

# IMAk13 a IMAp13 Matematika 3

Podzim 2022

Mgr. Jitka Panáčková, Ph.D., RNDr. Milena Vaňurová, CSc.

## Kartézský součin množin, binární relace, zobrazení - opakování

**Kartézský součin množin A, B** je množina, ozn.  $A \times B$ , která se skládá ze všech uspořádaných dvojic, jejichž první složkou je prvek množiny A a druhou složkou prvek množiny B.

**Binární relace z množiny A do množiny B** je kterákoliv množina R, která je podmnožinou kartézského součinu  $A \times B$ .

(Pokud  $A = B$ , pak mluvíme o **binární relaci v množině A** – a jde o libovolnou podmnožinu kartézského součinu  $A \times A$ .)

**Doplňková relace  $R'$  k relaci R v množině A** je množina všech uspořádaných dvojic z  $A \times A$ , které nepatří do relace R, tj.  $R' = (A \times A) - R$ .

**Inverzní relace  $R^{-1}$  k relaci R v množině A** je relace  $R^{-1} = \{[x,y] \in A \times A; [y,x] \in R\}$

První obor relace  $O_1(R)$  je množina všech prvních složek uspořádaných dvojic z relace R.

Druhý obor relace  $O_2(R)$  je množina všech prvních složek uspořádaných dvojic z relace R.

Relace R z množiny A do množiny B se nazývá **zobrazením z A do B**, právě když ke každému prvku  $a \in A$  existuje nejvýše jeden prvek  $b \in B$  takový, že platí  $[a,b] \in R$ .

(Tedy každý prvek z množiny A se může vyskytnout jako první složka uspořádané dvojice v relaci R nejvýše jednou.)

Jestliže  $[a,b] \in R$ , pak prvek  $a$  nazýváme **vzorem** prvku  $b$  a prvek  $b$  **obrazem** prvku  $a$  v zobrazení R (nebo že zobrazení R přiřazuje prvku  $a$  prvek  $b$ ).

### Příklad:

Jsou dány množiny A, B:  $A = \{a, b, c, d\}$ ,  $B = \{1, 2, 3\}$ . Rozhodněte, které z binárních relací  $R_1 - R_5$  jsou zobrazení z A do B.

$R_1 = \{[a,1], [b,2], [d,3]\}$  - je zobrazení

$R_2 = \{[a,2], [c,1], [a,3], [b,3]\}$  - není zobrazení - prvek  $a$  je 1. složkou ve dvou dvojicích

$R_3 = \{[a,1], [b,2], [c,3], [d,1]\}$  - je zobrazení

$R_4 = \{[b,3]\}$  - je zobrazení

$R_5 = \{[a,2], [c,1], [d,2], [b,3]\}$  - je zobrazení

### Typy zobrazení:

Podle toho, jaký je vztah mezi prvním oborem relace R a množinou A a druhým oborem relace R a množinou B, rozlišujeme:

**zobrazení celé množiny A na necelou množinu B**, je-li  $O_1(R) = A$  a  $O_2(R) \neq B$ ,

(tzn. každý prvek z A je vzorem a v B existuje aspoň jeden prvek, který není obrazem žádného prvku z A),

**zobrazení necelé množiny A na celou množinu B**, je-li  $O_1(R) \neq A$  a  $O_2(R) = B$ ,

(tzn. v A existuje prvek, který není vzorem žádného prvku z B a každý prvek z B je aspoň jednou obrazem nějakého prvku z A)

**zobrazení necelé množiny A na necelou množinu B**, je-li  $O_1(R) \neq A$  a  $O_2(R) \neq B$ ,

(tzn. v A existuje prvek, který není vzorem žádného prvku z B a v B existuje aspoň jeden prvek, který není obrazem žádného prvku z A)

**zobrazení celé množiny A na celou množinu B**, je-li  $O_1(R) = A$  a  $O_2(R) = B$ .

(tzn. každý prvek z A je vzorem a každý prvek z B je aspoň jednou obrazem nějakého prvku z A)

Každé z uvedených typů zobrazení může být navíc **prosté zobrazení**:

# IMAk13 a IMAp13 Matematika 3

Podzim 2022

Mgr. Jitka Panáčová, Ph.D., RNDr. Milena Vaňurová, CSc.

---

**Zobrazení**  $R$  z  $A$  do  $B$  se nazývá **prosté**, právě když každé dva různé vzory mají různé obrazy. (Jinak řečeno: Zobrazení je prosté, právě když relace inverzní  $R^{-1}$  je zobrazením z  $B$  do  $A$ .)

**Prosté zobrazení celé množiny na celou množinu** se nazývá **vzájemně jednoznačné zobrazení**.

Říkáme, že dvě **množiny**  $A, B$  jsou **ekvivalentní** ( $A \sim B$ ), právě když existuje aspoň jedno prosté zobrazení (=vzájemně jednoznačné zobrazení) jedné z těchto množin na druhou.

## Cvičení:

1. Rozhodněte přesně o typu jednotlivých zobrazení ve výše uvedeném příkladu včetně toho, zda jsou prostá .
2. Zapište několik zobrazení z množiny  $M$  do množiny  $N$  tak, abyste na nich mohli ilustrovat jednotlivé typy zobrazení.  $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $N = \{x, y, z, u, v\}$ .
3. Uvažujte množinu všech cestujících v jisté tramvaji, množinu všech sedadel v této tramvaji a binární relaci určenou vztahem „Osoba  $X$  sedí na sedadle  $Y$ “. Přemýšlejte o různých situacích v této tramvaji (např. Každý cestující sedí na jednom sedadle a ještě jsou dvě místa volná.) a rozhodněte, zda se jedná o zobrazení z množiny cestujících do množiny sedadel. Pokud ano, určete přesně typ tohoto zobrazení.
4. Rozhodněte a zdůvodněte, zda jsou některé z množin ve výše uvedeném textu ekvivalentní?
5. Zdůvodněte, že množina  $N$  všech přirozených čísel  $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$  je ekvivalentní s množinou  $S$  všech sudých čísel  $S = \{2, 4, 6, \dots\}$  a množinou všech desetinásobků přirozených čísel  $D = \{10, 20, 30, \dots\}$ .  
(návod: Je potřeba najít prosté zobrazení množiny  $N$  na množinu  $S$  a na množinu  $D$ .)

Připomněte si: Množina je **nekonečná**, právě když je ekvivalentní se svou vlastní podmnožinou.

Ve cvičení 5 jste tedy zdůvodnili nekonečnost množiny všech přirozených čísel. Množina  $N$  je ekvivalentní se svou vlastní podmnožinou ( $N \sim S$ ,  $S \subset N$ ,  $S \neq N$ ).