Základy matematiky (MA-0001)

verze duben 2020

Břetislav Fajmon

Obsah

1 Logické spojky, univerzální výroky, důkaz výčtem pravdivostních hodnot 5
- 1.1 Přednáška . . . 6
- 1.2 Cvičení . . . 13

2 Důkaz implikace (přímý a nepřímý), důkaz ekvivalence 14
- 2.1 Přednáška . . . 15
- 2.2 Cvičení . . . 18

3 Důkaz sporem, indukcí, konstrukcí a protipříkladem 20
- 3.1 Přednáška . . . 20
- 3.2 Cvičení . . . 23

4 Operace s množinami, důkaz užitím Vennových diagramů, kartézský součin 25
- 4.1 Přednáška . . . 25
- 4.2 Cvičení . . . 29

5 Dělitelnost celých čísel, důkaz užitím Dirichletova principu, operace s komplexními čísly 32
- 5.1 Přednáška . . . 32
- 5.2 Cvičení . . . 39

6 Binární relace a její vlastnosti 41
- 6.1 Přednáška . . . 41
- 6.2 Cvičení . . . 46

7 Ekvivalence a rozklady 48
- 7.1 Přednáška . . . 48
- 7.2 Cvičení . . . 50

8 Uspořádané množiny, maximální prvek, největší prvek, supremum 52
- 8.1 Přednáška . . . 52
- 8.2 Cvičení . . . 59

9 Zobrazení, posloupnost, funkce, operace 62
- 9.1 Přednáška . . . 62
- 9.2 Cvičení . . . 66

10 Lineární a kvadratické funkce 68
- 10.1 Přednáška . . . 68
- 10.2 Cvičení . . . 69

11 Lineárně lomené funkce, mocninné a odmocninné funkce 71
- 11.1 Přednáška . . . 71
- 11.2 Cvičení . . . 73

12 F) = Funkce exponenciální a logaritmické **75**
12.1 Přednáška . . . 75
12.2 Cvičení . . . 76

13 G) = Goniometrické funkce **79**
13.1 Přednáška . . . 79
13.2 Cvičení . . . 88

14 Vlastnosti funkce – shrnutí **92**
14.1 Přednáška . . . 92
14.2 Vlastnosti funkce – shrnující cvičení . . . 95

15 Výsledky některých příkladů **97**
15.1 Výsledky ke kapitole 1.2 – logické spojky, univerzální výroky, důkaz výčtem pravdivostních hodnot . . . 97
15.2 Výsledky ke kapitole 2.2 – důkaz implikace (přímý a nepřímý), důkaz ekvivalence . . . 98
15.3 Výsledky ke kapitole 3.2 – důkaz sporem, indukcí, konstrukcí a protipříkladem 100
15.4 Výsledky ke kapitole 4.2 – Operace s množinami, důkaz užitím Vennových diagramů, kartézský součin . . . 103
15.5 Výsledky ke kapitole 5.2 – Dělitelnost celých čísel, důkaz užitím Dirichletova principu, operace s komplexními čísly . . . 107
15.6 Výsledky ke kapitole 6.2 – Binární relace a její vlastnosti . . . 109
15.7 Výsledky ke kapitole 7.2 – ekvivalence a rozklady . . . 114
15.8 Výsledky ke kapitole 8.2 – Uspořádané množiny, maximální prvek, největší prvek a supremum . . . 117
15.9 Výsledky ke kapitole 9.2 – Zobrazení, funkce, posloupnost, operace . . . 122
15.10 Výsledky ke kapitole 10.2 – Lineární a kvadratické funkce . . . 124
15.11 Výsledky ke kapitole 11.2 – Lineárně lomené funkce, funkce mocninné a odmocninné . . . 126
15.12 Výsledky ke kapitole 12.2 – Funkce exponenciální a logaritmické . . . 133
15.13 Výsledky ke kapitole 13.2 – Funkce goniometrické a cyklometrické . . . 138
15.14 Výsledky ke kapitole 14.2 – Vlastnosti funkce – shrnutí . . . 141

Úvod

Tato skripta jsou vytvářena jako podpora přednášek i cvičení do předmětů Základy matematiky (MA-0001) na PdF MU Brno. Studenti se v nich seznámí či připomenou si základní matematické pojmy a základní matematické principy.

První základní věcí zde probíranou jsou **principy logického usuzování a metody prokazování platnosti matematických tvrzení** – v textu čtenář najde tuto problematiku v prvních třech kapitolách a v devíti typech důkazů. Tyto důkazy pak hrají roli při potvrzení platnosti asi sedmnácti matematických vět v textu uvedených (číslování vět je podbarveno červeně) a jsou příkladem práce s matematickou preciznosti, kdy uživatel matematiky nejen zjistí, že platí určité vzorce a zákonitosti, ale také by měl možnost se přesvědčit, proč platí, a to na základě známých pojmů a matematických tvrzení dokázaných již dříve.

Druhou základní věcí tohoto předmětu některé zmínky **o množině celých čísel a množině komplexních čísel**. Těm budou věnovány týdny 4 a 5. Zatímco celá čísla jsou důležitou množinou čísel, které se žáci věnují na ZŠ (např. v tématech kladná a záporná čísla, dělitelnost, atd.), několik zmínek bude učiněno také o komplexních číslech, která obvykle na SŠ jsou přeskakována. Studenti je také přeskočí a vrátí se k nim ještě v předmětu Algebra 3, ale nyní se alespoň seznámí s reprezentací komplexních čísel v Gaussově rovině a s operacemi sčítání, násobení a dělení těchto čísel.

Třetím tématem a nejdůležitějším pojmem tohoto předmětu je po dvouhodnotové logice a pojmech množiny a kartézského součinu množin **pojem relace** – tento pojem je základním pojmem předmětu. Studenti prozkoumají některé vlastnosti známých relací $\leq$, $\subseteq$, relace dělitelnosti $|$, a pak se seznámí s faktem, že při matematicky přesném popisu jsou na pojmu binární relace založeny pojmy ekvivalence, uspořádání, zobrazení, posloupnost, funkce a binární operace. Výstavbě těchto pojmů a jejich vlastnostem budou věnovány týdny 6 až 9. Definice těchto i dalších pojmů v textu jsou podbarveny zeleně.

Čtvrtým tématem tohoto předmětu budou základní reálné **funkce jedné proměnné a jejich vlastnosti** – probíráno v týdnech 10 až 13. S určováním vlastností funkcí souvisí dovednost i nakreslit jejich graf, která bude u těchto základních funkcí procvičována s největším důrazem, protože poskytuje jakýsi „geometrický“ či grafický obraz o předpisech funkcí, které matematika dodává dalším oborům lidského bádání a podnikání. Tuto dovednost budou studenti dále rozvíjet v předmětu Matematická analýza 1 (MA-0004), ale už v předmětu Základy matematiky by si měli zopakovat na úrovni SŠ či se naučit pracovat s vlastnostmi a grafy některých elementárních funkcí.

Pátou základní věcí, která prostupuje celým textem, je úkol naučit se **rozumět matematickému zkrácenému (symbolickému) zápisu** – jedná se vlastně o jakýsi symbolický jazyk matematiky, který je hojně využíván v jakýchkoli matematických metodách a popisech. Většina takto opakovaných či definovaných značek a symbolů v tomto textu je označena žlutě. Dovednost spočívající ve čtení a psaní (používání) tohoto stručného matematického zápisu bude také v předmětu zkoušena, a rozvíjena dále v předmětech Algebra 1 a Algebra 2.

And last but not least, tento předmět je specifický v tom, že je vyučován na pedagigické fakultě studentům, kteří aspirují na povolání učitele matematiky 6. až 9. ročníku ZŠ. Proto bude jeho součástí představení některých učebnic matematiky na ZŠ. Přehled osnov výuky v 6. až 9. ročníku uvádí např. nově vznikající série učebnic (Jedličková, Krupka, Nechvátalová 2012 – 2020, poslední tři učebnice série vycházejí v průběhu roku 2020 a zatím jsou doplněny analogickými dostupnými tituly):

NŠ01 Krupka a kol.: Desetinná čísla.

NŠ02 Krupka a kol.: Kladná a záporná čísla.

NŠ03 Krupka a kol.: Dělitelnost.

NŠ04 Krupka a kol.: Základy geometrie.

NŠ05 Krupka a kol.: Shodnost geometrických útvarů, souměrnosti.

NŠ06 Krupka a kol.: Zlomky, poměr.

NŠ07 Krupka a kol.: Procenta, trojčlenka.

NŠ08 Krupka a kol.: Rovinné útvary.

NŠ09 Krupka a kol.: Výrazy a rovnice 1.

NŠ10 Krupka a kol.: Hranoly a válce.

NŠ11 Krupka a kol.: Konstrukční úlohy.

NŠ12 Krupka a kol.: Výrazy a rovnice 2.

NŠ13 Krupka a kol.: Práce s daty, úměrnosti a funkce.

14HER15 Herman a kol.: Podobnost a funkce úhlu.

15HER16 Herman a kol.: Jehlany a kužely.

16ODV Odvárko: Finanční matematika.

Tento text vznikl v roce 2017-2020, bude použit jako doplněk výuky přednášek i cvičení. Budu vděčný, když mne upozorníte na případné chyby. Text není v určitých částech „samonosný“, zejména v kapitolách 9 až 14 (vlastnosti reálných funkcí), ale opírá se o další materiály, které najdete online nebo v knihovně.

Břetislav Fajmon, Brno, duben 2020

1 Logické spojky, univerzální výroky, důkaz výčtem pravdivostních hodnot

Warm-up: Podívejme se na úvod do tématu logika na několik úloh ze soutěže matematický klokan, kategorie Benjamín (6.-7. třída ZŠ), které souvisí s logikou. Tyto úlohy minimálně představují, do jaké míry se v dnešní době učí logice děti na ZŠ, i když se jedná jen o nepovinnou soutěž. Odpovězte na následující čtyři úlohy – každá úloha má právě jednu správnou odpověď. Na vyřešení máte 30 minut, pokud budete hotovi dříve, zkuste přemýšlet, jak byste jako učitelé dětem zdůvodnili každou z nich (pokud váš soused je také hotov, můžete zdůvodnění projít společně).

Logický důsledek. Adam, Bedřich a Cyril chodí denně na procházku. Jestliže Adam NEMÁ čepici, potom Bedřich MÁ čepici. Jestliže Bedřich NEMÁ čepici, potom Cyril MÁ čepici. Bedřich dnes nemá čepici – kdo dnes má čepici?

(A) Adam a Cyril (B) jen Adam (C) jen Cyril
(D) ani Adam, ani Cyril (E) nelze určit

Logický rozpor. Robert učinil pět prohlášení, znichž právě jedno je lež – které?

(A) Můj syn Petr má 3 sestry. (B) Moje dcera Anna má 2 bratry.
(C) Moje dcera Anna má 2 sestry. (D) Můj syn Petr má 2 bratry.
(E) Mám 5 dětí.

Pravdomluvci a lháři. Kolem kulatého stolu sedí 14 osob. Každná z nich je buď lhář, nebo mluví pravdu. Každá tvrdí: Oba moji sousedé jsou lháři. Zjistěte největší možný počet lhářů.

(A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 14

Pravdomluvci a lháři II. Za jedněmi ze tří dveří je klokan a na každých dveří je jeden nápis:

Dveře č. 1: Klokan není za těmito dveřmi.

Dveře č. 2: Klokan je za těmito dveřmi.

Dveře č. 3: Součet $2 + 3$ se rovná 5.

O daných nápisech víme, že pouze jediný je pravdivý. Za kterými dveřmi je klokan?

(A) Za dveřmi č. 1. (B) Za dveřmi č. 2. (C) Za dveřmi č. 3.
(D) Může být za každými dveřmi. (E) Může být za dveřmi č. 1 i č. 2.

Po vyřešení úloh (viz výuka) několik poznámek:

- Úloha o čepicích je na ZŠ docela těžká, vždyť i někteří z vás ji neměli správně. Proto potřebujete znát něco z logiky, protože takové úlohy se objevují i v soutěžích na ZŠ.

- Pět Robertových prohlášení: velmi dobrá úloha, ilustruje situaci, kdy na základě pravdivých údajů (předpokládejme, že těch je většina) odhalíme údaj nepravdivý, tj. dokážeme, že jistá skutečnost neplatí – dobrá ukázka použití logiky.
- Pravdomluvci a lháři: úkol je nyní těžší, víme sice, že každý mluví buď vždy pravdu, nebo vždy lže, ale logika je zde také spojena s maximalizační úlohou, která má konstrukční charakter: žáci mají nalézt situaci, jak vložit ke stolu co nejvíce lhářů, aby byly podmínky úlohy splněny + mají také zdůvodnit, proč
- Pravdomluvci a lháři II: Projdeme možné varianty pravdivostí dílčích výroků při každé variantě umístění klokana,a zjistíme, které z variant odpovídají zadání úlohy. Lze zjistit, že řešení je jedno, dvě, tři nebo žádné, podle situace. Většinou jsou tyto úlohy zadávány s tím, že aspoň jedno řešení existuje, abychom se tak při řešení setkali s reálnou situací, zejména na ZŠ nebo SŠ.

1.1 Přednáška

Zaměřme se nyní na následující odpověď na otázku o významu a roli matematiky: **podstatou matematiky je přesné a logické odvozování**.

Řecké slovo *mathéma* = nauka (věda) či poučka, platné či pravdivé tvrzení – tj. matematika je vědou založenou na přesném vyjadřování, vědou o pravdách, jejichž platnost byla prokázána. Zajímají ji výroky s pravdivostní hodnotou „pravdivý“ – ty nazývá matematickými větami (teorémami)[1]

Definice 01: Výrok je písemně zaznamenatelné tvrzení, kterému lze v daných souvislostech jednoznačně přiřadit pravdivostní hodnotu – výroky jsou tedy taková tvrzení, která lze označit buď za pravdivá (= s pravdivostní hodnotou 1), nebo za nepravdivá (= s pravdivostní hodnotou 0).

A) Zákony logiky a filosofie.

Podstatou přesného či správného vyjadřování jsou tři zákony, na kterých stojí nejen matematika, ale i filosofie:

- **Zákon: Nemůže současně platit výrok i jeho negace**[2]. Jinými slovy, pokud při logickém usuzování dospějeme k tomu, že platí současně výrok i jeho negace, říkáme, že nastal spor = kontradikce (protiřečení, protimluv), a to znamená, že některý z předpokladů našeho usuzování má nesprávnou pravdivostní hodnotu.
- **Zákon vyloučení třetího (= princip pravdivostní dvouhodnotovosti): Buď platí výrok, nebo jeho negace, ale je vyloučena třetí možnost.** Znáte nějakou situaci, kde nastanou více než uvedené dvě možnosti? V životě někdy máme více než dvě řešení, jak se zachovat, a při výběru jedné varianty jednání tím pádem všechny ostatní vylučujeme – ovšem tento výběr z více než dvou možností je něco jiného než fakt, že při popisu reality používáme dvouhodnotovou logiku pravda/nepravda; pro

[1] Slovo theóró (= vidím, zřím) je též z řečtiny, tj. teoréma = něco, co se nahlédlo a přijalo jako pravda ... ovšem nikoli subjektivní pravda, ale objektivní, která nezávisí na nahlížiteli.

[2] Negaci výroku definujeme jako výrok, který popírá platnost původního výroku.

každou z více než dvou možností se totiž rozhodujeme „dvouhodnotově“: buď si ji zvolíme, nebo ne.

- **Zákon negace negace: Negací negace dostáváme zase původní výrok[3].**

Příklad 1.1. Všechny tři zákony přesného vyjadřování platí u následujících dvou výroků:

výrok A : $2+2=4$; jeho negace je $\neg$A: $2+2\neq 4$. Negací negace dostaneme zase původní výrok A. Taktéž nemůže platit současně A i $\neg A$. A platí buď A, nebo $\neg A$ a je vyloučena třetí možnost.

výrok B : Berlín leží v Evropě; jeho negace $\neg B$: Berlín neleží v Evropě. Negací negace dostaneme zase původní výrok B. Taktéž nemůže platit současně B i $\neg B$. Platí buď B, nebo $\neg B$ a je vyloučena třetí možnost. $\star$

V dalším budeme pod výroky a matematickými tvrzeními vždy rozumět ta, která splňují uvedené tři zákonitosti.

Definice 02: Velká písmena např. A, B budeme nazývat výrokové proměnné, protože jimi lze označovat různé výroky.

B) Logické spojky

Výroky, nebo i jejich schematické znázornění pomocí výrokových proměnných, lze spojovat do složených struktur pomocí tzv. (definice 03) logických spojek – tyto logické spojky lze vyjádřit slovně, nebo i symboly: Uveďme nyní základní přehled těchto logických spojek:

- výrok $\neg A$ nazveme negací[4] (definice 04) výroku A, jestliže pro dílčí pravdivostní hodnoty výroku A a jeho negace $\neg A$ platí:

$p(A)$	$p(\neg A)$
1	0
0	1

.

Symbol $\neg$ tedy představuje negaci ve zkráceném symbolickém zápisu, slovně lze tuto negaci vyjádřit například změnou slovesa v jednoduchém výroku (rovná se ... nerovná se, leží ... neleží – viz předchozí příklad), nebo uvedením slovního spojení „není pravda, že“ před výrok, který negujeme.

- výrok $A\wedge B$ nazveme (definice 05) konjunkcí (spojením) výroků A, B, jestliže pro dílčí pravdivostní hodnoty výroků A, B platí tabulka pravdivostních hodnot jejich konjunkce vzhledem k pravdivostním hodnotám jednotlivých výroků

$p(A)$	$p(B)$	$p(A\wedge B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

.

[3]Respektive: Negací negace dostaneme výrok ekvivalentní původnímu výroku.
[4]V některých učebnicích je negace výroku A označována i symbolem $\overline{A}$ nebo A'.

Symbol $\wedge$ tedy představuje konjunkci ve zkráceném symbolickém zápisu, slovně lze konjunkci vyjádřit spojkou „a“, „a současně“, „a přitom“, atd.

- výrok $A \vee B$ nazveme (definice 06) disjunkcí výroků A, B, jestliže pro dílčí pravdivostní hodnoty výroků A, B platí tabulka pravdivostních hodnot jejich disjunkce vzhledem k pravdivostním hodnotám jednotlivých výroků

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \vee B)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

.

Symbol $\vee$ tedy představuje disjunkci ve zkráceném symbolickém zápisu, slovně lze disjunkci vyjádřit spojkou „nebo“ – tato spojka je ovšem uvedena ve významu nevylučovacím (disjunkce je pravdivá, pokud je pravdivý aspoň jeden z dílčích výroků, tedy mohou být pravdivé současně oba dílčí výroky):

Příklad 1.2. Pozor na rozdíl u spojky „nebo“ mezi běžným významem v češtině a významem matematickým[5]: Uvažujme následující tři výroky:

(a) Zítra pojedu do Prahy, nebo nepojedu.

(b) Dnes večer možná půjdu do kina nebo do divadla.

(c) Za deště nebo mlhy zůstanu doma.

Výrok (a) vyjadřuje, že nastane právě jedna ze dvou možností (a je vyloučena třetí možnost – princip vyloučení třetího). Výrok (b) chce vyjádřit, že nastane nejvýše jedna ze dvou možností (kino nebo divadlo), v žádném případě obě, ale nemusí nastat žádná. Výrok (c) znamená, že při výskytu aspoň jedné z možností (déšť nebo mlha) zůstanu doma, ale zůstanu doma také při výskytu obou možností současně – v tomto třetím významu je spojka nebo využívána v matematice a formální logice[6].

- výrok $A \Rightarrow B$ nazveme (definice 07) implikací utvořenou z výroků A, B, jestliže pro dílčí pravdivostní hodnoty výroků A, B platí tabulka pravdivostních hodnot z nich vytvořené implikace vzhledem k pravdivostním hodnotám jednotlivých výroků

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \Rightarrow B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

.

Symbol $\Rightarrow$ tedy představuje implikaci ve zkráceném symbolickém zápisu, slovně lze implikaci vyjádřit: „Pokud platí A, tak z toho plyne, že B“; „když A, tak B“; apod.

V případě platnosti implikace $A \Rightarrow B$ se výrok A (definice 08) nazývá dostatečná podmínka pro platnost výroku B (protože platnost výroku A dostačuje,

[5][2], str.31-32.

[6]Tedy češtinářské užití spojky „nebo“ má jen někdy význam disjunkce.

postačuje, aby bylo zaručeno, že platí výrok B – implikaci lze tedy slovně formulovat „Platnost podmínky A je dostatečná pro to, aby platilo B“) a výrok B se nazývá (definice 09) nutná podmínka, která nutně vyplývá z platnosti výroku A (slovní formulace: „pokud platí A, z toho nutně plyne, že platí i B“).

Příklad 1.3. Příklady implikace: a) Když půjde Ondra na ten večírek, půjdu i já; b) Když bude pršet, vezmu si deštník; c) Když je přirozené číslo dělitené šesti, tak je toto číslo dělitelné i třemi.

- výrok $A \Leftrightarrow B$ nazveme (definice 10) ekvivalencí utvořenou z výroků A, B, jestliže pro dílčí pravdivostní hodnoty výroků A, B je tabulka ekvivalence vzhledem k pravdivostním hodnotám jednotlivých výroků

$p(A)$	$p(B)$	$p(A \Leftrightarrow B)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

.

Symbol $\Leftrightarrow$ tedy představuje ekvivalenci ve zkráceném symbolickém zápisu, slovně lze spojku ekvivalence vyjádřit: „A platí právě tehdy, když platí B“; „A tehdy a jen tehdy, když B“; a podobně.

Příklad 1.4. Příklad ekvivalence: Přirozené číslo je dělitelné šesti právě tehdy, když je dělitelné dvěma i třemi současně.

C) Stručný matematický zápis.

Budeme postupně (opakovat a) učit se řadě symbolů stručného matematického zápisu – výstižně a přesně se vyjadřovat je jedním z cílů matematiky „na úrovni B2“, pokud bychom si vypůjčili na popis vysokoškolské úrovně matematiky označení zažité z evropského referenčního rámce výuky cizích jazyků.

