapište čtyři zlomky, které reprezentují totéž kladné racionální číslo. Dále zapište čtyři zlomky, které reprezentují jedno záporné racionální číslo. U obou čísel určete jejich desetinný rozvoj. Rozhodněte, zda jsou zvolená čísla čísly desetinnými.

22. Zapište zlomek, který reprezentuje racionální číslo
    a) 3,56 b) $1,\overline{43}$ c) $0,2\overline{7}$ d) $0,1\overline{9}$

**Součástí písemné části zkoušky jsou definice pojmů** studovaných v předmětech: **Základy algebry a aritmetiky** a **Aritmetika 1**