- označení 00: $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ... množina přirozených čísel; někdy také $N_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ... množina přirozených čísel včetně nuly;
- označení 01: $Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ ... množina celých čísel;
- označení 02: množina racionálních čísel

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} \ : \ m \in Z, \ n \in N \right\}.$$

- označení 03: I ... množina iracionálních čísel, tj. $R = Q \cup I$;
- označení 04: R ... množina reálných čísel;
- označení 05: C ... množina komplexních čísel;
- označení 06: $\neg A$ ... negace výroku A;

- označení 07: $A \wedge B$ ... konjunkce výroků A, B;
- označení 08: $A \vee B$ ... disjunkce výroků A, B;
- označení 09: $A \Rightarrow B$ ... implikace utvořená z výroků A, B – s významem „Když platí A, tak platí i B“;
- označení 10: $A \Leftrightarrow B$ ... ekvivalence utvořená z výroků A, B – s významem „A platí právě tehdy, když platí B“;

D) Základní kategorie při výstavbě matematiky

Matematika je věda o přesném vyjadřování, a my se nyní tento jazyk budeme učit – jinými slovy, budeme se učit a) přesně formulovat pojmy, b) přesně formulovat, ze kterých jednoduchých a platných faktů vycházíme, c) dokazovat platnost nových faktů na základě faktů samozřených nebo dokázaných už dříve.

Definice 11: (matematická) definice je přesné vymezení pojmu, z něhož je patrno, které objekty toto vymezení splňují a které ne (např. bod, úsečka, přímka, kružnice, úhel, rovnoběžka ... to vše jsou pojmy, které musíme jednoznačně definovat v tzv. Euklidovské geometrii).

Definice 12: (matematický) axiom je tvrzení o vlastnostech pojmů či o vztazích mezi pojmy, které se nedokazuje, nýbrž všeobecně přijímá jako pravdivé (např. axiomy Euklidovské geometrie).

Definice 13: (matematická) věta je tvrzení o vlastnostech pojmů či vztazích mezi pojmy, které musíme dokázat pomocí axiomů, definic a vět dokázaných již dříve[7].

E) Důkaz výčtem pravdivostních hodnot.

Definice 14: Výroková forma je výraz složený z výrokových proměnných a logických spojek vyjádřených symboly. Například implikace $A \Rightarrow B$ nebo ekvivalence $A \Leftrightarrow B$ jsou výrokové formy.

Pokud nyní budeme mluvit o pravdivosti výrokových forem, učíme se takto principy správného logického usuzování, aniž bychom znali konkrétní výroky dosazené za výrokové proměnné A a B.

[7]Např.: střed kružnice trojúhelníku vepsané leží na průsečíku os jeho úhlů ... platnost tohoto tvrzení plyne ze vztahu mezi definicí kružnice (= množina bodů, které mají stejnou vzdálenost od svého středu) a definicí osy úhlu (= množina bodů, které mají stejnou vzdálenost od obou ramen úhlu). Z těchto dvou definic plyne, že osy úhlů trojúhelníka se protínají v jednom bodě, a navíc v tomto bodě musí ležet i střed hledané kružnice. Podrobněji dokazovat nebudeme, daná skutečnost slouží jen jako příklad matematické věty, která nemusí být každému zcela zřejmá a jejíž platnost je dobré podrobněji zdůvodnit na základě definic a axiomů.

Typ důkazu číslo 1: Důkaz ekvivalence výrokových forem.

Sestavíme tabulku výsledných pravdivostních hodnot obou výrokových forem. Pokud na každém řádku tabulky (jeden řádek = jedna kombinace dílčích pravdivostních hodnot) mají obě formy stejné pravdivostní hodnoty, jsou ekvivalentní.

Zajímavá pravidla logického usuzování dostáváme při kombinaci několika logických spojek, jak je vidět ze dvou následujících matematických vět:

(věta 01) Výroková forma $\neg(A \wedge B)$ je ekvivalentní s výrokovou formou $(\neg A) \vee (\neg B)$.
Důkaz: pomocí tabulky pravdivostních hodnot (důkaz typu 1): sestavíme pravdivostní hodnoty složených výrokových forem pro všechny možnosti pravdivosti dílčích výroků a porovnáme je:

$\neg(A \wedge B)$:

$p(A)$	$p(B)$	$p(\neg(A \wedge B))$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

; dále $\neg A \vee \neg B$):

$p(A)$	$p(B)$	$p(\neg A \vee \neg B)$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

.

Vidíme, že pravdivostní hodnoty výrokových forem jsou stejné na každém řádku (= pro tytéž hodnoty dílčích výroků), tj. obě výrokové formy jsou logicky ekvivalentní. Jednu formu lze ekvivalentně zaměnit tou druhou a naopak. □

Příklad 1.5. Výrok $A \wedge B$ zní: Vezmu si klobouk a vezmu si i boty.

Jeho negaci lze provést velmi pragmaticky uvedením záporky „Není pravda, že“, tj. dostaneme výrok typu $\neg(A \wedge B)$: Není pravda, že si vezmu klobouk i boty.

Matematik ovšem chce pracovat precizně a vyzkoušet i další možnosti – mimo jiné proto, že často je v jeho zájmu odstranit závorky ve složených výrokových formách (podobně jako někdy pomůže odstranit závorky při početních úpravách s proměnnými výrazy). Využije věty 1 a vysloví negaci ve tvaru $\neg A \vee \neg B$): Nevezmu si klobouk nebo si nevezmu boty (v matematickém smyslu většinou nepíšeme čárku, abychom vyjádřili, že se jedná o základní matematické „nebo“, které je nevylučovací – může tedy nastat, že si nevezmu an i klobouk, ani boty).

(věta 02) Výroková forma $\neg(A \vee B)$ je ekvivalentní s výrokovou formou $(\neg A) \wedge (\neg B)$.
Důkaz: provedeme pomoci tabulky pravdivostních hodnot (důkaz typu 1). Velmi podobný větě 1, vhodný pro cvičení. □

Příklad 1.6. Výrok $A \vee B$ zní: Číslo 20 je dělitelné dvěma nebo třemi. Je to mimochodem výrok pravdivý.

Jeho negaci bychom mohli provést pomocí záporky „není pravda, že“ – ovšem tuto možnost budeme mít na prověrce nejspíš zakázanou, aby vyučující zjistil, zda dokážeme odstranit závorky ve výrokové formě. Pokusíme se sestavit výrok typu $\neg A \wedge \neg B$: Číslo 20 není dělitelné dvěma, a současně toto číslo není dělitelné třemi. To je výrok nepravdivý (což se dalo čekat, protože negace pravdivého výroku je nepravdivá), ale jedná se o správně vytvořenou negaci původního výroku.

F) Univerzální výroky.

Matematika se snaží o vytváření tzv. univerzálních výroků, které platí pro více hodnot z jisté množiny, například pro všechna přirozená čísla, apod. Jsou to tedy jakési výroky typu „více v jednom“ nebo „nekonečno v jednom“, jinými slovy pomocí proměnných vyjádříme výrok, který platí pro více hodnot nebo nekonečně mnoho hodnot.

(definice 15) Výroková funkce je výraz, který sám není výrokem, protože není specifikováno, jaké hodnoty nabývá proměnná x, kterou obsahuje, takže není možné stanovit pravdivostní hodnotu.

Až právě kvantifikátor (definice 16) je ta část výroku, která vymezuje, jakých hodnot může proměnná ve výrokové funkci nabývat.

Příklad 1.7. Zde je příklad na výrokovou funkci a kvantifikátor: a) Výraz

$$x > 0$$

není výrok, protože není stanoveno, čemu se rovná proměnná x – je to ovšem výroková funkce.

b) Výraz

$$\forall x \in N: \quad x > 0$$

je pravdivý výrok, protože podmínku $x > 0$ splňují všechna přirozená čísla. Část $\forall x \in N$ je právě kvantifikátor – říká se mu obecný kvantifikátor, protože upřesňuje, že výroková funkce bude platit pro každý prvek uvedené množiny (= platí obecně pro všechny prvky dané množiny).

c) Výraz

$$\forall x \in R: \quad x > 0$$

je nepravdivý výrok, protože existují reálná čísla, pro která daná nerovnost neplatí. Mohli bychom jej pozměnit do tvaru

$$\exists x \in R: \quad x > 0,$$

který už platí. Část $\exists x \in R$ je opět kvantifikátor – říká se mu existenční kvantifikátor, a dosazením před výrokovou funkci tvrdí, že existují nějaká reálná čísla, ne nutně všechna, ale může jich být i nekonečně mnoho, pro která platí $x > 0$.

G) Další symboly stručného matematického zápisu

- označení 11: $V(x)$ ... výroková funkce s proměnnou x;
- označení 12: $\forall$ ... pro každé, pro každou;
- označení 13: $\exists$ ... existuje; $\exists!$ ... existuje právě jedno, právě jeden; $\nexists$ ... neexistuje, neexistují;

- označení 14 : : (dvojtečka) ... tak, že; platí
- označení 15 : $\in$ ... patří do, je prvkem;
- označení 16 : $\cap$ ... průnik množin;
- označení 17 : $\cup$ ... sjednocení množin;

Kapitola byla vypracována na základě zdrojů [1] (str. 2-3 a str. 5) a [2] (str. 22-50).

1.2 Cvičení

Cvičení 1.1. Dokažte větu 2 z přednášky 1, ale také věty 3,4,5 z následující přednášky 2.

Cvičení 1.2. [2] str. 26: jedná se o výroky? (nebo jiné cvičení na téma, zda daná tvrzení jsou výroky nebo ne)

Cvičení 1.3. Cvičení na základní negace výroků: Učebnice Matematika pro gymnázia (nakl. Prometheus), svazek Základní poznatky z matematiky (Bušek, Boček, Calda), str. 136-146. Velmi dobré by bylo procvičení matematického symbolického zápisu výroků a jejich negací.

Cvičení 1.4. Negujte výroky lépe než jen dodáním záporky „není pravda, že“:

4a) Každé přirozené číslo n je rovno součtu svých dělitelů.

4b) Dnes bude pršet a budeme psát písemku z matematiky.

4c) Žádný učený z nebe nespadl.

4d) Existují aspoň tři přirozená čísla, která jsou rovna součtu všech svých dělitelů.

4e) Existují nejvýše čtyři prvočísla.

4f) Možná, že dnes večer půjdu do kina nebo si přečtu nějakou zajímavou knihu.

4g) Existují právě dvě celá čísla, která se rovnají své druhé mocnině.

Cvičení 1.5. Zapište následující výroky symbolickým matematickým zápisem, ve kterém nepoužijete ani jedno slovo z běžné češtiny:

5a) Pro každé přirozené číslo existuje přirozené číslo, které je větší než dvojnásobek toho prvního čísla zvětšený o jedničku.

5b) Pro každé celé číslo existuje celé číslo, které když zmenšíme o jedničku, stále je výsledek menší než třetí mocnina toho prvního čísla.

Cvičení 1.6. [17], str. 40-41, příklady B.1, B.4, B.6 a),c), B.8, B.9, B.10.

Výsledky některých příkladů a cvičení jsou uvedeny na konci textu v oddílu 15.1.

2 Důkaz implikace (přímý a nepřímý), důkaz ekvivalence

Warm-up: Na ZŠ se používá logika především v širším slova smyslu, jako cesta k řešení úlohy, na které se správně rozhodujeme, které pojmy, zákonitosti a algoritmy při řešení použijeme. Postup při řešení různých úloh je vlastně jediný, používáme stále znovu a znovu určitý rámcový přístup:

M0. Motivace. Zadání úlohy – ať už reálná, nebo hypotetická situace z praxe, kterou máme matematicky popsat, popřípadě vyřešit otázku se situací spojenou.

M1. Grafický názor a rozbor (speciálně i pomocí teorie grafů či grafu funkce reálné proměnné, geometrický názor), matematizace úlohy. Grafická či statistická reprezentace dat.

M2. Metoda experimentu. Lze nalézt řešení zkusmo, nebo zkusit nějakou hodnotu, pak ji opravit? První hypotézy a konkrétní pokusy o řešení.

M3. Logické zdůvodnění a řešení. Co použít nejdřív a co potom? Co víme bezpečně, co dělat nejdříve a co odsunout na později? Zvážení metod řešení = cest k cíli: existuje více metod řešení? Která z nich bude v našem případě (a s našimi prostředky) nejvhodnější?

M4. Označení, terminologie a zákonitosti. Řada situací se opakuje, a též matematické metody či vlastnosti čísel nebo objektů se opakují – pro řešení úloh daného typu bude užitečné označit dané vlastnosti pojmy (definice) a prozkoumat zákonitosti, které se mezi objekty různých vlastností vyskytují (tvrzení neboli teorémy). Pro dané objekty-vlastnosti sestrojíme-najdeme-zvolíme metody či algoritmy k vyřešení. Cesta algebry (algebraizace úlohy, řešení rovnice), cesta geometrie (rozbor geometrické konstrukce a její provedení; výpočetní geometrie), cesta funkčně-analytická (sestavení či nalezení reálné funkce, využití či zjištění jejích vlastností; analýza statistických dat), cesta kombinatoricko-pravděpodobnostní (rozbor různých možností, popis náhodnosti, zákonitosti o pravděpodobnosti dané situace), a podobně.

M5. Zkouška, analýza chyb. Došli jsme ke správnému výsledku (jak lze jinak nebo aspoň přibližně ověřit, že výsledek je správný)? Pokud ne, kde je chyba? Jak ji můžeme odstranit? Existují ještě další řešení? Jak je najít, či která z nich potřebujeme?

M6. Interpretace výsledku v reálné úloze praxe či v otázce zkoumaného problému. Odpověď, jiné (další) využití výsledku (jako vedlejší produkt našich úvah).

Všimněte si prosím, že logika se vyskytuje v samotném středu tohoto rámcového přístupu: zpracovává rozbor úlohy (M1) a pokusy o řešení (M2), přitom volí z databáze matematických pojmů, zákonitostí a algoritmů (M4) ten nejvhodnější přístup, výsledek postupu prověří zkouškou (M5) a interpretuje do praxe (M6). V řadě matematických soutěží, a vlastně i na přijímacích zkouškách na různé školy, se pojem „logické úlohy“ používá nikoli ve smyslu úzké definice v minulém warm-up k přednášce 1, ale spíše jako schopnost zdravě přemýšlet při řešení každé úlohy, abychom dospěli k jejímu správnému řešení.

2.1 Přednáška

Typ důkazu číslo 2: Přímý důkaz implikace $A \Rightarrow B$.

Při přímém důkazu implikace $A \Rightarrow B$ vyjdeme z toho, že platí výrok A; na základě A a dříve dokázaných matematických vět provedeme logicky korektní úsudek U_1; na základě A, U_1 a dříve dokázaných vět provedeme logicky korektní úsudek U_2; atd. až po k krocích logicky korektně usoudíme, že platí B, a to na základě platnosti A, U_1, …, U_k.

Příklad 2.1. Dokažte:

$$a, b \in R \Rightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

Důkaz: Výrokem A budeme rozumět část $a, b \in R$ – tedy a, b jsou reálná čísla. Co o nich lze říci?

Úsudek U_1: platí vždy, že $(a-b)^2 \geq 0$ (druhá mocnina reálného čísla je vždy nezáporná);

Úsudek U_2: z U_1 plyne rozepsáním podle vzorce: $a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$;

Výrok B platí, protože vztah U_2 lze upravit do tvaru $a^2 + b^2 \geq 2aB$. Důkaz je hotov. Každý důkaz má obvykle nějaké klíčové místo či myšlenku – klíčové v tomto důkazu byl přechod od U_1 k U_2 ... všimneme si, že po umocnění $(a-b)^2$ dostaneme všechny členy v naší dokazované nerovnosti. □

(věta 03) Výrokové formy $A \Rightarrow B$ a $\neg B \Rightarrow \neg A$ jsou ekvivalentní.

Důkaz: pomocí tabulky pravdivostních hodnot dílčích výroků, lze provést v rámci cvičení.□

Na větě 03 je založen typ důkazu 03:

Typ důkazu číslo 3: NEpřímý důkaz implikace $A \Rightarrow B$.

Při NEpřímém důkazu implikace $A \Rightarrow B$ vlastně dokazujeme platnost logicky s ní ekvivalentní formy $\neg B \Rightarrow \neg A$.

Definice 17: Forma $\neg B \Rightarrow \neg A$ se nazývá obměna implikace $A \Rightarrow B$[8].

Příklad 2.2. Dokažte matematickou větu:

$$x \in R \Rightarrow \sin x + \cos x \neq \frac{3}{2}.$$

Důkaz: Máme dokázat implikaci typu $A \Rightarrow B$ neboli výrok

$$x \in R \quad \Rightarrow \quad \sin x + \cos x \neq \frac{3}{2}.$$

[8] Obměna implikace je tedy výrok s touto implikací logicky ekvivalentní, tj. nepřímý důkaz implikace = přímý důkaz její obměny.

Budeme postupovat podle typu důkazu číslo 3, tj. budeme dokazovat obměnu $\neg B \Rightarrow \neg A$ neboli výrok
$$\sin x + \cos x = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x \notin R.$$
Vycházíme nyní z výroku $\neg B$: $\sin x + \cos x = \frac{3}{2}$;

úsudek U_1: po umocnění obou stran rovnice $\neg B$ na druhou dostaneme
$$\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{9}{4};$$
úsudek U_2: z rovnosti U_1 a známého faktu F_1 ($\forall x \in R: \ \sin^2 x + \cos^2 x = 1$) dostaneme
$$1 + 2\sin x \cos x = \frac{9}{4};$$
úsudek U_3: z rovnosti U_2 a dalšího známého faktu F_2 ($\forall x \in R: \ 2\sin x \cos x = \sin(2x)$) dostaneme
$$\sin(2x) = \frac{5}{4},$$
což je zvláštní, protože z grafu funkce sinus víme, že pro reálné vstupy nabývá výstupu pouze z intervalu $\langle -1; 1\rangle$;

úsudek U_4: argument $2x$ funkce sinus není reálné číslo, tj. platí $\neg A$: x není reálné číslo. Dokázali jsme tedy platnost obměny, platí tedy i původní implikace, která je s obměnou logicky ekvivalentní. □

(věta 04) Výrokové formy $A \Leftrightarrow B$ a $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ jsou ekvivalentní.

Důkaz: pomocí tabulky pravdivostních hodnot obou výrokových forem pro všechny možné kombinace pravdivostních hodnot dílčích výroků A, B. □

Na větě 04 je založen typ důkazu 04:

Typ důkazu číslo 4: důkaz ekvivalence $A \Leftrightarrow B$.

Při důkazu ekvivalence $A \Leftrightarrow B$ vlastně musíme dokázat, že platí obě z implikací $A \Rightarrow B$ a $B \Rightarrow A$.

Definice 18: Forma $B \Rightarrow A$ se nazývá obrácení implikace $A \Rightarrow B$.[9].

Příklad 2.3. Uvažujme nějaké podmnožiny A, B, C množiny přirozených čísel. Ať jsou tyto podmnožiny libovolné, platí pro ně rovnost
$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$
Důkaz. Rovnost množin lze dokázat pomocí ekvivalence
$$x \in A \setminus (B \cap C) \quad \Leftrightarrow \quad x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$
Podle typu důkazu číslo 4 bude důkaz hotov, pokud dokážeme obě implikace:

[9]Tedy při důkazu ekvivalence musíme dokázat, že současně platí příslušná implikace i její obrácení.

a) Dokažme implikaci zleva doprava, tj. implikaci

$$\underbrace{x \in A \setminus (B \cap C)}_{U} \ \Rightarrow\ \underbrace{x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)}_{V}.$$

Tuto implikaci dokážeme přímo (důkaz typu 2): Předpokládáme platnost předpokladu $x \in A \setminus (B \cap C)$ a provedeme řetězec úsudků:

$$\begin{aligned} x \in A \setminus (B \cap C) \quad &\Rightarrow \quad x \in A \wedge (x \notin B \cap C) \ \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad x \in A \wedge (x \notin B \vee x \notin C \ \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad x \in (A \setminus B) \vee x \in (A \setminus C) \ \Rightarrow\ x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C). \end{aligned}$$

b) Dokažme implikaci zprava doleva, tj. implikaci

$$\underbrace{x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)}_{V} \ \Rightarrow\ \underbrace{x \in A \setminus (B \cap C)}_{U}.$$

Tuto implikaci dokážeme přímo (důkaz typu 2): Předpokládáme platnost předpokladu $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ a provedeme řetězec úsudků:

$$\begin{aligned} x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \quad &\Rightarrow \quad x \in A \setminus B \vee x \in A \setminus C \ \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \notin C) \ \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad x \in A \wedge x \notin B \cap C \ \Rightarrow\ x \in A \setminus (B \cap C). \end{aligned}$$

závěr: Z platnosti implikací $U \Rightarrow V$ a $V \Rightarrow U$ plyne platnost ekvivalence $U \Leftrightarrow V$. Důkaz je tím hotov. $\square$

O principu vyloučení třetího (buď platí výrok, nebo jeho negace, a je vyloučena třetí možnost) už byla řeč. Nyní ve větě 5 uvedeme jeho důkaz!!!

(věta 05) (princip vyloučení třetího zapsaný jako výroková forma) Pro každý výrok A platí

$$A \vee \neg A.$$

Důkaz: Pomocí tabulky pravdivostních hodnot lze ukázat, že daná výroková forma má vždy pravdivostní hodnotu 1, tedy platí vždy, ať je výrok A jakýkoli. $\square$

V rámci cvičení lze dokázat ekvivalence některých výrokových forem, které nám pomohou při sestavování negace implikace a negace ekvivalence – podrobnější negace těchto dvou výrokových forem totiž právě využívá formy jim ekvivalentní.

(věta 06) Forma $A \Rightarrow B$ je ekvivalentní s formou $(\neg A) \vee B$.

Důkaz: Důkaz typu 1 provedeme pomocí tabulky logických hodnot. $\square$

(věta 06 - důsledek) Forma $\neg(A \Rightarrow B)$ je ekvivalentní s formou $A \wedge (\neg B)$.

Důkaz: Mohli bychom důkaz provést pomocí tabulky logických pravdivostních hodnot, ale lze také užít větu 06 a větu 02[10]: podle věty 06 je implikace ekvivalentní s formou $(\neg A) \vee B$, takže negace implikace musí být ekvivalentní s formou, kterou získáme z $(\neg A) \vee B$ využitím věty 02 (která říká, že negací disjunkce dílčích výroků je konjunkce jejich dílčích negací):

$$\neg(A \Rightarrow B) \overset{v.06}{\Leftrightarrow} \neg(\neg A \vee B) \overset{v.02}{\Leftrightarrow} A \wedge \neg B. \ \square$$

Příklad 2.4: negace implikace. Uvažujme implikaci „Když bude pršet, vezmu si deštník.“ Její negace je: Bude pršet a nevezmu si deštník.

(věta 07) Forma $\neg(A \Leftrightarrow B)$ je ekvivalentní s formou

$$(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A).$$

Důkaz: Mohli bychom provést pomocí tabulky pravdivostních hodnot, ale místo toho provedeme jen přímý důkaz úpravy výrazu na základě vět 01, 04 a 06-důsledek:

$$\neg(A \Leftrightarrow B) \overset{v.04}{\Leftrightarrow} \neg((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)) \overset{v.01}{\Leftrightarrow} \neg(A \Rightarrow B) \vee \neg(B \Rightarrow A) \overset{v.06-\text{důsl.}}{\Leftrightarrow} (A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A). \ \square$$

Příklad 2.5: negace ekvivalence. Uvažujme ekvivalenci „Číslo n je dělitelné šesti tehdy a jen tehdy, když je dělitelné dvěma i třemi.“ Negace tohoto výroku (mimochodem nepravdivá, protože původní výrok je pravdivý) je podle věty 07 celá dlouhá věta:

> (Číslo n je dělitelné šesti a současně není dělitelné dvěma i třemi) nebo (číslo n je dělitelné dvěma i třemi a současně není dělitelné šesti).

Tato kapitola byla zpracována na základě [1]. str. 4,6,10 (ale důkazy rovnosti množin ze str. 10, věty 2.1 dokazovat pomocí typu 4: důkaz ekvivalence. Ve čtvrté kapitole se naučíme (připomeneme si) schůdnější metodu důkazu rovnosti množin pomocí tzv. Vennových diagramů). Další materiál viz [2], str. 88-91, str. 100-103.

2.2 Cvičení

Cvičení 2.1. Přímý důkaz využívající příklad 2.1 ([2], str. 92, příklad 4.2, řešení na konci knihy [2]): pro všechna kladná reálná čísla a, b platí:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}.$$

Cvičení 2.2. . Nepřímý důkaz ([2], str. 100, př. 1): Pro všechna přirozená čísla a, b platí: když se nedá zkrátit zlomek $\frac{a-b}{a+b}$, pak se nedá zkrátit ani $\frac{a}{b}$.

Cvičení 2.3. . Nepřímý důkaz ([2], str.103, př. 4.14): Když n není druhá mocnina přirozeného čísla, tak $\sqrt{n}$ není racionální číslo.

Cvičení 2.4. Dokažte distributivní zákony pro sjednocení a průnik množin a) pomocí důkazu ekvivalence, b) pomocí Vennových diagramů (také viz přednáška 4, typ důkazu číslo 8):

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z), \qquad X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z).$$

[10] Vlastně se jedná o přímý důkaz (typ 2) pomocí úpravy výrazu na základě vět 02 a 06.

Cvičení 2.5. Dokažte de Morganova pravidla (viz přednáška 4, věty 09, 10) pro operace doplňku množiny, sjednocení a průniku množin a) pomocí důkazu ekvivalence, b) pomocí Vennových diagramů.

Cvičení 2.6. Negujte následující výroky:

6a) Půjdu na ten večírek právě tehdy, když tam půjde Ondra.

6b) Pokud přijde Honza, řeknu mu o tom.

Cvičení 2.7. Zjednodušte symbolický zápis, aby ve výsledku nebyl symbol negace před žádnou závorkou, pouze u dílčích výrokových proměnných:

7a) $\neg((A \Rightarrow B) \wedge C) \ \Leftrightarrow$

7b) $\neg(A \Rightarrow (B \vee C)) \ \Leftrightarrow$

7c) $\neg((A \vee B) \wedge C) \ \Leftrightarrow$

Cvičení 2.8. Napište obměnu výroku: Pokud n je sudé číslo, pak jeho druhá mocnina n^2 je sudé číslo.

A ještě důležité procvičení grafu kvadratické funkce:

Výsledky některých příkladů a cvičení jsou uvedeny na konci textu v oddílu 15.2.

3 Důkaz sporem, indukcí, konstrukcí a protipříkladem

Warm-up: K logice v této třetí a poslední přednášce věnované výhradně logickému zdůvodňování jen jedna poznámka: Pokud bychom se my nebo naši žáci báli logiky nebo se necítili silní v matematice, dobrou zprávou je, že nezáleží jen na logice, ale i na zkušenosti. Říká se sice, že nestačí učit žáky jen různé metody a algoritmy, musíme je učit myslet. To je pravda, ale též platí i to, že procvičováním nebo opakováním se žáci naučí postupy, které jim pomohou v některých úlohách, i když detailům nerozumí. Přesto umí úlohu dobře vyřešit, i když by nedokázali vysvětlit, proč tomu tak je, protože se s úlohou daného typu už prakticky setkali. Podobně třeba řada lidí řídí auto nebo používá mobilní telefon a počítač, i když přesně nerozumí daným fyzikálním zákonitostem.

Člověk je tvor společenský, a tak využívá poznatky, zákonitosti a objevy minulých generací, i když nemusí všemu plně rozumět. Neznamená to, že je jedno, zda děti matematice rozumí nebo ne – chci jen říci, že řešením příkladů ve škole nabývají zkušenosti různých pojmů, zákonitostí a metod, ze kterých mohou později čerpat. Občas některé věci děláme, aniž jim plně rozumíme – a porozumění si třeba doplníme až později. Často některým zákonitostem a algoritmům plněji porozumíme až poté, co je několikrát použijeme. To je tedy dobrou zprávou pro učitele matematiky: děti ve škole nezískávají jen procvičení logiky, ale i zkušenosti s řešením matematických úloh – ty jsou možná stejně důležité.

3.1 Přednáška

Na základě věty 05 lze provádět důkazy následujícího typu:

Typ důkazu číslo 5: Důkaz sporem.

Předpokládáme platnost negace daného tvrzení a logicky správně z této negace odvozujeme další úsudky, dokud nedojdeme k nesmyslu, který neplatí. Protože jsme pracovali logicky naprosto správně, tak kořen rozporu je ve startovacím předpokladu – nyní víme, že předpoklad $\neg A$ neplatí, a tedy platí výrok A.

Příklad 3.1. Dokažte, že $\log_2 3$ není racionální číslo.

Důkaz: budeme předpokládat negaci zadaného výroku, tj. že $\log_2 3$ je racionální číslo, tj. lze tuto hodnotu vyjádřit zlomkem:

$$\log_2 3 = \frac{m}{n}$$

pro $m \in Z$ a $n \in N$. Nyní budeme vyvozovat nějaké důsledky a úsudky a využijeme přitom definice logaritmu, tj. faktu F_1: Pro $\log_2 x = y$ platí $2^y = x$.

Úsudek U_1: Z rovnosti, jejíž platnost předpokládáme, a faktu F_1 plyne

$$2^{\frac{m}{n}} = 3.$$

Umocněme tento vztah na n-tou, abychom se zbavili zlomku v mocnině:

$$2^m = 3^n,$$

a na obou stranách této rovnosti se přitom vyskytují přirozená čísla.

Úsudek U_2: Protože číslo 2 je dělitelem čísla 2^m a platí $2^m = 3^n$, musí být číslo 2 také dělitelem čísla 3^n – ale to je spor se známým faktem, že číslo 2 není dělitelem žádného lichého čísla (a číslo 3^n jako násobek n lichých čísel je liché).

Naprosto korektními úvahami jsme přišli k nesmyslu, tj. nesprávný byl náš výchozí předpoklad – a tedy platí jeho negace, neboli to, co jsme chtěli dokázat. Důkaz je hotov. □

Typ důkazu číslo 6: Důkaz matematickou indukcí.

Při matematické indukci dokazujeme tzv. univerzální výrok, který platí většinou pro všechna přirozená čísla, která jsou větší nebo rovna přirozenému číslu n_0, tj. výroky typu

$$\forall n \geq n_0 : V(n).$$

Platnost tohoto univerzálního výroku dokazujeme ve dvou krocích:

a) Dokážeme platnost výroku $V(n_0)$.

b) Dokážeme platnost implikace $V(n) \Rightarrow V(n+1)$.

Pokud platí obě tyto věci, „dosáhne“ platnost $V(n)$ na jakékoli přirozené číslo n.

Definice 19: Indukční předpoklad se nazývá předpoklad $V(n)$ v implikaci

$$V(n) \Rightarrow V(n+1)$$

v podmínce (b), kterou dokazujeme při indukci.

Poznámka: důkaz indukcí vyplývá ze struktury množiny N:

ad a) jednička je nejmenší přirozené číslo;

ad b) každé další přirozené číslo různé od jedničky získáme zvýšením předchozího přirozeného čísla o jedničku.

Tedy nekonečným opakováním kromu (b) projdeme všechna přirozená čísla – viz [2], str. 121: „pravdivost tohoto výroku se dědí od čísla k číslu“. My ovšem při důkazu tohoto tzv. indukčního kroku = části (b) projdeme tento proces jen jednou – dokážeme, že jakékoli přirozené číslo větší než n_0 danou vlastnost „dědí“ od čísla o jedničku menšího.

Označení 18: | ... dělí beze zbytku = je dělitelem. Například $2|6$ (dvojka dělí šestku), $2|8$ (dvojka dělí osmičku), $3|21$ (číslo 3 je dělitelem čísla 21).

Příklad 3.2. Dokažte, že

$$\forall n \in N : \quad 9|(n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3)$$

(slovně: dokažte, že číslo 9 je dělitelem výrazu v závorce, kde n je libovolné přirozené číslo)

Důkaz: Pokud máme tvrzení dokázat pro všechna přirozená n, takový úkol se typicky dokazuje indukcí = důkazem typu 6.

a) Ukažme, že rovnost platí pro $n_0 = 1$:

$$9|(1 + 2^3 + 3^3) = 27 \ldots \text{ to platí.}$$

b) Dokažmě platnost implikace $V(n) \Rightarrow V(n+1)$, která má v našem případě tvar

$$\underbrace{9|(n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3)}_{V(n)} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{9|((n+1)^3 + (n+1+1)^3 + (n+1+2)^3)}_{V(n+1)}.$$

Předpokládejme, že platí indukční předpoklad $V(n)$, tedy číslo $(n^3+(n+1)^3+(n+2)^3)$ je dělitelné devíti.

Úsudek U_1: Vyjádřeme si náš předpoklad pomocí definice dělitelnosti[11]: existuje nějaké přirozené číslo k, že

$$(n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3) = 9k.$$

Úsudek U_2: Upravujme číslo $((n+1)^3 + (n+1+1)^3 + (n+1+2)^3)$ a snažme se jej vyjádřit jako násobek čísla 9 – pokud se nám to podaří, budeme vědět, že je dělitelné devíti a důkaz bude u konce. Tak tedy:

$$((n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3) = \underbrace{(n+1)^3 + (n+2)^3 + n^3}_{k} + 3n^2\cdot 3 + 3n\cdot 9 + 27 = 9\cdot(k+n^2+3n+3).$$

Použili jsme pouze vzorec $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ a označení čísla k z rovnosti předpokladu. Jsme hotovi – skutečně se dala devítka vytknout z celého výrazu, tj. $(n+1)$-ní člen posloupnosti zadané naším vzorcem „zdědí“ dělitelnost devíti od členu předchozího. Protože jsme v předpokladu vyšli od libovolného přirozeného n, platí tato vlastnost pro všechna přirozená čísla. □

Typ důkazu číslo 7: Důkaz existence (typ 7A) nebo protipříklad (typ 7B)

7A: Důkaz existence uvedením příkladu či konstrukcí ... Uvedeme důkaz toho, že jistá struktura existuje, prostě tak, že ji sestrojíme (popíšeme její konstrukci).

7B: Vyvrácení univerzální platnosti pomocí protipříkladu ... tvrzení, že něco existuje či platí v každém případě (např. pro všechna přirozená čísla) jednoduše vyvrátíme tím, že sestavíme aspoň jeden protipříklad, kdy daná skutečnost neplatí (např. najdeme jedno přirozené číslo, které zadanou vlastnost nesplňuje).

[11] Kterou jsme sice ještě neprobrali, ale řekněme si ji za čtrnáct dní a intuitivně ze střední školy chápeme, o co se jedná

Oba typy důkazu označeny číslem 7 mají společné to, že jakmile sestavíme příklad či protipříklad splňující zadané předpoklady, důkaz je hotov. Ad 7B: důkaz typu 7B je založen na skutečnosti, že negací výroku

$$\forall x \in M: \quad V(x)$$

je výrok

$$\exists x_0 \in M: \text{ neplatí } V(x_0).$$

Příklad 3.3. (studenti samostatně) Vyvraťte následující tvrzení pomocí protipříkladu: Každé přirozené číslo $n > 1$ lze „zaplatit“ sumou pouze dvoukorunových a pětikorunových mincí předaných v jisté obálce nebo kontejneru.

Řešení je jednoduché – kromě jedničky existuje ještě jedno přirozené číslo, které nelze vyčíslit sečítáním kladných násobků dvojky a pětky – najdete ho?

Důkaz konstrukcí lze procvičit ve cvičení 3.3 (ovšem při větách formulovaných pozitivně), nebo se tento typ 7A užije při důkazu věty 12 v kapitole 5.

Tato kapitola byla zpracována podle [1], str. 6-7, příklady byly vzaty z knihy [2].

3.2 Cvičení

Cvičení 3.1. Důkaz sporem: dokažte, že $\sqrt{3}$ není racionální číslo.

Cvičení 3.2. Důkaz indukcí:

2a) Dokažte ([2], str.124, př.4), že všechny celočíselné peněžní obnosy, které jsou větší nebo rovny 4 kč, je možné vyplatit na hromadu pouze z dvojkorun a pětikorun.

2b) Dokažte ([17],str.42, př. B11a)):

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

2c) Dokažte ([17],str.42, př. B11b)):

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2.$$

Cvičení 3.3. Pomocí důkazu typu 7 (existence nebo protipříklad) vyřešte následující úlohy:

3a) Dokažte nebo vyvraťte: Čtyři rovnostranné trojúhelníky nelze sestavit pomocí 12 zápalek stejné délky.

3b) Dokažte nebo vyvraťte: Čtyři rovnostranné trojúhelníky nelze sestavit pomocí 9 zápalek stejné délky.

3c) Dokažte nebo vyvraťte: Čtyři rovnostranné trojúhelníky nelze sestavit pomocí 6 zápalek stejné délky.

Cvičení 3.4. Zapište následující výroky symbolickým matematickým zápisem, ve kterém nepoužijete ani jedno slovo z běžné češtiny:

4a) Existuje přirozené číslo, které když zvětšíme o 5, výsledek bude větší než 10.

4b) Přirozené číslo je dělitelné šesti právě tehdy, když je současně dělitelné dvěma i třemi.

4c) Číslo p je prvočíslo.

Cvičení 3.5. Negujte výroky ze cvičení 3.4 (symbolicky zapsané) pouze pomocí symbolického zápisu (bez českých slov).

Cvičení 3.6. Dokažte Thaletovu větu, která říká: Pokud strana AB trojůhelníka je průměrem kružnice k (tj. prochází jejím středem) a vrchol C trojůhelníka leží na kružnici k libovolně mimo body A a B, tak úhel v trojůhelníku ABC ležící u vrcholu C je pravý.

Cvičení 3.7. Dokažte nepřímo následující matematickou větu: $3|n^2 \;\Rightarrow\; 3|n$.

Výsledky některých příkladů a cvičení jsou uvedeny na konci textu v oddílu 15.3.

4 Operace s množinami, důkaz užitím Vennových diagramů, kartézský součin

Warm-up: Po tématu logiky v týdnech 1-3 se budeme v týdnech 4-5 zabývat druhým základním pilířem matematiky, a sice číselnými množinami. To je téma studentům známé, proto jen něco málo o operacích s množinami v této kapitole a o dělitelnosti zejména přirozených a celých čísel v kapitole následující.

4.1 Přednáška

V kapitole 4 se budeme zabývat pěti druhy množinových operací, a sice sjednocením, průnikem, rozdílem, doplňkem a symetrickým rozdílem. Šestým typem „operace“ je kartézský součin množin[12], ale jedná se o postup trochu jiné kategorie, protože výsledkem kartézského součinu je množina prvků jiného typu než jsou prvky sjednocení, průniku, doplňku, rozdílu či symetrického rozdílu.

Množinou M (definice 20) rozumíme soubor navzájem rozlišitelných[13] prvků, o kterých lze jednoznačně rozhodnout, že do něj patří.

Prvky množiny budeme vypisovat do složených závorek:

- označení 19: Levá závorka $\{$ a pravá závorka $\}$ označují množinu.

Například $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ označuje množinu přirozených čísel, čísla 1, 2, 3 jsou prvky množiny N.

A) Zadávání množiny.

Množiny lze zadávat buď výčtem prvků jako v předchozím příkladě, nebo charakteristickou vlastností, jež splňují její prvky.

Příklad 4.1. Zadání množiny charakteristickou vlastností:

$$A = \{x \in R : 0 \leq x \leq 2\}$$

(čteme: A je množina všech reálných čísel x takových, že $0 \leq x \leq 2$)[14] – charakteristická vlastnost množiny následuje v tomto zápisu za dvojtečkou. $\star$

B) Základní množinová označení a definice

Označení operací průniku a sjednocení čtenář zná – v následující definici připomeneme definici disjunktních množin, univerzální množiny a doplňku množiny:

[12] Pojem operace bude přesně definován v definice 54 kapitoly 6, ale kartézský součin vytváří množiny objektů jiného typu, než jsou vstupní množiny, a proto kartézský součin množin není považován za binární operaci (jako jsou sjednocení, průnik, rozdíl, symetrická diference) nebo unární operaci (jako je doplněk množiny).

[13] Tj. jeden objekt nemůže být dvakrát prvkem téže množiny: $\{6, 6\} = \{6\}$.

[14] Všimněte si, že dvojtečku nyní čteme „takových, že“ nebo „tak, že“.

Množiny A, B se nazývají disjunktní (definice 21), když jejich průnikem je prázdná množina ($A \cap B = \emptyset$).

Univerzální množina[15] (definice 22a) je taková množina, která obsahuje všechny prvky, které má smysl uvažovat. Doplňkem množiny A vzhledem k univerzální množině (definice 22b) jsou ty prvky univerzální množiny, které neleží v množině A.

Příklad 4.2. Pokud $U = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ je univerzální množina a

$$A = \{\dots, -2, -1 - 0, 1, 2\},$$

tak doplňkem množiny A vzhledem k univerzální množině U je množina

$$\overline{A} = \{3, 4, 5, \dots\}.$$

Označení, která čtenář musí zvládnout, jsou tedy tato:

- označení 20: $\overline{A}$ ... doplněk množiny A (vzhledem k univerzální množině U);
- označení 21: „:=“ ... definiční, přiřazovací rovnítko, které znamená „se definuje jako ...“; například lze definovat doplněk množiny A takto:

  $$\overline{A} := \{x \in U : x \notin A\}$$

  (čteme: doplněk množiny A se definuje jako množina (či označuje množinu) těch prvků x z množiny U, které nepatří do A)
- označení 22: $\emptyset$ ... prázdná množina;
- označení 23: $\subseteq$ ... je podmnožinou;
- označení 24: $\subset$ ... je vlastní podmnožinou, tj. je podmnožinou, ale nerovná se dané množině; v matematických symbolech $A \subset B$ tehdy, když

  $$A \subseteq B \quad \wedge \quad A \neq B.$$

- (označení 25) rozdíl množin A a B budeme označovat sešikmeným znaménkem minus, aby bylo patrno, že se jedná o jinou operaci než odčítání reálných čísel:

  $$A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\};$$

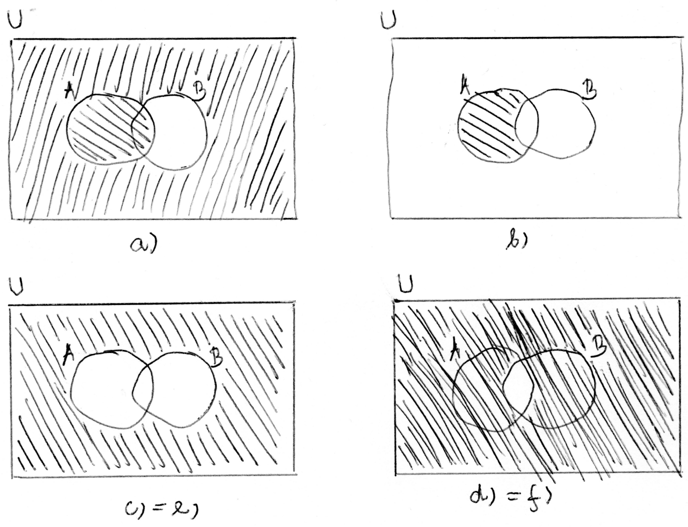
  Doporučí psát raději obyčejné MINUS, protože při použití lomítka záleží na tom, zda je otočeno ve tvaru dělení nebo není: množinové $\setminus$ je něco naprosto jiného než množinové dělení $/$, které bude představeno v kapitole 7. Pišme proto raději $A - B := \{x \in A : x \notin B\}$.

[15] Česky: všeobecná, všeobsahující.

C) Vennovy diagramy.

Vennovy diagramy (definice 23) jsou diagramy, které schematicky reprezentují množiny pomocí části roviny – část roviny označená jako M reprezentuje všechny prvky množiny M.

Příklad 4.3. Nakreslete Vennovy diagramy následujících množin[16]: a) $A \cup \overline{B}$, b) $A \cap \overline{B}$, c) $\overline{A} \cap \overline{B}$, d) $\overline{A} \cup \overline{B}$, e) $\overline{A \cup B}$, f) $\overline{A \cap B}$. Řešení najdete na obrázku 1, kde daný obdélník reprezentuje univerzální množinu U, která je nadmnožinou množin A, B.



Obrázek 1: Výsledky příkladu 4.3 (Vennovy diagramy).

Typ důkazu číslo 8: Rovnost množin Vennovými diagramy.

Rovnost, ve které na obou stranách vystupují množiny a operace mezi nimi, lze dokázat pomocí Vennových diagramů – sestavíme Vennův diagram pro každou stranu rovnosti a vyšrafujeme v něm části odpovídající výsledkům daných operací; pokud pak v obou Vennových diagramech jsou vyšrafovány stejné části roviny, tvrzení o rovnosti je tím dokázáno.

(Věta 08) Pro libovolné tři množiny platí tzv. asociativní zákony vzhledem k operacím průniku a sjednocení:

$$\text{a)}\ \ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), \quad \text{b)}\ \ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Důkaz (typ 8) nakreslíme Vennův diagram pro každou ze stran rovnosti a porovnáme šrafované oblasti – zjistíme, že se rovnají, tj. schematický (či grafický) důkaz je hotov (vyučující na tabuli). □

[16] Tento příklad viz [4], str. 795. Většina této kapitoly je zpracována podle [4], str. 791-800.

Dále platí velmi zajímavé rovnosti množin, které souvisí také s operací doplňku množiny vzhledem k univerzální množině (= s definicí 22):

(věta 09) De Morganovo pravidlo (a): Pro každé dvě množiny A, B, které jsou podmnožinou univerzální množiny U, platí:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Důkaz lze provést pomocí Vennových diagramů – viz cvičení. □

(věta 10) De Morganovo pravidlo (b): Pro každé dvě množiny A, B, které jsou podmnožinou univerzální množiny U, platí:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

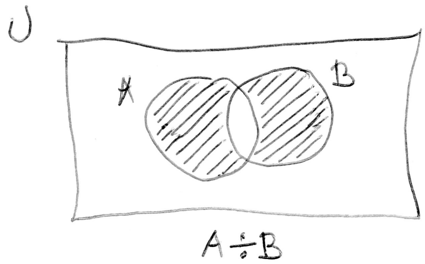
Důkaz lze provést pomocí Vennových diagramů – viz cvičení. □

D) Symetrický rozdíl množin.

Někdy se v úvodu do teorie množin uvádí kromě operací doplňku, sjednocení a průniku ještě operace (definice 24) symetrický rozdíl množin A, B, definovaný pomocí rovnosti

$$A \div B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

(z obrázku Vennova diagramu 2 je patrný výsledek této operace použité na množiny A, B).



Obrázek 2: Výsledek operace symetrického rozdílu množin A, B.

- (označení 26) Symetrický rozdíl množin A a B budeme označovat jako $A \div B$, tj.

$$A \div B := \{x : x \in (A \setminus B) \vee x \in (B \setminus A)\}.$$

E) Kartézský součin množin

Pojem kartézského součinu je v jistém smyslu odlišný od dosud uvažované unární operace doplňku množiny (unární operace = taková operace, do které vstupuje jedna množina A) a binárních množinových operací průniku, sjednocení, rozdílu nebo symetrického rozdílu (binární operace je taková operace, do které vstupují dvě množiny A, B)

– zatímco výsledkem všech předchozích operací je zase nějaká podmnožina univerzální množiny, výsledkem kartézského součinu je množina jiné kategorie: množina uspořádaných dvojic.

(definice 25) Kartézský součin množin A, B je množina všech uspořádaných dvojic $[a, b]$, kde $a \in A$ a současně $b \in B$. Speciálně pokud $A = B$, kartézský součin $A \times A$ nazveme kartézskou mocninou neboli kartézským čtvercem. Prvky kartézského součinu se nazývají uspořádané dvojice.

- (označení 27) kartézský součin množin A a B budeme označovat jako $A \times B$, tj. zkrácené symbolické vymezení kartézského součinu je dáno vztahem

  $$A \times B := \{[a; b] : a \in A \wedge b \in B\}$$

  (na procvičení předchozí symbolické vyjádření přečteme: Kartézský součin množin A a B je množina (všech možných) uspořádaných dvojic typu $[a; b]$, kde a je prvkem množiny A a b je prvkem množiny B).

Příklad 4.4. Pro $A = \{a, b\}$ a $B = \{1, 2, 3\}$ lze sestavit jejich kartézský součin, který má šest prvků (= šest uspořádaných dvojic):

$$A \times B = \{[a, 1], [a, 2], [a, 3], [b, 1], [b, 2], [b, 3]\}$$

(tedy vidíme, že u konečných množin je dán počet prvků jejich kartézského součinu součinem počtů prvků jednotlivých množin). Pozor, záleží na pořadí, protože $A \times B \neq B \times A$. Speciálně

$$B \times A = \{[1, a], [1, b], [2, a], [2, b], [3, a], [3, b]\}.$$

V uspořádaných dvojicích v hranatých závorkách tedy záleží na pořadí jednotlivých prvků.

Příklad 4.5. RxR označuje množinu, jejíž obrazy (modely) lze znázornit v rovině s kartézskou soustavou souřadnic (tj. takovou soustavou, jejíž dvě osy jsou na sebe kolmé a jednotka na obou osách je stejně velká). Přitom např. bod $[1; 2]$ leží v takto popsané rovině jinde než bod $[2; 1]$ – záleží na pořadí prvků v dané uspořádané dvojici.

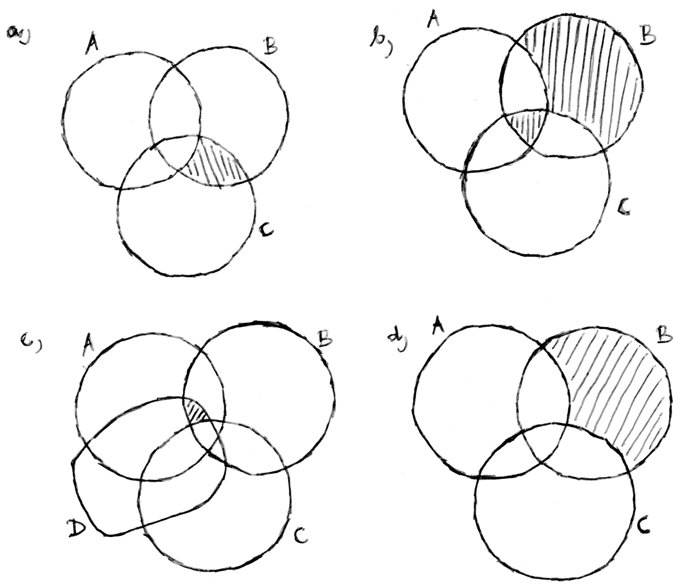
Tedy pojem kartézského součinu nám umožňuje popsat množiny bodů v rovině pomocí jejich souřadnic – jedná se proto o základní pojem analytické geometrie, kdy geometrické útvary popisujeme pomocí čísel, funkcí a rovnic.

4.2 Cvičení

Cvičení 4.1. Pomocí Vennových diagramů dokažte de Morganova pravidla – věty 9 a 10.

Cvičení 4.2. Vidíte souvislost mezi větami 1 a 2 a větami 9 a 10? Z jakého důvodu tato souvislost existuje?

Cvičení 4.3. Napište množinové výrazy, jejichž výsledkem je vyšrafovaná plocha Vennova diagramu na obrázku:



Cvičení 4.4. Prozkoumejte[17] operaci symetrického rozdílu a pomocí Vennových diagramů dokažte, že platí

4a) $A \div B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$,

4b) $A \div B = B \div A$,

4c) $A \cup B = A \div (B \div (A \cap B))$,

4d) $A \setminus B = A \div (A \cap B)$,

4e) $A \cap (B \div C) = (A \cap B) \div (A \cap C)$.

Cvičení 4.5. Vyjádřete matematickým zápisem bez jakékohokoli českého slova definice všech operací, které jsme v této kapitole prošli:

5a) $\overline{A} = \dots$

5b) $A \setminus B = \dots$

5c) $A \times B = \dots$

5d) $A \cup B = \dots$

5e) $A \cap B = \dots$

5f) $A \div B = \dots$

Cvičení 4.6. Uveďte de Morganova pravidla (věty 9 a 10) pouze slovně, bez jakéhokoli matematického symbolu.

Cvičení 4.7. Na univerzální množině U všech přirozených čísel jsou zadány množiny $A = \{2, 3, 4, 5, 8, 10\}$, $B = \{3, 5, 10, 12, 15\}$, $C = \{3, 10, 17, 18, 19\}$. Udejte výčtem prvků

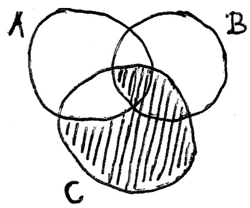
[17] Viz [17], str.44, př 1.2.B6.

množinu $(\overline{A \cup B}) \cap C$.

Cvičení 4.8.

a) Uveďte definici množiny: Množina je ...

b) Vyjádřete šrafovanou část S Vennova diagramu na obrázku **??** pomocí množin na obrázku a známých množinových operací: $S = \ldots$



Cvičení 4.9. Na konci jistého výrobního procesu prochází 500 součástek třemi kontrolami K_1, K_2, K_3. Zjistilo se, že 38 součástek neprošlo kontrolou K_1 (= bylo shledáno nevyhovující); 29 neprošlo K_2; 30 neprošlo K_3; 7 součástek neprošlo K_1 ani K_2; 5 neprošlo K_2 ani K_3; 8 neprošlo K_1 ani K_3; 3 součástky neprošly žádnou z kontrol. Určete, kolik součástek

a) prošlo všemi kontrolami bez vady, tj. žádná z kontrol je neshledala nevyhovujícími.

b) neprošlo právě jednou z kontrol K_1, K_2, K_3 (některou z nich).

Cvičení 4.10. Pomocí Vennových diagramů vyřešte tuto úlohu[18]: Ráno bylo na letišti 17 letadel, z nichž během dne odletělo 15 letadel, ale tři z nich se zase na letiště vrátila. Toho dne přiletělo celkem 32 letadel a odletělo jich celkem 28. Každé letadlo bylo toho dne na dráze letiště nejvýš dvakrát. Kolik letadel bylo na letišti večer? (Nápověda ... nakreslete si tři množiny v obecné poloze: množinu letadel, které byly na letišti ze včerejška; množinu letadel, které vzlétly dnes; množinu letadel, které se vrátily dnes – vyplňujte počty prvků do jednotlivých oblastí roviny).

Cvičení 4.11. Pomocí Vennových diagramů vyřešte: 120 studentů skládalo tři zkoušky. Přitom deset procent studentů nesložilo ani jednu z nich. Nebyl nikdo, kdo by složil zkoušku jen z druhého předmětu. Devět studentů z něj složilo úspěšně zkoušku, leč pro změnu neprospělo z prvního předmětu. 47 studentů složilo ze tří zkoušek dvě. 33 studentů nevyhovělo z třetího předmětu. 56 studentů složilo úspěšně zkoušku ze druhého i třetího předmětu, zato však 20 studentů neobstálo ani u jednoho z nich. Kolik studentů složilo pouze třetí zkoušku?

Cvičení 4.12. Cvičení k pojmu kartézský součin: Viz realisticky.cz (materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 2101 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Výsledky některých příkladů a cvičení jsou uvedeny na konci textu v oddílu 15.4.

[18] Úlohy 4.10 a 4.11 byly převzaty z Hrůša (kniha [6]).

5 Dělitelnost celých čísel, důkaz užitím Dirichletova principu, operace s komplexními čísly

Warm-up: Představení učebnice Matematika – Hejného metoda, sešit A – poprvé. Viz přednes vyučujícího.

5.1 Přednáška

Příklad 5.1. (nebo spíše otázka) Řekněte sousedovi v lavici odpovědi na následujících pět otázek:

1. Proč existuje N?
2. Proč existuje Z, nestačilo by N?
3. Proč existuje Q, nestačilo by Z?
4. Proč existuje R, nestačilo by Q?
5. Proč existuje C, nestačilo by R?

A)převod racionálního čísla na desetinné číslo

Označení daných číselných oborů N, Z, Q, $R := Q \cup I$, C už bylo zmíněno v přednášce první, na tomto místě se chvíli věnujme rozdílu mezi množinami Q a I: uvedeme nyní velmi jednoduchý princip, který souvisí s důkazem typu 9, a pak pomocí tohoto principu dokážeme větu 11, která ukazuje na hlavní rozdíl mezi racionálními čísly (= čísly, která lze vyjádřit ve tvaru zlomku) a iracionálními čísly (která nelze vyjádřit ve tvaru zlomku).

Typ důkazu číslo 9: Dirichletův princip.

Pokud rozdělujeme $n + 1$ předmětů do n přihrádek, aspoň v jedné přihrádce najdeme po rozdělení aspoň dva předměty.

Platnost Dirichletova principu[19] je vidět „přirozeně“ = celkem s ní každý souhlasí. V tom nejhorším případě se může totiž stát, že po rozdělení n předmětů je v každé z n přihrádek jeden – ale ten poslední „n plus první“ předmět, už musíme tedy přidat do nějaké přihrádky, kde nějaký jeden předmět je ... tedy v aspoň jedné přihrádce budou po rozdělení aspoň dva předměty. Samozřejmě se může stát, že pokud předměty rozdělujeme libovolně, nikoli rovnoměrně, po rozdělení budou dva nebo tří předměty v pěti přihrádkách a řada dalších přihrádek bude prázdná – to je možné. Nás ale jen zajímá, že určitě existuje jedna přihrádka (šuplík) obsahující aspoň dva předměty – tento fakt je zaručen tím, že předmětů je více než přihrádek.

Tento velmi jednoduchý typ důkazu lze kupodivu použít při důkazu celkem důležité následující věty, která vystihuje rozdíl mezi číslem racionálním a číslem iracionálním.

(věta 11) Každé racionální číslo má desetinný rozvoj buď konečný, nebo periodický.

[19] Též: přihrádkový princip, anglicky – pigeonhole principle.

Důkaz: Uvažujme nejprve konkrétní zlomek $\frac{1}{7}$ jako vyjádření jednoho racionálního čísla a nalezněme jeho desetinný rozvoj, tj. vyjádření ve tvaru s desetinnou čárkou – všechny úvahy pak lze vztáhnout na obecné racionální číslo $\frac{m}{n}$ pro $m \in Z$, $n \in N$.

Při dělení 1 : 7 postupujeme následovně:

- $1 : 7 = 0$, zbytek 1, napíšeme desetinnou čárku do výsledku a připíšeme nulu;
- $10 : 7 = 1$, zbytek 3, ke zbytku připíšeme nulu;
- $30 : 7 = 4$, zbytek 2, ke zbytku připíšeme nulu;
- $20 : 7 = 2$, zbytek 6, let us put down another zero to the remainder;
- $60 : 7 = 8$, the remainder is 4, let us put down another zero to the remainder;
- $40 : 7 = 5$, the remainder is 5, let us put down another zero digit to the remainder;
- $50 : 7 = 7$, the remainder is 1, let us put down another zero digit to the remainder;
- Od této chvíle dělíme $10 : 7 = 1$, zbytek 3 ... ale to už tady jednou bylo, zbytky i výsledky po dělení se začínají periodicky opakovat. Proč tomu tak je?

Rozeberme si tuto situaci: Při dělení sedmi se po určité době dělenec „vyčerpá“ v tom smyslu, že neobsahuje žádné další cifry a přidáváme ke zbytku v nižších řádech pouze nuly[20]. Jediný vliv na každý další řádek písemného dělení mají tedy jen zbytky zbytky po dělení sedmi, ke kterým připisujeme stále jen nulu.

Víme, že zbytků po dělení sedmi je sedm různých – jsou to čísla (a současně cifry) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. A nyní využijeme Dirichletův (přihrádkový) princip: Stačí provést osm kroků částečného dělení po „vyčerpání“ dělence a protože možných zbytků po dělení sedmi je pouze sedm, jeden zbytek se po daných osmi krocích zopakuje dvakrát – a po zopakování daného zbytku se už periodicky opakují všechny další zbytky ve stejném pořadí, takže desetinný rozvoj našeho čísla je nekonečný, ale periodický.

Přesněji řečeno, pokud některý z dílčích zbytků je roven nule, v dělení už nepokračujeme a desetinný rozvoj takového zlomku je konečný. Tedy obecně lze říci, že při dělení $m : n$ po „vyčerpání“ dělence m (který má konečně mnoho cifer, a tak se vyčerpat někdy musí) stačí provést dalších maximálně $n+1$ kroků a dostaneme dílčí zbytek nula (tj. desetinný rozvoj daného racionálního čísla je konečný, ukončený), nebo se některý z nenulových zbytků zopakuje (a tedy desetinný rozvoj daného čísla je nekonečný periodický). □

[20] Nám se dělenec v našem příkladu dělení vyčerpal už po prvním kroku, protože byl jednociferný.

B) Komplexní čísla

Ke komplexním číslům[21] nyní velmi stručně, snad podle materiálu [1], str. 15,16,18:

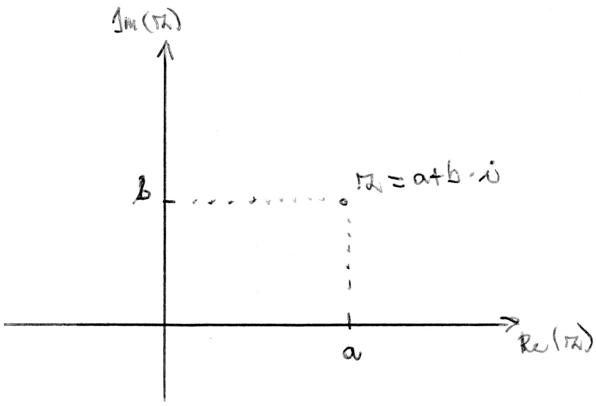
Důvodem existence komplexních čísel je snaha najít řešení například rovnice

$$x^2 + 1 = 0,$$

která má záporný diskriminant. Z tohoto důvodu se v matematice zavádí tzv. (označení 28) imaginární jednotka i taková, že $i^2 = -1$, a také $(-i)^2 = -1$. Pak můžeme říci, že řešením rovnice $x^2 + 1 = 0$ jsou i a $-i$.

Definice 26a: Každé komplexní číslo z lze vyjádřit v algebraickém tvaru $z = a + bi$, kde a a b jsou reálná čísla a i je imaginární jednotka. Reálné číslo a se nazývá reálná část komplexního čísla z, reálné číslo b nazýváme imaginární částí komplexního čísla z.

Díky tomu, že každé komplexní číslo je jednoznačně určeno uspořádanou dvojicí reálných čísel $[a, b]$, lze každé komplexní číslo znázornit v tzv. Gaussově rovině (definice 26b), kde na vodorovnou osu vyneseme reálné číslo a, na svislou osu reálné číslo b a obraz komplexního čísla $z = a + bi$ je pak na průsečíků kolmice k vodorovné ose v bodě a s kolmicí ke svislé ose v bodě b – viz obr. 3.

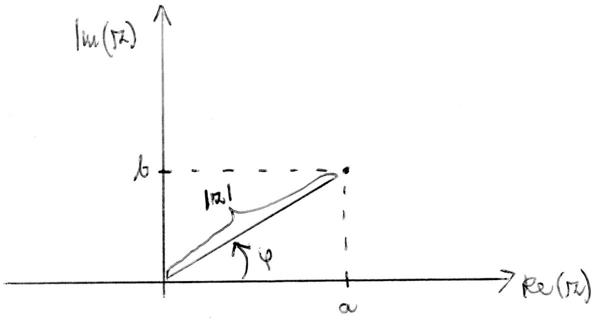


Obrázek 3: Obraz komplexního čísla $z := a + ib$ v Gaussově rovině.

Na základě modelu komplexních čísel v Gaussově rovině lze definovat pro každé komplexní číslo kromě nuly (definice 27a) pro $z \neq 0$ tzv. argument komplexního čísla z jako úhel $\varphi = \arg z$, který svírá průvodič obrazu tohoto čísla v Gaussově rovině s kladným směrem vodorovné osy, a (definice 27b) absolutní hodnotu neboli velikost komplexního čísla $|z|$ jako vzdálenost jeho obrazu v Gaussově rovině od počátku (= jako délku tohoto průvodiče) – viz obrázek 4.

Výpočet velikosti $|z|$ komplexního čísla je patrný z Pythagorovy věty: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, Výpočet argumentu φ plyne z téhož pravoúhlého trojúhelníku a pro $\varphi \in (\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ platí $\varphi =$

[21] Detailnějšího počítání s komplexními čísly se dotkneme v předmětu Algebra 3.



Obrázek 4: Význam argumentu a velikosti komplexního čísla.

$\mathrm{arctg}\frac{b}{a}$, ale pro všechny možné hodnoty a, b potřebujeme pro přesné vyjádření pečlivější přístup, protože se jedná o orientovaný úhel (může být kladný i záporný) z intervalu $\langle -\pi; \pi \rangle$:

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} 0 & \ldots \quad a=0,\ b=0 \\ \frac{\pi}{2} & \ldots \quad a=0,\ b>0 \\ \frac{-\pi}{2} & \ldots \quad a=0,\ b<0 \\ \mathrm{arctg}\frac{b}{a} & \ldots \quad \text{1. a 4. kvadrant} \\ \pi + \mathrm{arctg}\frac{b}{a} & \ldots \quad \text{2. kvadrant} \\ -\pi + \mathrm{arctg}\frac{b}{a} & \ldots \quad \text{3. kvadrant} \end{cases},$$

Pomocí velikosti a argumentu komplexního čísla lze zavést tzv. (definice 27c) goniometrický tvar komplexního čísla z:

$$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi).$$

Příklad 5.2. Počítání s komplexními čísly:

2a) Vypočtěte součet a součin čísel $z_1 = 2 - i$ a $z_2 = 1 + 3i$.

2b) Vypočtěte podíl čísel $z_1 = 2 - i$ a $z_2 = 1 + 3i$.

2c) Vypočtěte i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^7, i^8, atd.

Řešení příkladu: ad 2a) Uvidíme, že součtem i součinem dvou komplexních čísel je zase komplexní číslo:

$$z_1 + z_2 = 2 - i + 1 + 3i = (2+1) + i(-1+3) = 3 + 2i;$$

dále protože $i^2 = -1$, dostaneme při násobení komplexních čísel

$$z_1 \cdot z_2 = (2-i)\cdot(1+3i) = 2 + 6i - i - 3i^2 = 2 + 5i - 3(-1) = 5 + 5i;$$

ad 2b) Aby podílem dvou komplexních čísel bylo komplexní číslo, nesmíme dělit nulou, ale jinak pro nenulové z_2 dostaneme výsledek „vynásobením zlomku vhodnou jedničkou“:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-i}{1+3i} = \frac{2-i}{1+3i}\cdot\frac{1-3i}{1-3i} = \frac{2+6i-i-3i^2}{1-9i^2} = \frac{5+5i}{1+9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot i;$$

Ve jmenovateli součinu zlomků jsme užili vzorec $x^2 - y^2 = (x - y) \cdot (x + y)$ – tímto způsobem vždy lze odstranit imaginární jednotku i ze jmenovatele daného podílu – tj. výsledkem dělení komplexního čísla nenulovým komplexním číslem je zase komplexní číslo.

ad 2c) Víme, že $i^2 = -1$; proto lze další mocniny imaginární jednotky počítat

$$\begin{aligned} i^3 &= i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i; \\ i^4 &= i^3 \cdot i = (-i) \cdot i = -i^2 = 1 \\ i^5 &= i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i; \\ i^6 &= i^5 \cdot i = i \cdot i = -1; \\ i^7 &= i^6 \cdot i = (-1) \cdot i = -i; \\ i^8 &= i^7 \cdot i = (-i) \cdot i = 1; \\ &\text{atd.} \end{aligned}$$

Z toho je vidět, že vyšší mocniny imaginární jednotky i můžeme vždy redukovat na reálné číslo nebo na $\pm i$, a tedy i umocněním komplexního čísla dostaneme opět komplexní číslo.

O komplexních číslech budete více mluvit a počítat s nimi v předmětu Algebra 1 při řešení polynomických rovnic. Doporučuji také učebnici [16], která dostatečně seznamuje s komplexními čísly stručně a výstižně na 56 stranách. Ani v této učebnici není moc naznačeno, že díky zobrazení komplexních čísel v Gaussově rovině lze mnohé věci z analytické geometrie v rovině popsat též pomocí komplexních čísel – toho se využívá například v elektrotechnice.

C) Dělení celých čísel beze zbytku a se zbytkem

Definice 28: Celé číslo a beze zbytku dělí neboli je dělitelem celého čísla b, když existuje celé číslo q tak, že platí $b = a \cdot q$. Pokud číslo $qinZ$ s touto vlastností neexistuje, říkáme, že a nedělí (není dělitelem čísla) b.

Studenti pozor, dělitelnost známou ze střední školy jsme trochu rozšířili i na záporné dělitele, a tím se počet dělitelů každého celého čísla zdvojnásobil – kromě kladného znaménka existují i dělitelé se stejnou absolutní hodnotou, jen se jedná o záporná čísla.

Definice 29: Každé celé číslo b má vždy následující čtyři dělitele: 1, -1, b, $-b$ ... tito dělitelé se nazývají nevlastní dělitelé čísla b. Všichni ostatní dělitelé (pokud nějací existují) se nazývají vlastní dělitelé čísla b. S tím souvisí další pojem – definice 30 – celé číslo p se nazývá prvočíslo, pokud má pouze nevlastní dělitele; pokud má i vlastní dělitele, nazývá se složené číslo.

- (označení 29) Největší společný dělitel celých čísel a, b se označuje jako $NSD(a, b)$. Například $NSD(24, 30) = 6$.
- Násobek dvou přirozených čísel a, b je takové přirozené číslo c, že $a|c$ a současně $b|c$. (označení 30) Nejmenší společný násobek přirozených čísel a, b se označuje $nsn(a, b)$ a definuje se jako nejmenší přirozené číslo, které je násobkem obou z čísel a, b. Například $nsn(24, 30) = 120$.

V následující větě rozšíříme představu o dělení dvou kladných čísel, kde výsledkem je neúplný podíl a zbytek, na poněkud bizarní kombinaci dělení dvou celých čísel, kdy podíl může být záporný. Za této situace vylučujeme dělení nulou (rozdělení jakékoli hodnoty na nula částí nemá smysl) a případné záporné znaménko převedeme do čitatele, tj. stačí se omezit na dělení celého čísla b přirozeným číslem a:

(Věta 12) - věta o zbytku vždy nezáporném

Pro čísla $a \in N$, $b \in Z$ existuje dvojice celých čísel q, r takových, že $0 \leq r < a$, a platí

$$b = a \cdot q + r.$$

Důkaz typu 7A (konstrukční):

(a) Pro $a > 0$, $b \geq 0$: Sečítáme číslo a nulakrát, jedenkrát, dvakrát, atd. ... až q-krát, abychom dostali takové číslo, že dalším přičtením kladného čísla a už dostaneme číslo větší než b (protože číslo b je konečné, po konečném počtu sečtení čísla a se nám to musí podařit). Číslo q je pak podílem po dělení $b : a$ a číslo $r := b - aq$ je zbytkem po tomto dělení. Z konstrukce plyne, že zbytek r je kladný.

(b) Pro $a > 0$, $b < 0$: Odečítáme číslo a od nuly jedenkrát, dvakrát, atd. ... až g-krát, abychom dostali největší možné číslo, které je menší nebo rovno číslu b (protože číslo b je konečné, po konečném počtu odečtení kldného čísla a se nám to musí podařit). Číslo $q := -g$ je pak podílem po dělení $b : a$ a číslo $r := b - aq$ je zbytkem po tomto dělení. Z konstrukce plyne, že číslo aq je číslem totožným s b, nebo nejbližším záporným násobkem čísla a, jehož obraz na číselné ose leží nalevo od obrazu čísla b. Z této konstrukce plyne, že zbytek r je kladný.

Příklad 5.3. (studenti sami, vyučující provede kontrolu) Nalezněte čísla q, r z věty 12 při

a) dělení čísla $b = 25$ číslem $a = 3$;

b) dělení čísla $b = (-25)$ číslem $a = 3$;

Důvod hledání **vždy kladného** zbytku r jsou zbytkové třídy – viz 7 – pro ně budeme potřebovat rozdělení všech celých čísel na podmnožiny podle kladného zbytku při dělení přirozeným číslem. Je tedy pro nás důležitý fakt, že tento kladný zbytek vždy existuje. Při dělení záporného čísla b přirozeným číslem a při tomto přístupu tedy nehledáme číslo nejblíže menší než absolutní hodnota $|b|$, které je dělitelné číslem a, ale číslo nejblíže větší než $|b|$, které je dělitelné číslem a – tj. hledáme číslo nejblíže vlevo od obrazu čísla b na reálné ose, které je dělitelné číslem a, a pak jeho (nezáporná) vzdálenost od čísla b je rovna zbytku r. Více viz kapitola 7.

D) Věty o dělitelnosti celých čísel

Euklidův algoritmus (= tvrzení věty 14) už studenti znají z předmětu MA0002 (minimálně pro hledání největšího společného dělitele dvou polynomů). Stejný algoritmus platí i pro hledání největšího společného dělitele dvou celých čísel. Zde je uveden jen z hlediska důkazu, který spočívá na tvrzení věty 13 (ta je dokázána důkazem přímým z definice dělitelnosti) a je použitý při důkazu věty 15 (Bezoutovy rovnosti). Jedná se o ukázku důkazových metod typu 2 (důkazu přímého na základě definice nebo faktů dokázaných již dříve).

Věta 13. Pro celá čísla a, b, c platí:

$$\text{a) } a|b \wedge a|c \Rightarrow a|(b+c);$$
$$\text{b) } a|b \wedge a|c \Rightarrow a|(b-c)$$

(tedy pokud a dělí dvě celá čísla, dělí i jejich součet, a dělí také jejich rozdíl).

Důkaz: viz cvičení.

Protože[22] $NSD(0;0)$ neexistuje, $NSD(0;b) = |b|$ pro nenulové $b \in Z$ a $NSD(a;b) = NSD(|a|;|b|)$ pro $a \neq 0 \neq b$, stačí hledat největšího společného dělitele dvou přirozených čísel a, b. Z toho důvodu je následující věta vyslovena a dokázána pouze pro přirozená čísla.

Věta 14. (Euklidův algoritmus pro nalezení největšího společného dělitele přirozených čísel a, b)[23]: Přeznačme si čísla a, b tak, aby $b \geq a$. Proveďme nyní následující posloupnost dělení se zbytkem (podle věty 12):

$$\begin{array}{rlll}
b : a = q_0, & \text{zbytek je } r_0, & \text{tedy máme vztah} & (v) \quad b = a \cdot q_0 + r_0; \\
a : r_0 = q_1, & \text{zbytek je } r_1, & \text{tedy máme vztah} & (iv) \quad a = r_0 \cdot q_1 + r_1; \\
r_0 : r_1 = q_2, & \text{zbytek je } r_2, & \text{tedy máme vztah} & (iii) \quad r_0 = r_1 \cdot q_2 + r_2; \\
 & & \vdots & \\
r_{n-2} : r_{n-1} = q_n, & \text{zbytek je } r_n, & \text{tedy máme vztah} & (ii) \quad r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_n + r_n; \\
r_{n-1} : r_n = q_{n+1}, & \text{zbytek je } 0, & \text{tedy máme vztah} & (i) \quad r_{n-1} = r_n \cdot q_{n+1};
\end{array}$$

Pak poslední nenulový zbytek r_n v této posloupnosti dělení je roven největšímu společnému děliteli čísel a, b.

Důkaz: Protože $a > r_0 > r_1 > \ldots$, tak po konečném počtu kroků musí nastat $r_{n+1} = 0$. Další důkaz provedeme ve dvou krocích: a) dokážeme, že $r_n|a$, $r_n|b$; b) dokážeme, že každý jiný dělitel j, který dělí a i b, dělí i r_n.

[22] Viz [15], str. 13.
[23] viz [15], str. 13-14.

ad a) Uvažujme vztahy $(i), (ii), \dots, (v)$ z tvrzení věty (postupujeme nyní od spodního vztahu (i) k hornímu vztahu (v)):

$$\begin{aligned}
(i) &\overset{v.13a}{\Rightarrow} && r_n | r_{n-1}\\
(ii) &\overset{v.13a}{\Rightarrow} && r_n | (r_{n-1} \cdot q_n + r_n),\ \text{tj. } r_n | r_{n-2}\\
&\vdots\\
(iii) &\overset{v.13a}{\Rightarrow} && r_n | r_0\\
(iv) &\overset{v.13a}{\Rightarrow} && r_n | (r_0 \cdot q_1 + r_1),\ \text{tj. } r_n | a\\
(v) &\overset{v.13a}{\Rightarrow} && r_n | (a \cdot q_0 + r_0),\ \text{tj. } r_n | b
\end{aligned}$$

Z posledních dvou řádků plyne, že r_n je společným dělitelem čísel a i b.

ad b) Uvažujme nyní jiného dělitele j čísel a i b a postupujme nyní od horního vztahu (v) ke spodnímu vztahu (i):

$$\begin{aligned}
(v) &\overset{v.13b}{\Rightarrow} && j|b \wedge j|a \ \Rightarrow\ j|r_0\\
(iv) &\overset{v.13b}{\Rightarrow} && j|a \wedge j|r_0 \ \Rightarrow\ j|r_1\\
(iii) &\overset{v.13b}{\Rightarrow} && j|r_0 \wedge j|r_1 \ \Rightarrow\ j|r_2\\
&\vdots\\
(ii) &\overset{v.13b}{\Rightarrow} && j|r_{n-2} \wedge j|r_{n-1} \ \Rightarrow\ j|r_n
\end{aligned}$$

Každý jiný dělitel j čísel a, b je i dělitelem čísla r_n (viz poslední řádek), tj. r_n je ze všech dělitelů čísel a, b ten největší. □

Věta 15. (Bezoutova[24] rovnost) Pro libovolná celá čísla a, b existují celá čísla u, v taková, že platí:

$$a \cdot u + b \cdot v = \mathrm{NSD}(a, b),$$

kde $\mathrm{NSD}(a, b)$ je největší společný dělitel čísel a, b.

Důkaz: Podobně jako v důkazu věty 14, projdeme systém rovností věty 14 zdola nahoru:

$$r_n \overset{(ii)}{=} \underline{r_{n-2}} - \underline{r_{n-1}} \cdot q_n \overset{(\dots)}{=} r_{n-2} - (r_{n-3} - r_{n-2} \cdot q_{n-1}) \cdot q_n = \underline{r_{n-3}} \cdot (-q_n) + \underline{r_{n-2}} \cdot (1 + q_{n-1} \cdot q_n) = \dots \overset{(v)}{=} \underline{a} \cdot u + \underline{b} \cdot v.$$

5.2 Cvičení

Cvičení 5.1. Procvičte si výpočty s komplexními čísly:

1a) Pro čísla $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 2 - 2i$ vypočtěte jejich součet, součin, podíl a druhé mocniny;

1b) V oboru komplexních čísel řešte rovnici $x^2 + x + 1 = 0$.

[24] Čti: [bezutova]. Viz [15], str. 15.

Cvičení 5.2. Převeďte daná komplexní čísla v algebraickém tvaru na goniometrický tvar:

2a) $z_1 = 2$, $z_2 = -2$.

2b) $z_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}$, $z_4 = \frac{\sqrt{-3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}$.

2c) $z_5 = i$, $z_6 = -i$.

Cvičení 5.3. Převeďte daná komplexní čísla v goniometrické tvaru na algebraický tvar:

3a) $z_1 = 2 \cdot (\cos \frac{3\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{4})$.

3b) $z_2 = 3 \cdot (\cos \frac{3\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{2})$.

3c) $z_3 = 4 \cdot (\cos \frac{-\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{-\pi}{6})$.

Cvičení 5.4. Dokažte věty 13a a 13b důkazem přímým (typ 2) z definice číslo 28.

Cvičení 5.5. Procvičte si praktické užití věty 14: podle procesu popsaného ve větě 14 nalezněte největšího společného dělitele čísel 208 a 364. Nalezněte tohoto dělitele také druhým způsobem, a sice rozkladem čísel na součin prvočísel.

Cvičení 5.6. Pokuste se dokázat následující jednoduché skutečnosti, které platí pro celá čísla. Jako první krok si ovšem všechny tři úkoly musíte přepsat pomocí symbolického matematického zápisu bez českých slov:

6a) Druhá mocnina každého lichého čísla zmenšená o jedničku je dělitelná osmi;

6b) rozdíl druhých mocnin dvou libovolných lichých čísel je dělitelný osmi;

6c) součet tří po sobě následujících celých čísel, z nichž první a třetí jsou lichá, je dělitelný šesti.

Výsledky některých příkladů a cvičení jsou uvedeny na konci textu v oddílu 15.5.

6 Binární relace a její vlastnosti

6.1 Přednáška

Třetí odpovědí na otázku o podstatě matematiky je pojem binární relace na množině. Tento pojem je klíčovým pojmem tohoto předmětu, protože všechny klíčové definice následujících kapitol (uspořádání, ekvivalence, zobrazení, posloupnost funkce) jsou speciálním příkladem relace.

a) Pojem relace

V běžném životě užíváme řadu relací mezi prvky dvou různých množin, např.

- „mám v rozvrhu“ je relace mezi množinou dnů v týdnu a množinou předmětů ve škole;
- „má občas k snídani“ je relace mezi množinou lidí a množinou potravin (poživatin);

Příkladem relací mezi prvky jedné množiny jsou

- „je biologickým dítětem“ ... relace na množině lidí; zvláštní vlastností této relace je to, že každé dítě je v relaci se dvěma rodiči;
- „jeho matka je“ ... relace na množině lidí; zvláštní vlastností této relace je to, že jedno dítě je v relaci s jedinou matkou, tj. tato relace splňuje podmínku zobrazení (viz kapitola 10): každé dítě jednoznačně odkazuje na svou matku.
- $\leq$, $\geq$ na množině celých čísel;
- $|$ (dělí = je dělitelem) na množině přirozených čísel;
- $\subseteq$, $\supseteq$ na množině všech podmnožin dané množiny;
- atd.

Lidově řečeno, relace je množina nějakých vztahů, přičemž každý vztah spojuje dva objekty (dva prvky) buď ze dvou různých množin, nebo z jedné množiny. Platí ovšem ještě jedna věc, kterou splňují všechny výše uvedené příklady: v tomto vztahu mezi dvěma objekty záleží na pořadí, ve kterém je uvádíme – to se rozumí samo sebou, ale zejména v relaci mezi prvky téže množiny si musíme dát pozor, který prvek uvádíme jako první a který jako druhý, aby bylo patrno, např. kdo je matka a kdo dcera; které číslo je menší než to druhé číslo, apod.

Nicméně kromě lidové definice musí všichni studenti umět i přesnou, matematickou definici:

Definice 31a: relace mezi množinami M_1 a M_2 je nějaká podmnožina kartézského součinu $M_1 \times M_2$. Definice 31b: relace na množině M je nějaká podmnožina kartézského součinu $M \times M$.

Prvky relace jsou tedy uspořádané dvojice $[x, y]$, ve kterých záleží na pořadí. Pozor na rozdíl mezi pojmem kartézský součin a relace – kartézský součin je množina všech možných uspořádaných dvojic, které můžeme z daných dílčích množin sestavit; kdežto relací rozumíme každou podmnožinu kartézského součinu. Např. pro $M = \{1, 2, 3\}$ je

$$M \times M = \{[1;1], [2;2], [3;3], [1;2], [2;1], [1;3], [3;1], [2;3], [3;2]\},$$

ovšem např. relace „je ostře menší než“ obsahuje jen některé uspořádané dvojice přirozených čísel z kartézského součinu $M \times M$:

$$\text{je ostře menší než } = \{[1;2], [1;3], [2;3]\}.$$

Poznámka: Rozdíl mezi relacemi a operacemi

Kromě řady relací se v matematice používá řada operací. O operacích (např. sčítání, odčítání, průnik, sjednocení) bude ještě řeč – nyní jen zmíníme hlavní rozdíl mezi relacemi a operacemi: výsledkem operace $*$ (za hvězdičku si dosaďte např. sčítání, násobení, průnik, apod) mezi dvěma prvky a, b je obecně nějaký třetí prvek $a * b$ (např. $2 + 3 = 5$), kdežto relace jen uvádí do vztahu dané dva prvky a, b (např. $2 \leq 3$).

Poznámka: Zadávání relace

Relaci lze zadávat

- **výčtem uspořádaných dvojic**: například

  $$\rho = \{[a, b], [b, a], [b, c], [b, b]\};$$

  ve shodě s učebním textem [14], str.17, budeme též relaci vypisovat takovým stylem, že označení relace bude umístěno v zápise mezi danými prvky (podobně jako znak „$\leq$“ je napsán mezi čísly 2 a 3, tj. v našem příkladu tatáž relace bude zapsaná pomocí vztahů

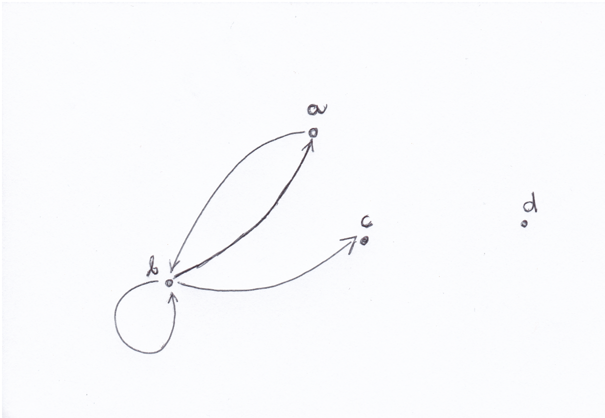
  $$a\rho b,\ b\rho a,\ b\rho c,\ b\rho b.$$

- **grafem**, kde prvek $[a, b]$ znázorníme šipkou vycházející z a a směřující do b, prvek $[b, b]$ znázorníme smyčkou z b do b, atd. Tedy v našem příkaldu relace se čtyřmi prvky (= čtyřmi vztahy = čtyřmi dvojicemi)

- **maticí**, tedy pro tentýž příklad:

  $$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

  (na průsečíku prvního řádku (= řádku prvku a) a druhého sloupce (= sloupce prvku b) matice je hodnota 1, protože uspořádaná dvojice $[a, b]$ je prvkem relace ρ; dále na průsečíku druhého řádku a druhého sloupce matice je 1, protože smyčka $[b, b]$ je prvkem relace ρ; na třetím a čtvrtém řádku matice jsou samé nuly, protože c ani d není první souřadnicí žádné uspořádané dvojice z ρ, atd). Čtyřem šipkám v grafové reprezentaci odpovídají čtyři hodnoty 1 v matici relace.



Obrázek 5: Grafová reprezentace relace ρ – příklad.

B) Základní vlastnosti relace

U pojmu relace budeme studovat určité další definované vlastnosti a rysy, to zejména u relace typu 31b, tj. **relace na množině** M.

Příklad 6.1 (vyučující – studenti) V následujících definicích řekněte,

(i) jak lze danou vlastnost poznat z grafové reprezentace relace (a z reprezentace maticí);

(ii) uveďte příklad této relace ze života nebo z matematiky.

Relace ρ na množině M se nazývá (kromě čísla identifikujícího danou vlastnost si prosím pamatujte i její název)

<u>reflexivní</u>, když $\forall x \in M \; : x\rho x$ (vlastnost (11))

(Slovně: Každý prvek zadané množiny je v relaci se sebou samotným);

<u>antireflexivní</u>, když $\forall x \in M \; : \neg(x\rho x)$; (vlastnost (anti-11))

(Slovně: Žádný prvek zadané množiny není v relaci se sebou samotným);

<u>symetrická</u>, když $\forall x, y \in M \; : x\rho y \Rightarrow y\rho x$; (vlastnost (12))

(Lidově: každý vztah, který existuje, je oboustranný! Přesně matematicky: Relace může obsahovat uspořádané dvojice stejných prvků a musí s každou dvojicí různých prvků obsahovat i dvojici těchto prvků v opačném pořadí);

<u>antisymetrická</u>, když $\forall x, y \in M \; : (x\rho y \wedge y\rho x \Rightarrow x = y)$; (vlastnost (anti-12))

(Lidově: žádný vztah (kromě vztahu k sobě samému) není oboustranný. Přesně matematicky: Relace může obsahovat uspořádané dvojice stejných prvků a nesmí s žádnou dvojicí různých prvků obsahovat také dvojici prvků v opačném pořadí);

tranzitivní, když $\forall x, y, z \in M \ : x\rho y \wedge y\rho z \Rightarrow x\rho z$; (vlastnost (13))

(Lidově řečeno: Relace dědičnosti, neboli prvek z automaticky zdědí od prvku y i jeho vztah k prvku x. Přesně matematicky: Pokud prvek x je v relaci s prvkem y a prvek y je v relaci s prvkem z, tak musí být i prvek x v relaci s prvkem z);

úplná, když $\forall x, y \in M \ : x\rho y \vee y\rho x$; (vlastnost (14))

(Pro každou dvojici prvků (nebo i stejné prvky) musí platit, že prvek x je v relaci s prvkem y nebo prvek y je v relaci s prvkem x).

Poznámky k úplné relaci. Z definice úplné relace je vidět, že úplná relace je automaticky reflexivní (tj. pro $x = y$ plyne, že $x\rho x$. Někdy se úplná relace definuje na základě podmínky, která platí jen pro navzájem různé prvky, tj. zhruba jako

$$\forall x, y \in M \ : x \neq y \Rightarrow x\rho y \vee y\rho x;$$

my se ovšem budeme držet té definice úplné relace, která zahrnuje i reflexivitu. Tato rozdílnost v definici zpravidla nehraje roli, protože většina relací, které jsou zajímavé pro naše studium a používané v praxi, jsou úplné a současně reflexivní.

A ještě jedna poznámka k úplné relaci: úplná relace stále ještě nemusí být rovna kartézskému součinu daných množin (nebo kartézské mocnině dané množiny): Například relace „$\leq$“ na množině přirozených čísel je úplná, ale neobsahuje všechny možné uspořádané dvojice z kartézského čtverce (= kartézské druhé mocniny) $N \times N$, protože například $[2; 1]$ není prvkem relace „$\leq$“.

Příklad 6.2 (v trojicích, jen studenti) Vezměte si stránku A4 a rozdělte na osm částí. V každé části nakreslete pět bodů znázorňujících pětiprvkovou množinu, označte je a, b, c, d, e. Do množiny šipkami znázorněte relaci, která

1. je reflexivní,
2. je antireflexivní,
3. není ani reflexivní, ani antireflexivní[25],
4. je symetrická,
5. je antisymetrická,
6. není ani symetrická, ani antisymetrická[26],

[25] Takové relace existují, protože vlastnosti reflexivity a antireflexivity nejsou si navzájem negacemi.
[26] Takové relace existují, protože vlastnosti symetrie a antisymetrie nejsou si navzájem negacemi.

7. je tranzitivní,

8. není tranzitivní.

Příklad 6.3 (v trojicích, jen studenti) Jaké vlastnosti splňuje relace | (dělí, je dělitelem) na množině$(Z, \cdot)$? Relaci | definujeme normálně, jak bychom u dělitelnosti čekali:

$$\forall x, y \in Z : \quad x|y \Leftrightarrow (\exists p \in Z : y = x \cdot p)$$

Příklad 6.4 (vyučující – studenti) Jen dvě otázky, než pokročíme k vážnějším příkladům:

- Může být některá relace symetrická a antisymetrická současně? $\star$

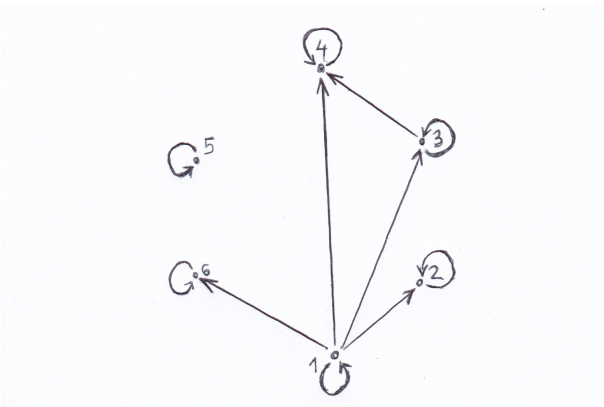
A nyní už zajímavější příklady:

Příklad 6.5 (v trojicích, jen studenti) U následujících příkladů rozhodněte, jaké vlastnosti splňují zadané relace:

a) Relace $\leq$ na množině $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$;

b) relace $\|$ (být rovnoběžný) na množině přímek v rovině;

c) Relace je zadána grafovou reprezentací[27] na obrázku 6:



Obrázek 6: Příklad 6.5.c.

d) Zadání opět grafem[28], obrázek 7:

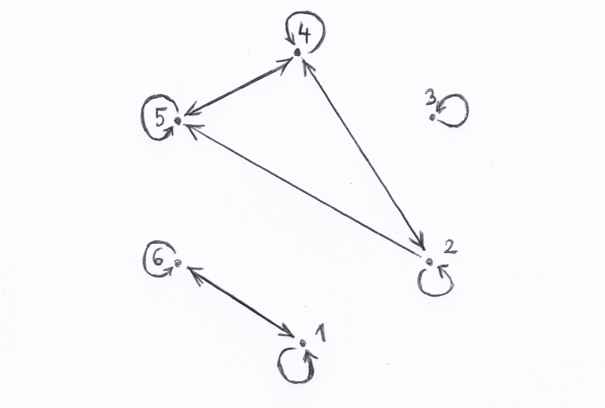
C) Pojem inverzní relace

Definice 32: Inverzní relace ρ^{-1} k relaci ρ je taková relace, která obsahuje právě ty uspořádané dvojice, které byly utvořeny z prvků relace ρ přehozením pořadí prvků.

Tedy platí

$$\rho^{-1} = \{[y, x] \in M \times M \quad : \quad [x, y] \in \rho\}.$$

[27] [14], str.20, obr. 2a.
[28] [14], str.20, obr. 2b.



Obrázek 7: Příklad 6.5.d.

Inverzní relaci k zadané relaci sestrojíme velmi jednoduše v grafové reprezentaci – v inverzní relaci se všechny šipky grafové reprezentace otočí opačným směrem (a smyčky zůstanou, protože na orientaci smyčky v grafové reprezentaci prvku $[x; x]$ nezáleží). V maticové reprezentaci se matice transponuje podle hlavní diagonály, tj. pro ty, kdo ještě nerozumí, o čem je řeč: řádky maticové reprezentace relace ρ se napíší do sloupců maticové reprezentace relace ρ^{-1}.

Z definice pojmu inverzní relace k relaci na množině je vidět, že pro jakoukoli relaci ρ její inverzní relace ρ^{-1} vždy existuje.

6.2 Cvičení

Cvičení 6.1. Úvodní cvičení k pojmu **relace**: Viz realisticky.cz (materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 2102 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 6.2. Úvodní cvičení k pojmu **zobrazení**: Viz realisticky.cz (materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 2103 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 6.3. Nakreslete všechny relace (v grafové reprezentaci) na a) jednoprvkové možině, b) na dvouprvkové množině, c) na tříprvkové množině; d) pokuste se vyslovit větu o počtu všech relací na $n-$prvkové množině.

Cvičení 6.4. Uveďte příklad relace ρ na množině $\{1, 2, 3, 4\}$, která je symetrická a současně není tranzitivní.

Cvičení 6.5. Pokud dvě relace ρ_1, ρ_2 jsou obě tranzitivní, pak jejich sjednocení $\rho_1 \cup \rho_2$ je také tranzitivní. Dokažte nebo vyvraťte tvrzení v předchozí větě[29].

[29] Pokud si studenti neví rady, doporučte nakreslení tří obrázků: jeden obrázek pro relaci ρ_1, druhý pro relaci ρ_2 a třetí pro relaci $\rho_1 \cup \rho_2$. Dále doporučte studentům tvrzení spíše vyvracet než dokazovat.

Cvičení 6.6. Uveďte příklad relace ρ na množině $\{1, 2, 3, 4\}$, která není ani symetrická, ani antisymetrická a obsahuje mimo jiné také prvky $[3; 4]$ a $[4; 3]$.

Cvičení 6.7. a) Je relace dělitelosti $|$ antisymetrická na množině N? b) Je relace dělitelnosti $|$ antisymetrická i na množině Z?

Cvičení 6.8. Na množině Z je dána relace ρ definovaná vztahem

$$x\rho y \Leftrightarrow x^2 = y.$$

Určete její vlastnosti, zejména ověřte (11), anti-(11), (12), anti-(12), (13), (14).

Cvičení 6.9. Negujte vlastnost (12) relace ρ na množině M, a to důkladněji než jen stylem „není pravda, že“. Postup:

a) Napište vlastnost (12) symbolickým matematickým zápisem;

b) Negujte část (a).

Cvičení 6.10. Negujte vlastnost anti-(12) relace ρna množině M, a to důkladněji než jen stylem „není pravda, že“. Postup:

a) Napište vlastnost anti-(12) symbolickým matematickým zápisem;

b) Negujte část (a).

Cvičení 6.11. Negujte vlastnost (13) relace ρna množině M, a to důkladněji než jen stylem „není pravda, že“. Postup:

a) Napište vlastnost (13) symbolickým matematickým zápisem;

b) Negujte část (a).

Cvičení 6.12. Podmnožiny X, Y množiny $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ jsou v relaci ρ, když $X \cup Y = A$. Zjistěte, které z vlastností (11), anti-(11), (12), anti-(12), (13), (14) platí pro tuto relaci.

Cvičení 6.13. Na množině přirozených čísel je dána relace ρ_1 takto: $x\rho_1 y$, když $x \cdot y$ je liché číslo. Zjistěte, jaké vlastnosti ((11), anti-(11), (12), anti-(12), atd.) má tato relace.

Cvičení 6.14. Ve fotbalové lize hraje[30] v každém ročníku každý tým s každým jiným týmem dva zápasy, z toho jeden zápas se hraje na hřišti jednoho týmu a druhý na hřišti druhého týmu. Definujme relaci $a\rho_2 b$ tehdy, když tým A hraje proti týmu B na svém hřišti v daném roce. Určete vlastnosti relace na množině všech týmů ligy v daném ligovém ročníku.

Cvičení 6.15. Co se ještě nedělalo z příkladů B1 (tento příklad obsahuje inverzní relaci), B2, B6, B8, B9, B10, B11 na stranách 48-49 sbírky [17].

Výsledky některých příkladů a cvičení jsou uvedeny na konci textu v oddílu 15.6.

[30]Tento systém platil do roku 2018, Od té doby to v první fotbalové lize bude podle všeho fungovat jinak: kromě dvou zápasů každého s každým jsou v daném roce ještě další ligové zápasy s některými soupeři, jakási nadstavbová část. Tuto situaci v příkladu neuvažujte.

7 Ekvivalence a rozklady

V tomto týdnu se budeme zabývat jedním důležitým typem relace, a sice relací ekvivalence na množině – pozor, nezaměňovat s logickou ekvivalencí. Relace ekvivalence je jistým typem binární relace na množině.

7.1 Přednáška

Definice 33: Relace ρ na množině M se nazývá ekvivalence, pokud splňuje vlastnosti (11), (12) a (13).

Příklad 7.1. Relace rovnoběžnosti na množině přímek v rovině je ekvivalence (viz příklad 6.5.b). Ověřte, že platí vlastnosti (11), (12), (13).

Příklad 7.2. Na množině všech zlomků existuje známá ekvivalence ρ mezi těmi zlomky, které všechny lze zkrátit na jeden základní tvar. Tuto relaci ekvivalence na množině Q všech zlomků lze definovat takto:

$$\left[\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right] \in \rho \text{ tehdy, když platí } ad = bc.$$

Například $\frac{3}{5}$ je číslo ekvivalentní s číslem $\frac{15}{25}$, které lze převést na $\frac{3}{5}$ vykrácením čitatele i jmenovatele pěti (platí tedy definiční podmínka $3 \cdot 25 = 5 \cdot 15$).

Nebo číslo $\frac{-1}{3}$ je v ekvivalenci s číslem $\frac{-3}{9}$, které lze převést na $\frac{-1}{3}$ vykrácením třemi (protože platí $(-1) \cdot 9 = 3 \cdot (-3)$), atd.

S pojmem relace ekvivalence velmi úzce souvisí další pojem, a to rozklad množiny.

Definice 34: Řekneme, že systém podmnožin M_i množiny M tvoří rozklad množiny M, když

a) $M_i \neq \emptyset$;

b) $\bigcup_{i=1,\ldots,n} M_i = M$;

c) $M_i \cap M_j = \emptyset$ pro $i \neq j$.

Tj. ad a) množiny $M_i$jsou neprázdné, ad b) sjednocením množin M_i je celá množina M, a ad c) množiny M_i jsou po dvou disjunktní, tj. každé dvě z nich mají prázdný průnik.

Příklad 7.3. Vypište (a znázorněte graficky) všechny možné rozklady tříprvkové množiny $M = \{a, b, c\}$. Řešení: viz příprava ... takových možných rozkladů existuje pět: a) rozklad M na tři jednoprvkové podmožiny, b) rozklad M na $M_1 = \{a, b\}$, $M_2 = \{c\}$; c) rozklad M na $M_1 = \{a, c\}$ a $M_2 = \{b\}$; d) rozklad M na $M_1 = \{b, c\}$ a $M_2 = \{a\}$; e) a konečně, rozklad M na jedinou tříprvkovou podmnožinu $M_1 := M$. □

Pojem rozkladu je spojen s definicí ekvivalence následujícími dvěma způsoby:

A) Konstrukce ekvivalence na základě rozkladu

Je zadán rozklad množiny M – definujeme-li relaci E vztahem

$$xEy \Leftrightarrow x, y \in M_i \quad \text{pro nějaké } i,$$

(prvky x, y jsou v relaci, když leží ve stejné třídě rozkladu), pak tato relace je ekvivalence a nazývá se relace určená (= indukovaná) rozkladem množiny M (definice 35).

Příklad 7.4. Napište relaci ekvivalence indukované (= určené) každým z rozkladů tříprvkové množiny $M = \{a, b, c\}$ v předchozím příkladu.

Příklad 7.5. (jen studenti) a) Nakreslete všechny možné rozklady čtyřprvkové množiny $M = \{a, b, c, d\}$; b) jinou barvou do diagramů těchto rozkladů vyznačte (pomocí grafové reprezentace) relaci ekvivalence indukovanou vždy daným rozkladem. Na obě části úkolu máte dohromady deset minut.

B) Konstrukce rozkladu na základě ekvivalence

Je zadána ekvivalence E na množině M – definujeme-li rozklad M způsobem „v jedné třídě rozkladu leží právě ty prvky, které jsou navzájem všechny po dvojicích ekvivalentní“, dostaneme také strukturu označenou stejně jako v předchozí definici s tím rozdílem, že první nebylo vejce, ale slepice (promiňte – první nebyl rozklad, ale ekvivalence), a množina $M/_E$ se nazývá (definice 36) faktorová množina množiny M podle ekvivalence E, nebo krátce faktormnožina[31], značíme (označení 31)

$$M/_E := \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}.$$

Pro upřesnění, které se nám bude hodit v předmětu Algebra 1, dodejme, že jednotlivé třídy M_i považujeme za prvky této faktormnožiny $M/_E$.

Ad příklad 7.2. Pokud se vrátíme k relaci = (rovnost zlomků), tak v jedné třídě rozkladu $Q/_=$ jsou právě ty zlomky, které lze krácením či rozšířením převést navzájem jeden na druhý. **Říkáme, že každá třída rozkladu označuje jedno racionální číslo – a toto číslo lze reprezentovat libovolným zlomkem z dané třídy**. Tedy racionální číslo je označení pro celou množinu zlomků, z nichž všechny mají tentýž jediný obraz na reálné ose! To je důležitý rozdíl mezi pojmem zlomku a pojmem racionálního čísla, který lze vyjádřit právě pomocí rozkladu množiny všech zlomků podle uvažované ekvivalence.

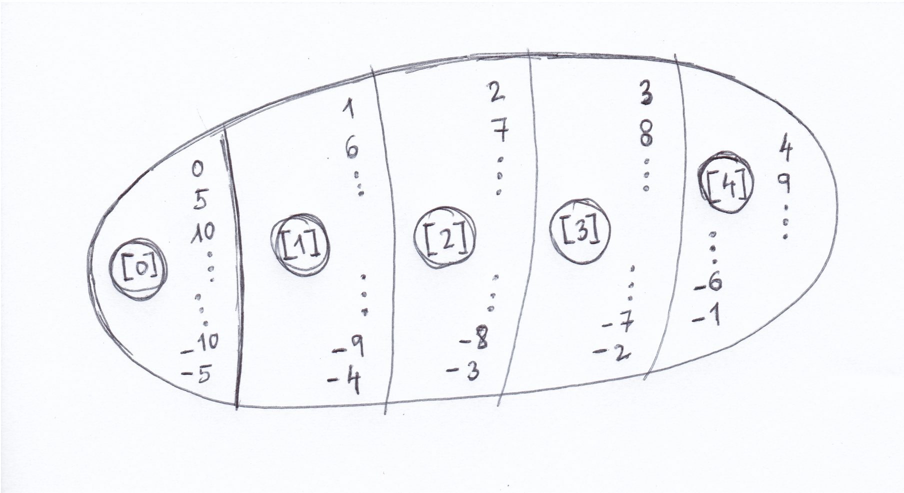
Než přikročíme k důležitému příkladu 7.6, definujeme na množině Z relaci kongruence:

- Definice 37: celá čísla a, b jsou kongruentní podle modulu n, pokud $n|(b-a)$;
- Označení 32 vztahu z definice 37: $a \equiv b \pmod{n}$;

Příklad 7.6. Podle relace kongruence podle modulu 5 lze množinu celých čísel rozdělit do pěti podmnožin.

V této situaci lze nyní říci:

[31] Česky: rozkladová množina (ale vžil se anglický název, FACTOR (jako sloveso) znamená ROZLOŽIT).



Obrázek 8: Množina zbytkových tříd Z_5.

a) Označíme-li znakem E danou relaci kongruence, můžeme psát xEy, když x, y náleží do stejné podmnožiny rozkladu ... tato relace je relací ekvivalence na Z (je to relace reflexivní (např. $5 \equiv 5$), symetrická (např. $5 \equiv 10$ implikuje[32], že $10 \equiv 5$), tranzitivní ($5 \equiv 10, \quad 10 \equiv 30 \quad \Rightarrow 5 \equiv 30$).

b) Označíme-li tyto podmnožiny $M_0 := [0]$, $M_1 := [1]$, $M_2 := [2]$, $M_3 := [3]$, $M_4 := [4]$, tak systém podmnožin $\{M_0, M_1, M_2, M_3, M_4\}$ tvoří rozklad množiny Z podle ekvivalence E.

c) Když se na M_i přestaneme dívat jako na množiny a začneme se na ně dívat jako na prvky, dostaneme pětiprvkovou množinu

$$Z/_E := \{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5\},$$

kde všechna čísla v každé množině M_i jsme ztotožnili v jedno a označili za jediný prvek. Je to faktorová množina (= rozkladová množina) množiny Z podle ekvivalence E, nebo krátce faktormnožina. $\square$

Relace E kongruence podle modulu 5 a k ní příslušná faktormnožina jsou důležitým příkladem „ze života“ = ze situací matematiky na SŠ i ZŠ: v jedné třídě ekvivalence E jsou právě ta celá čísla, které mají po vydělění pěti tentýž KLADNÝ zbytek VE SMYSLU VĚTY 12, neboli jejich obrazy na číselné ose jsou stejně vzdáleny směrem doprava od obrazu nejbližšího celočíselného násobku čísla 5.

7.2 Cvičení

Cvičení 7.1. V relaci ekvivalence E jsou navzájem ty prvky z množiny $M = \{1, 2, \ldots, 20\}$, které dávají po vydělění číslem 4 stejný zbytek. Popište (nebo nakreslete) faktormnožinu $M/_E$ množiny M podle relace E.

[32]Česky: z toho plyne, že ...

Cvičení 7.2. Je zadán rozklad množiny M na podmnožiny $M_1 = \{1, 3, 5\}$, $M_2 = \{2, 4, 10\}$, $M_3 = \{6, 7, 8\}$,
$M_4 = \{9\}$. Popište (nebo nakreslete) relaci ekvivalence indukovanou (určenou) tímto rozkladem.

Cvičení 7.3. Na množině reálných čísel je definován rozklad na dvě podmnožiny: M_1 tvoří všechna kladná reálná čísla a nula; M_2 tvoří všechna záporná čísla. Definujte symbolickým zápisem (charakteristickou vlastností množiny) relaci ekvivalence určenou (indukovanou) tímto rozkladem.

Cvičení 7.4. Na množině $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{2}{1}, \frac{8}{4}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{6}\}$ definujte nějakou užitečnou (tu nejznámější či nejpřirozenější) relaci ekvivalence E (řekněte, kdy jsou dva prvky ve vztahu relačním) a nakreslete obrázek faktormnožiny podle této ekvivalence.

Cvičení 7.5. Uveďte příklad ekvivalence ρ na množině reálných čísel, aby rozklad $R/_\rho$ této množiny určený ekvivalencí ρ měl dvě třídy.

Cvičení 7.6. Další cvičení: příklady ze sbírky [17], str. 58-59, příklady 1.7.A3, 1.7.A4, 1.7.B1, 1.7.B4, 1.7.B5, vsunout jeden příklad na relaci kongruence modulo 4, B6, B7 (geometrické ekvivalence v rovině), B8, B9 (příklad B9 je důkazový, ale dobrý).

Výsledky některých příkladů a cvičení jsou uvedeny na konci textu v oddílu 15.7.

8 Uspořádané množiny, maximální prvek, největší prvek, supremum

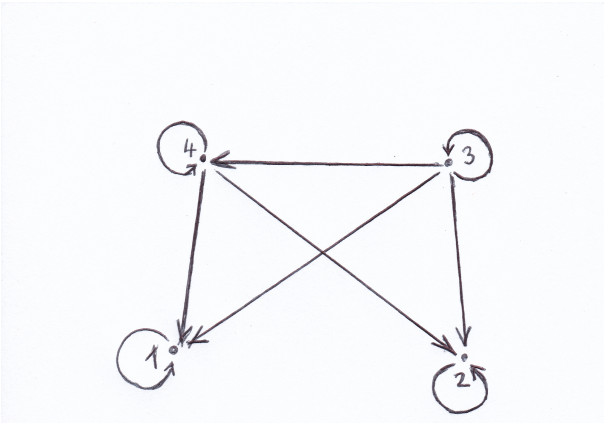
V tomto týdnu budeme procházet vlastnosti dalšího důležitého typu binární relace, a sice relace uspořádání.

8.1 Přednáška

V této přednášce se budeme zaobírat teoretickým zázemím pro dvě důležité struktury, které se objevují dokonce i na základní škole: struktura všech podmnožin dané množiny (s relací „být podmnožinou") a množina přirozených čísel s relací dělitelnosti.

a) Pojem uspořádané množiny

Příklad 8.1. (ve trojicích, jen studenti) Jaké vlastnosti splňuje relace na obrázku[33] číslo 9?



Obrázek 9:

Relace podobného typu, jako je ta na obrázku, jsou v matematice natolik důležité, že mají své jméno a budeme se jim věnovat téměř dva týdny naší exkurze po základních pojmech matematiky. Kupodivu si lze položit otázku: co mají společného relace $\leq$ na množině racionálních čísel, relace $\subseteq$ (být podmnožinou) na množině všech podmnožin jisté množiny a relace dělitelnosti $|$ na množině všech přirozených čísel. Jedná se o tři různé vztahy mezi prvky různého charakteru, a přesto mají tyto tři základní relace v matematických přístupech na základní a střední škole něco společného, co je charakterizuje. A tak dříve než v navazujících semestrech se budeme věnovat tomu, co a jak učit na základní (a střední) škole v matematice, nyní v tomto vysokoškolském úvodu do studia matematiky, se chvíli podívejme na otázku, kterou by si položili studenti v kursu „matematika pro dospělé": co mají relace „menší nebo rovno", „je podmnožinou" a „je dělitelem" společného? Ukazuje se, že tyto celkem různorodé relace mají společné celkem tři vlastnosti: (11), anti-(12) a (13). Matematicky hloubavý člověk v této situaci zbystří, odstoupí od konkrétních středoškolských operací a studuje právě jen i obecné struktury,

[33] [14], str.24.

které splňují uvedené tři vlastnosti – tyto struktury se nazývají uspořádané množiny.

Definice 38: Binární relace na množině P, která je reflexivní (11), antisymetrická (anti-12) a tranzitivní (13), se nazývá uspořádání. Množina P, na které je definovaná relace uspořádání, se nazývá částečně uspořádaná množina – v textu [14][34] je označována poněkud nezvyklým termínem poset (z anglického Partially Ordered SET)[35].

Poznámka: obecné označení relace uspořádání.

Ikdyž relace uspořádání je blízká relaci $\leq$ (respektive $\leq$ je čtenáři známým příkladem uspořádání), budeme ji označovat (v souladu s textem [14]) obecnějším symbolem $\trianglelefteq$, který zaručuje, že se ne vždy bude jednat o relaci zcela totožnou s klasickou relací $\leq$ na množině celých či reálných čísel. Obecnou uspořádanou množinu budeme tedy zapisovat zápisem $(P, \trianglelefteq)$.

Poznámka: Hasseův diagram

Definice 39: Pro relaci uspořádání zavádíme kromě grafové reprezentace přehlednější strukturu, a sice tzv. Hasseův diagram, ve kterém

1. reflexivitu (= smyčky) nevyznačujeme, protože ji automaticky předpokládáme u všech prvků uspořádané množiny;

2. šipky odstraníme tak, že Hasseův diagram jednoznačně orientujeme zdola nahoru, a pak místo šipek spojujeme prvky neorientovanou úsečkou – jestliže prvek je spojen s jiným prvkem umístěným výše v diagramu, tak je s ním v relaci;

3. hranami vyznačíme jen bezprostředně následující prvky – ostatní šipky vyplývající z tranzitivity nevykreslujeme; pak pokud $x \trianglelefteq y$, tak je mezi prvky x a y řetězec spojů mezi bezprostředními předchůdci a následovníky;

4. antisymetrie bude z nákresů patrna též – ta ovšem spočívá spíše v neexistenci oboustranných šipek mezi různými prvky (a právě díky neexistenci oboustranných šipek na stejné úrovni můžeme orientaci šipek z částečně uspořádané množiny odstranit – hrany v Hasseově diagramu tedy vždy směřují zdola nahoru, tj. dolní prvek hrany je prvním prvkem dané uspořádané dvojice).

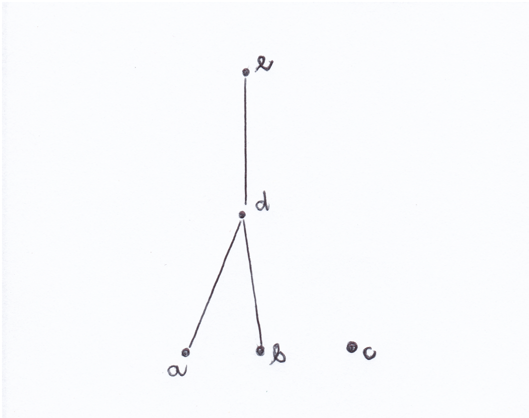
Příklad 8.2 – Hasseův diagram. Pro ilustraci je na obrázku 10 nakreslen Hasseův diagram pro pětiprvkovou množinu $P = \{a, b, c, d, e\}$ a relaci ρ na P definovanou výčtem uspořádaných dvojic:

$$\rho = \{[a, a], [b, b], [c, c], [d, d], [e, e], [a, d], [d, e], [a, e], [b, d], [d, e], [b, e]\}.$$

Příklad 8.3 ilustrační – Hasseův diagram: Překreslete relaci uspořádání z úvodního příkladu této kapitoly (obr. 9) do Hasseova diagramu (zde není provedeno).

[34] Str.23, definice 1.6.

[35] Je to skutečně neobvyklý termín pro češtinu, až extrémní – ale navrhuji jej autorovi, panu Kopkovi, odpustit, určitě jej použil s dobrým záměrem, aby studenti a vyučující nemuseli stále vypisovat dlouhý termín **částečně uspořádaná množina**.



Obrázek 10: Hasseův diagram relace uspořádání.

Příklad 8.4. (úkol pro studenty) Nakreslete Hasseovy diagramy všech různých (až na přeznačení prvků) tříprvkových posetů[36].

Označení 33: Pokud $(P, \trianglelefteq)$ je poset, označme symbolem $\trianglelefteq$ relaci uspořádání (reflexivní, antisymetrická, tranzitivní) a symbolem $\triangleleft$ relaci ostré uspořádání na množině P, pokud $\triangleleft$ je antireflexivní (anti-11), antisymetrická (anti-12) a tranzitivní (13) (ostré uspořádání je tedy uspořádání zbavené reflexivity, nemůže nastat $x \triangleleft x$ pro žádný prvek x).

Označení 34: Symbolem $\prec$ budeme označovat relaci bezprostředího předchůdce v množině P, když $\forall x, y \in P$:

$$x \prec y \quad \Leftrightarrow \quad (x \triangleleft y \wedge \nexists\, a \in P : x \triangleleft a \triangleleft y)$$

(jinými slovy, mezi x, y už nelze vložit další prvek a různý od y). Říkáme, že prvek x bezprostředně předchází prvku y (nebo že prvek y bezprostředně následuje za prvkem x)[37].

Označení 35: Symbolem $\trianglerighteq$ označujeme relaci inverzní k relaci $\trianglelefteq$, symbolem $\triangleright$ relaci inverzní k $\triangleleft$.

B) Význačné prvky posetu:

Pokud $(P, \trianglelefteq)$ je poset, $M \neq \emptyset$ je podmnožina množiny P, tak prvek $a \in M$ nazveme

a) (definice 40) nejmenší prvek množiny M, když

$$\forall x \in M : \quad a \trianglelefteq x;$$

b) (definice 41) minimální prvek množiny M, když

$$\nexists\, x \in M : \quad x \triangleleft a;$$

[36] Jedno prvkový poset je až na přeznačení jeden, dvouprvkové posety jsou dva.

[37] Pomocí ostrého uspořádání $\triangleleft$ a relace bezprostředního předchůdce $\prec$ lze lépe popsat konstrukci Hasseových diagramů: vyznačujeme v nich hranami pouze relaci bezprostředního předchůdce ([14], str.30, lemma 4). Pro konečný poset $(P, \trianglelefteq)$ a jeho prvky $a, b \in P$ tedy platí: $a \triangleleft b$ (ostře menší než) znamená, že v množině P existuje řetězec bezprostředních následovníků $a = x_0 \prec x_1 \prec x_2 \prec \ldots \prec x_n = b$.

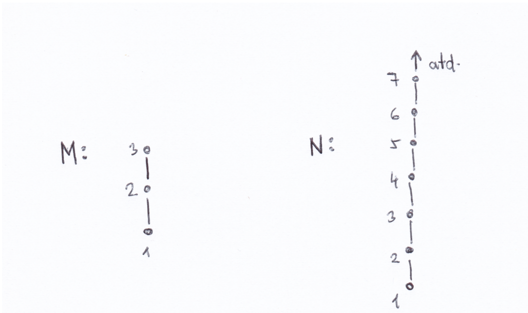
c) (definice 42) největší prvek množiny M, když

$$\forall x \in M: \quad a \trianglerighteq x;$$

d) (definice 43) maximální prvek množiny M, když

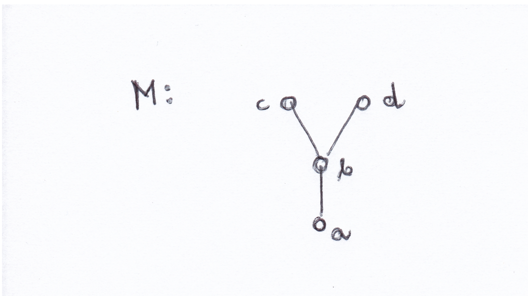
$$\nexists\, x \in M: \quad x \triangleright a.$$

Příklad 8.5 ilustrační. Ad obrázek 11: V tříprvkové množině M s uspořádáním zadaným v Hasseově diagramu je 1 prvek minimální a nejmenší současně, a dále 3 je prvek maximální a největší současně. V množině N s klasickým uspořádáním $\leq$ je nejmenší prvek 1 a číslo 1 je též minimální prvek. Největší prvek množiny N neexistuje.



Obrázek 11: Dva příklady posetu.

Dále na obrázku 12 je množina M, ve které a je minimální i nejmenší prvek současně. Na druhé straně, největší prvek tato množina nemá – má pouze dva maximální prvky c, d.



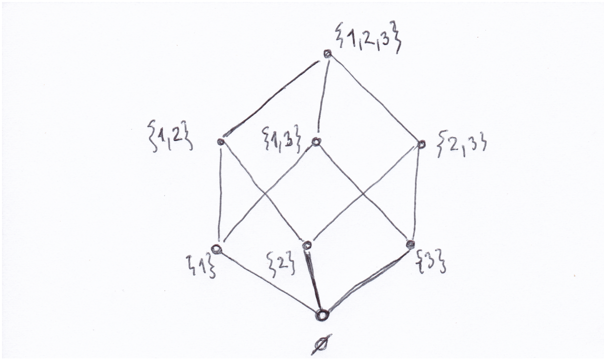
Obrázek 12: Rozdíl mezi maximálním a největším prvkem.

Tj. maximální prvek množiny M je takový, „nad kterým“ už není v této množině žádný prvek. Na druhé straně největší prvek musí být srovnatelný (= v relaci) se všemi prvky množiny M a musí být větší nebo roven než libovolný z nich. $\star$

Označení 36: Symbol 2^A označuje množinu všech podmnožin množiny A. Například množina $A = \{1, 2, 3\}$ má osm podmnožin: prázdnou množinu, tři jednoprvkové podmnožiny, tři dvouprvkové podmnožiny a osmou podmnožinou je množina A samotná. Označení má svou logiku: pokud A má n prvků, jejích všech možných podmnožin je 2^n.

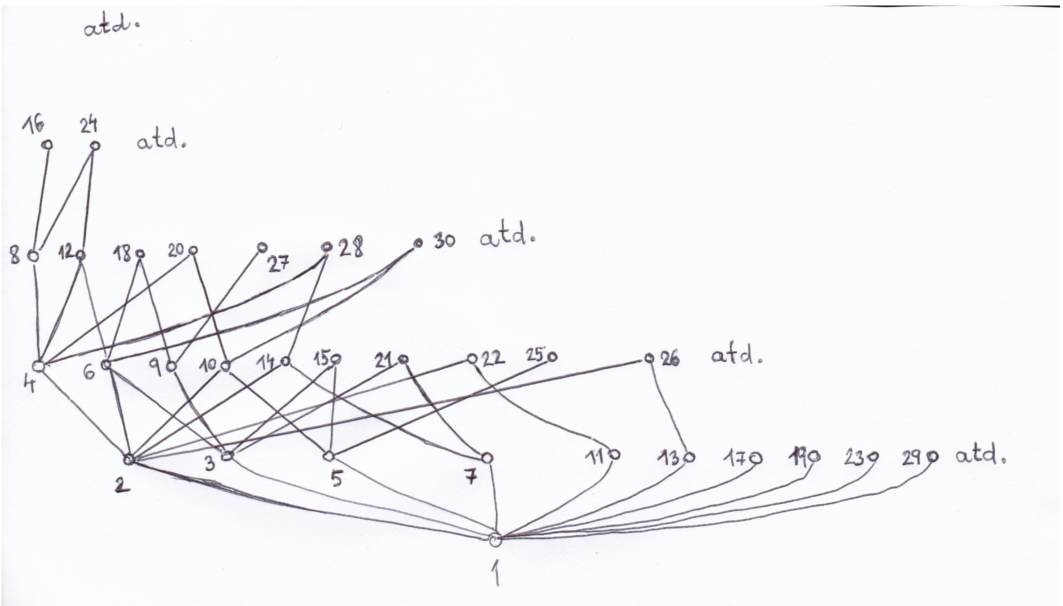
Příklad 8.6. Dva důležité příklady posetů.

a) Relace $\subseteq$ na množině 2^P všech možných podmnožin množiny $P = \{1, 2, 3\}$ je poset, jeho Hasseův diagram je na obrázku 13:



Obrázek 13: Poset $(2^P, \subseteq)$ pro $P = \{1, 2, 3\}$.

b) Na množině N definujme uspořádání pomocí dělitelnosti, tj. $a \trianglelefteq b \Leftrightarrow a|b$. Pak $(N, \trianglelefteq)$ je poset, který má nekonečně mnoho prvků. Na obrázku 14 je nakreslena jen jeho dolní část:



Obrázek 14: Poset $(N, |)$.

Ze struktury dělitelů vidíme, že např. číslo 24 má dělitele 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12 a 24).

Příklad 8.7 – úkol pro studenty. Nakreslete Hasseovský diagram posetu všech kladných dělitelů čísla 60 vzhledem k relaci $|$.

Podívejme se nyní na další význačné prvky v posetech:

Když $(P, \trianglelefteq)$ je poset a M je nějaká neprázdná podmnožina množiny P, nazýváme prvek $a \in P$ (pokud takový prvek existuje):

- (definice 44) dolní závora množiny M, pokud $a \trianglelefteq x \ \ \forall x \in M$;
- (definice 45) infimum množiny M (označujeme $\inf M$), pokud je největším prvkem na množině všech dolních závor množiny M; tj. a je infimum, pokud pro všechny další dolní závory d platí
$$d \trianglelefteq x \ \ \forall x \in M \Rightarrow d \trianglelefteq a;$$
- (definice 46) horní závora množiny M, pokud $a \trianglerighteq x \ \ \forall x \in M$;
- (definice 47) supremum množiny M (označujeme $\sup M$), pokud je nejmenším prvkem na množině všech horních závor množiny M. Tj. a je supremum, pokud pro všechny další holní závory h platí
$$h \trianglerighteq x \ \ \forall x \in M \Rightarrow h \trianglerighteq a;$$

Nejdůležitějším postřehem k předchozím definicím je asi to, že závory nebo infima-suprema množiny M nemusí samy být prvky množiny M!! Obecně závora, infimum či supremum je prvek množiny P, který může a nemusí ležet v dané množině M.

Příklad 8.8 ilustrační.

a) Například v posetu přirozených čísel s uspořádáním zadaným dělitelností těchto čísel (obr. 14) uvažujme množinu $M = \{12, 8, 20\}$. Dolní závorou množiny M jsou čísla 1, 2, 4 (společní dělitelé prvků v množině M), a tedy infimem je číslo 4 jako největší z těchto prvků (tj. infimem v $(N, |)$ je největší společný dělitel prvků v množině M.

Analogicky horní závorou množiny M jsou společné násobky čísel 12, 8, 20, tj. čísla 120, 240, 360, atd., a tedy supremem je nejmenší horní závora, tedy číslo 120.

b) V posetu podmnožin tříprvkové množiny (obr. 13) například platí

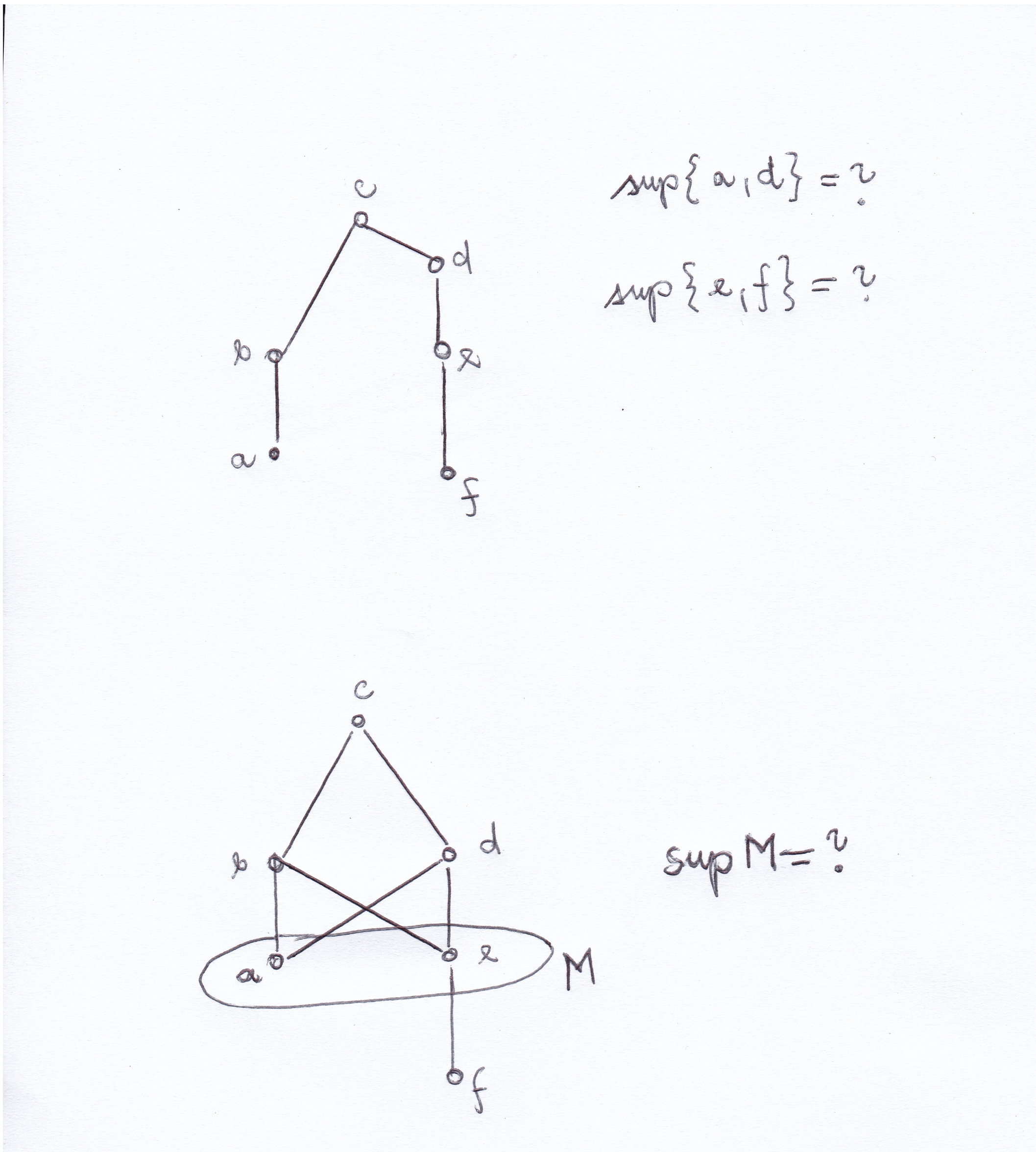
$$\inf\{\{1,2\},\{1,3\}\} = \{1,2\} \cap \{1,3\} = \{1\},$$

$$\inf\{\{1,2\},\{2\},\{2,3\}\} = \{2\},$$

tedy infimem několika prvků je jejich vzájemný průnik,

$$\sup\{\{1,2\},\{1\}\} = \{1,2\} \cup \{1\} = \{1,2\}$$

(supremem několika množin v dané struktuře je jejich sjednocení).



Obrázek 15: Příklad suprem dvouprvkových podmnožin posetu.

Příklad 8.9. úkol pro studenty Najděte suprema množin na obrázku 15, pokud existují (studenti sami).

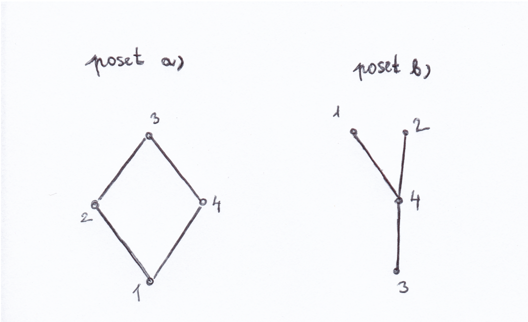
Pokud už zhruba známe pojmy infima a suprema podmnožiny M posetu P, budiž řečeno, že definice 48) svaz je takový poset, v němž pro každou dvouprvkovou podmnožinu $\{x, y\}$ existuje její supremum i infimum.

Označení „svaz“ je trefné: každé dva prvky x, y svazu jsou v příslušném Hasseově diagramu „svázány“ zdola infimem a shora supremem. Ve smyslu tohoto pojmu jsou oba významné posety z příkladu 8.8 svazy – konstrukce infim a suprem je popsána v příkladu 8.8.

8.2 Cvičení

Cvičení 8.1.

- i) Vypište podle Hasseova diagramu relaci $\trianglelefteq$ výčtem uspořádaných dvojic na obrázku 16: a) poset (a); b) poset (b)[38];
- ii) Vypište podle Hasseova diagramu obou posetů relaci $\triangleleft$ ostrého uspořádání;
- iii) Vypište podle Hasseova diagramu obou posetů relaci $\prec$ bezprostředního předchůdce.



Obrázek 16: Uspořádané množiny (a) a (b).

Cvičení 8.2. Nakreslete Hasseův diagram posetu 2^P pro $P = \{1, 2, 3, 4\}$ – pro zjednodušení k uzlům diagramu nevpisujte závorky a čárky, tj. množiny budou označeny jen znaky prvků: např $\emptyset$, 12, 124 jsou označení různých množin. $\star$

Cvičení 8.3. Nakreslete Hasseův diagram posetu všech kladných dělitelů čísla 144 vzhledem k relaci dělitelnosti beze zbytku.

Cvičení 8.4. Nakreslete Hasseovy diagramy všech různých (až na přeznačení prvků) čtyřprvkových posetů.

Cvičení 8.5. Jaký je rozdíl mezi minimálním prvkem, nejmenším prvkem a infimem množiny M?

Cvičení 8.6. Uveďte příklad pětiprvkového posetu, který má právě dva prvky maximální a právě tři prvky minimální.

Cvičení 8.7. Nalezněte poset, který má právě jeden maximální prvek, ale nemá největší prvek.

Cvičení 8.8. Uveďte příklad posetu, který obsahuje nějaké dva nesrovnatelné prvky – uveďte, které to jsou.

[38] [14], str.28, obrázky 5a,5b.

Cvičení 8.9. Uveďte příklad pětiprvkového posetu, ve kterém současně platí všechny následující podmínky:

a) v Hasseově diagramu jsou znázorněny minimálně čtyři hrany.

b) Platí $a \leq b$ a současně $b \leq c$.

c) Každý prvek je srovnatelný aspoň s jedním dalším prvkem.

d) Existují v něm tři prvky, které jsou navzájem mezi sebou nesrovnatelné.

Cvičení 8.10.

a) uveďte definici největšího prvku: x_0 z posetu $(P, \leq)$ je největší prvek množiny $M \subseteq P$, když ...
(pokračujte zkráceným matematický zápisem);

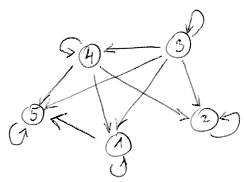
b) negujte předchozí definici, tj.: x_0 z posetu $(P, \leq)$ není největší prvek množiny $M \subseteq P$, když ...
(pokračujte zkráceným matematický zápisem – nestačí přitom položit znak negace před část a), proveďte tuto negaci podrobněji);

Cvičení 8.11.

a) Vysvětlete, co je to Hasseův diagram (jak je v něm zachycen vztah $[x, y]$ relace? jaké relace pomocí Hasseova diagramu popisujeme?) a jak jsou v něm zachyceny vlastnosti (11), anti-(12) a (13).

b) Nakreslete Hasseův diagram množiny všech kladných dělitelů čísla 72 uspořádané vzhledem k relaci $|$ (= je dělitelem).

Cvičení 8.12. Relace je zadána grafovou reprezentací (viz obrázek 17). Zjistěte, zda se jedná o uspořádání, a pokud ano, překreslete tuto relaci do Hasseova diagramu. Pokud ne, uveďte, která vlastnost uspořádání není splněna.



Obrázek 17: Ke cvičení 8.12: Relace zadaná grafovou reprezentací.

Cvičení 8.13.

a) Na posetu $(P, \trianglelefteq)$ uvažujme neprázdnou podmnožinu M. Číslo m je infimum množiny M v tomto posetu, když ... dokončete definici:

b) Na posetu $(N, |)$ přirozených čísel uspořádaných podle relace „dělí beze zbytku“, máme podmnožinu $M = \{8, 12, 30\}$. Nalezněte inf$M$ a sup$M$.

Cvičení 8.14. Dále to, co se ještě nedělalo ze sbírky [17] z příkladů 1.6.A4-str.55, 1.6.B1, 1.6.B2, 1.6.B6, 1.6.B7, 1.6.B8, 1.6.B9, 1.6.B11, pokud se ještě nedělaly.

Výsledky některých příkladů a cvičení jsou uvedeny na konci textu v oddílu 15.8.

9 Zobrazení, posloupnost, funkce, operace

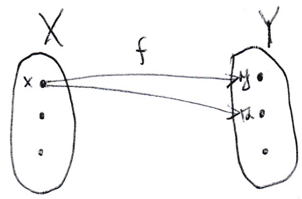
Už čtvrtou přednášku se zabýváme pojmem relace, a tento oddíl tomu bude nejinak – podíváme se na definici jedné z relací, která je v matematice klíčová, a to je zobrazení[39], a budeme studovat některé vlastnosti tohoto pojmu.

9.1 Přednáška

Definice 49: Relace f na kartézském součinu $X \times Y$ se nazývá zobrazení z množiny X do množiny Y, jestliže pro ni platí podmínka

$$[x, y] \in f \ \wedge \ [x, z] \in f \ \Rightarrow \ y = z$$

(tj. v grafové reprezentaci zobrazení nemohou z prvku x vycházet orientované hrany do dvou různých prvků y, z množiny Y). Na obrázku 18 je znázorněn příklad relace, která není zobrazením.



Obrázek 18: Příklad relace f, která není zobrazením.

Dále definujeme (definice 50) definiční obor zobrazení f jako množinu $D(f)$ těch prvků z X, které jsou v relaci f s některým z prvků množiny Y, neboli ve stručném matematickém zápisu

$$D(f) = \{x \in X : \ \exists y \in Y \ : \ [x, y] \in f\}$$

a (definice 51) obor hodnot zobrazení f jako množinu $Im(f)$ těch prvků z Y, se kterými je v relaci f aspoň jeden prvek množiny X, neboli

$$H(f) = \{y \in Y : \ \exists x \in X \ : \ [x, y] \in f\}.$$

Poznámka: ekvivalentní zápis zobrazení prvků.

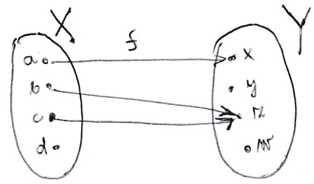
Pokud je f zobrazení z X do Y, tak pro $[x, y] \in f$ můžeme vzhledem k jednoznačnosti prvku y psát $y = f(x)$ (a číst: prvek $y \in Y$ je obrazem prvku $x \in X$ vzhledem k zobrazení f) a v této symbolice zapisovat veškeré vlastnosti týkající se zobrazení f, tj. také i pojmy definičního oboru a oboru hodnot zobrazení f:

$$D(f) = \{x \in X : \ \exists y \in Y \ : \ y = f(x)\}$$
$$H(f) = \{y \in Y : \ \exists x \in X \ : \ y = f(x)\}.$$

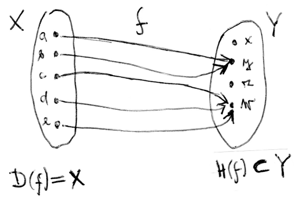
[39] V této kapitole bude využit výklad z knihy [8], kapitola 6.

Definice 52: Podle toho, jakou část množiny X zabírá $D(f)$, jakou část množiny Y zabírá $H(f)$a zda je zobrazení f prosté nebo ne (tato vlastnost bude hned vysvětlena), rozeznáváme šest typů zobrazení:

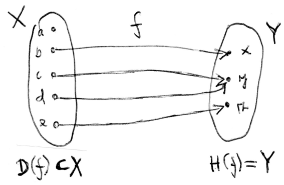
a) zobrazení z X do Y, pokud $D(f)$ je vlastní podmnožina množiny X, $H(f)$ je vlastní podmnožina množiny Y; příklad viz obrázek (přitom $D(f) = \{a, b, c\}$ a $H(f) = \{x, z\}$):



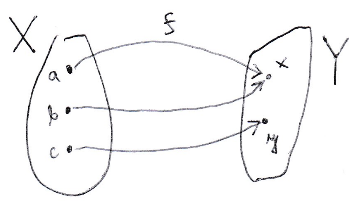
b) zobrazení X do Y, pokud $D(f) = X$, $H(f)$ je vlastní podmnožina množiny Y; příklad viz obrázek (toto zobrazení typu b), tj. zobrazení X do Y, má speciální označení – (označení 37) $f : X \to Y$)



c) zobrazení z X na Y, pokud $D(f)$ je vlastní podmnožina množiny X, $H(f) = Y$; příklad viz obrázek:



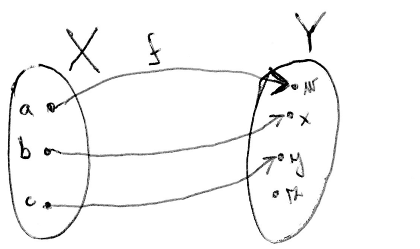
d) surjekce neboli zobrazení X na Y, pokud $D(f) = X$, $H(f) = Y$; příklad viz obrázek:



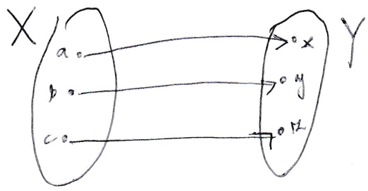
e) injekce neboli prosté zobrazení X do Y, pokud $D(f) = X$, $H(f)$ je vlastní podmnožina množiny Y a platí podmínka prostého zobrazení (= podmínka injektivity):

$$\forall x, y \in X : x \neq y \;\Rightarrow f(x) \neq f(y);$$

příklad viz obrázek – z příkladu je vidět, že zobrazení typu (e) vzniká spojením vlastnosti typu (b) a podmínky injektivity:



f) bijekce neboli prosté zobrazení X na Y, pokud $D(f) = X$, $H(f) = Y$ a platí podmínka injektivity. Příklad viz obrázek:



O zobrazení bijektivním lze na základě grafického názoru minimálně pro konečné množiny říci, že existuje mezi množinami, které mají stejný počet prvků. Z příkladu je vidět, že zobrazení typu (f) vzniká spojením vlastnosti typu (d) a vlastností typu (e) – respektive vlastnosti (b), vlastnosti (d) a podmínky injektivity.

Věta 16.

Podmínce prostého zobrazení(= podmínce injektivity) je logicky ekvivalentní podmínka

$$\forall x, y \in X : \ f(x) = f(y) \ \Rightarrow \ x = y$$

(neboli pokud se dva obrazy rovnají, tj. $f(x) = f(y)$, tak se musí jednat o tentýž vzor, tj. $x = y$).

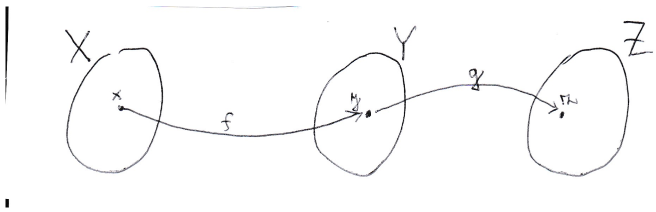
Důkaz: Plyne z platnosti věty 03: dokazovaná vlastnost je logicky ekvivalentní obměně implikace z vlastnosti prostého zobrazení (52e). □

Kromě jednoho zobrazování či zobrazení lze studovat (a budeme jim věnovat čas) ty situace, kdy skládáme dvě různá zobrazení, tj. nejprve zobrazujeme prvky z X do Y, a pak z Y do Z:

Definice 53: Pokud $f : X \to Y$ je zobrazení a $g : Y \to Z$ je zobrazení, definujeme složené zobrazení $g \circ f$ (označení 38) množiny X do množiny Z takto:

$$(g \circ f)(x) := g(f(x))$$

(čti „g po f“ – toto čtení také umožňuje zapamatovat si pořadí, v jakém zobrazování provádíme: nejprve na prvek x použijeme zobrazení f, a pak teprve zobrazení g)



Obrázek 19: Příklad složeného zobrazení $g \circ f$.

Příklad 9.1. Vezměme $X = Y = Z$ množinu reálných čísel a zobrazení $f : R \to R$ definované předpisem $f(x) = 2x$, podobně $g : R \to R$ definované $g(x) = x+5$. Pak složené zobrazení $g \circ f$ je definované vztahem

$$g(f(x)) = g(2x) = 2x + 5,$$

jedná se tedy opět o zobrazení $R \to R$.

Pozor ovšem, záleží na pořadí skládání – při opačném pořadí skládaných funkcí dostaneme

$$f(g(x)) = f(x + 5) = 2(x + 5) = 2x + 10.$$

Poznámka: Iverzní relace f^{-1} někdy není zobrazením.

Inverzní relaci f^{-1} netřeba zvlášť definovat, protože je to relace, v jejíž grafové reprezentaci všechny šipky změní směr na opačný vzhledem k f (a v množinové reprezentaci všechny uspořádané dvojice změní pořadí svých souřadnic). Problém je ten, že inverzní relace f^{-1} není vždy zobrazením: Uvažujme zobrazení $f : R \to R$ dané vztahem pro druhou mocninu $f(x) = x^2$. Pak např. $f(2) = 4$ a $f(-2) = 4$, tj platí $[4; 2] \in f^{-1}$ a $[4; -2] \in f^{-1}$, tj. f^{-1} není zobrazení.

Věta 17. Inverzní relace f^{-1} z Y do X je zobrazením z Y do X právě tehdy, když zobrazení $f : X \to Y$ je injekce.

Důkaz: Dokažme (typ 4) obě implikace této ekvivalence.

- Dk. implikace „⇒“:dokažme

$$f^{-1} \text{ je zobrazení } \Rightarrow \quad f : X \to Y \text{ je injekce.}$$

  Sporem (typ 5): předpokládáme platnost negace, tj. platí $A \wedge \neg B$:

$$f^{-1} \text{ je zobrazení } \wedge \quad f : X \to Y \text{ není injekce.}$$

  Pak existují prvky $x, y \in X$, $x \neq y$ tak, že $f(x) = z = f(y)$ pro nějaké $z \in Y$. To by ale znamenalo, že $[z, x] \in f^{-1}$, $[z, y] \in f^{-1}$, a to je spor s tím, že f^{-1} je zobrazení. Tedy neplatí výchozí předpoklad a platí daná implikace.

- Dk. implikace „⇐“:dokažme

$$f : X \to Y \text{ je injekce } \quad \Rightarrow \quad f^{-1} \text{ je zobrazení .}$$

Sporem (typ 5): předpokládáme platnost negace, tj. platí $A \wedge \neg B$:

$$f : X \to Y \text{ je injekce } \wedge \ \ f^{-1} \text{ není zobrazení }.$$

Pak existují prvky $x_1, x_2 \in X$ a $z \in Y$, $x_1 \neq x_2$ tak, že $[z, x_1] \in f^{-1}$ a $[z, x_2] \in f^{-1}$. To by ale znamenalo, že $f(x_1) = z$, $f(x_2) = z$, a to je spor s tím, že f je injekce. Tedy neplatí výchozí předpoklad a platí daná implikace. $\square$

Příklad 9.2. Například zobrazení $f : R \to R$ zadané vztahem $f(x) = 2x$ je prosté (injektivní), a tedy k němu existuje zobrazení inverzní $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$ (tedy předpis zobrazení představujícího násobení dvěma je inverzní k předpisu zobrazení představujícího dělení dvěma).

And last but not least, nyní jsme schopni si říci vysokoškolskou definici operace: (definice 54): Binární operace $\heartsuit$ na množině M je zobrazení $M \times M \to M$, tj. zobrazení, které přiřadí uspořádané dvojici $[a; b]$ z kartézského součinu $M \times M$ výsledek této operace, prvek $a \heartsuit b$.

Příkladem operací, které lze dosadit za symbol $\heartsuit$, je celá řada: $+$, $-$, $\cdot$, $:$, $\cap$, $\cup$, $\sqcap$, $\sqcup$, atd. Jejich podrobnějšímu studiu se budeme věnovat ve druhém semestru studia.

Definice 55: Zobrazení $f : N \to R$ (tedy $D(f)$ je množina přirozených čísel, $H(f)$ je množina reálných čísel) se nazývá posloupnost reálných čísel.

Například posloupnost někdy zapisujeme ve tvaru

$$(a_1, a_2, a_3, \dots)$$

a to znamená, že přirozené číslo 1 se zobrazilo na reálné číslo označené a_1, přirozené číslo 2 se zobrazilo na reálné číslo označené a_2, atd.

Definice 56: Zobrazení f z množiny reálných čísel R do množiny reálných čísel R se nazývá (reálná) funkce (jedné) reálné proměnné.

9.2 Cvičení

Cvičení 9.1. Úvodní cvičení k pojmu zobrazení už bylo v kapitole 6, cvičení 6.2. Nyní se věnujme už pojmu **funkce a její graf**: Viz realisticky.cz (materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, **pdf hodina 2105 pro studenty** – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 9.2. Funkce a její graf 2: Viz realisticky.cz (online materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 2106 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 9.3. Prostá funkce: Spojení definice (52e) a (56) této kapitoly: Prostá funkce je prosté zobrazení $R \to R$. Příklady viz realisticky.cz (materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 2107 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele. Tato úvodní tři cvičení 9.1, 9.2, 9.3 dobře prezentují pojem funkce, kreslení grafu funkce a určování $D(f)$, $H(f)$.

Cvičení 9.4. Nakreslete příklad zobrazení $f : X \to Y$, které je injekce, ale není surjekce.

Cvičení 9.5. Nakreslete příklad zobrazení $f : X \to Y$, které je surjekce, ale není injekce.

Cvičení 9.6.

a) Uveďte definici složení dvou zobrazení f, g.

b) $f(x) = \sin x$, a dále $g(x) = \sqrt{x}$ jsou reálné funkce; zadejte vzorcem zobrazení $g \circ f$.

Cvičení 9.7.

a) Co je to zobrazení? Uveďte definici.

b) Jsou zadány reálné funkce $f(x) = 2^x$, $g(x) = (x + 1)^2$, $h(x) = \frac{1}{x}$. Sestavte složenou funkci $h \circ g \circ f$ proměnné x.

Cvičení 9.8.

a) Nakreslete tři příklady zobrazení (pokud možno tvořivě, zobrazení různých typů) a u každého příkladu si bokem vypište, jakého z šesti typů zobrazení z definice 52 se týká (jedno zobrazení může být někdy současně zobrazením více typů).

b) Vyměňte si sešity ve dvojicích či trojicích a napište tužkou ke každému zobrazení v sešitě svého souseda jeho typ či typy. Pak si své výsledky zkontrolujte společně.

Cvičení 9.9. Nakreslete příklad zobrazení $f : Z \to N$, které je injektivní, ale ne surjektivní.

Cvičení 9.10. Nakreslete příklad zobrazení $f : R \to Z$, které je surjektivní, ale ne injektivní.

Cvičení 9.11. Nakreslete příklad zobrazení $f : N \to Z$, které je bijektivní.

Cvičení 9.12. Dostatečné cvičení je přístupné v knize [8], str.62-65. Další cvičení lze najít v knize [17], str. 52-54, příklady 1.5.B2, 1.5.B3, B5, B6, B7, B13.

Výsledky některých příkladů a cvičení jsou uvedeny na konci textu v oddílu 15.9.

10 Lineární a kvadratické funkce

10.1 Přednáška

Reálná funkce jedné reálné proměnné byla definována v definici 56. Ale jedná se o pojem natolik důležitý, že ve zbylých čtyřech týdnech si zopakujeme nejdůležitější příklady funkcí, které se používají v mnoha oborech. Na zopakované znalosti těchto základních = elementárních funkcí bude pak navazovat výuka předmětu Matematická analýza 1 – objektem této analýzy bude právě pojem funkce.

Většinou je reálná funkce jedné reálné proměnné zadána vzorcem čili předpisem, na základě kterého reálnému číslu $x \in D(f)$ přiřadíme reálné číslo $y \in H(f)$. Při analýze funkcí se často nezabýváme pouze daným vzorcem – pro představu o vlastnostech dané funkce nám pomáhá její grafické znázornění pomocí pojmu graf funkce.

Definice 57: Když f je reálná funkce, tak graf je množina všech bodů $[x, f(x)]$ ve zvolené rovinné soustavě souřadnic (zadané počátkem a dvěma kolmými osami reálných čísel, které se protínají v počátku), pro které $x \in D(f)$[40].

A) Lineární funkce $f(x) = a \cdot x + b$

Tento typ funkce je součástí výuky na ZŠ, budeme mu tedy věnovat speciální pozornost. Tato pozornost ovšem bude na elementární úrovni, a tak se omlouvám dobrým studentům, pro které opakování v tomto směru nepřinese nic moc nového.

Při našem opakování pojmu lineární funkce využijeme online materiál [18], matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, některé pdf hodiny, které snad není nutné přepisovat do tohoto textu:

- Lineární funkce I. pdf hodina 2108 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele. Model plnění vody přehrady při povodních roku 2002. K modelování téte reálné situece kupodivu je dosatečný i nejjednodušší typ funkce, a to právě funkce lineární.

- Lineární funkce II. pdf hodina 2109 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele. Ještě k modelu plnění přehrady vodou. Ve druhé části cvičení se studenti učí kreslit grafy lineárních funkcí na základě předpisu (vzorce). Tato dovednost bude dále procvičena na cvičení.

B) Funkce s absolutními hodnotami

Musíme též zopakovat pojem absolutní hodnoty, aspoň na středoškolské úrovni. Poslouží nám k tomu opět středoškolské materiály [18] – matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, některé pdf hodiny, které snad není nutné přepisovat do tohoto textu:

[40] Bod $[x, f(x)]$ modeluje prvek relace f a v rovině jej znázorňujeme na průsečíku kolmice k vodorovné ose v bodě x s kolmicí ke svislé ose v bodě $f(x)$.

- Funkce absolutní hodnota pdf hodina 2401 pro studenty – definice absolutní hodnoty; geometrický význam absolutní hodnoty rozdílu reálných čísel; graf funkce absolutní hodnota.
- Kreslení grafu funkce metodou napodobení výpočtu. pdf hodina 2402 pro studenty – kreslení grafů funkcí, které vzniknou modifikací nebo složením lineárních funkcí a funkce absolutní hodnoty. Tato dovednost bude dále procvičena na cvičení.

C) Kvadratická funkce

Tento typ funkce nelze z časových možností na této předášce stihnout, studenti si musí projít následující opakování tohoto typu funkce v doporučeném materiálu sami.

Kvadratická funkce je reálná funkce typu $f(x) = ax^2 + bx + c$, kde a, b, c jsou reálné konstanty a x je reálná proměnná. Podrobnější probrání kvadratických funkcí viz [9], str. 56-71. Určitě si projděte následující věci (odkazy se týkají učebnice [9], některé příklady jsou řešené v jejím textu, u většiny neřešených příkladů je uveden výsledek na konci knihy [9]):

- grafy kvadratických funkcí (paraboly):
  - str. 61 ... graf funkce $y = a \cdot x^2$ pro různé hodnoty konstanty a;
  - str. 64 ... graf funkce $y = \frac{3}{4}(x+1)^2 - 3$;
  - příklad 4.9 na str. 67;
- řešení kvadratických nerovnic:
  - str. 69, př. 1: řešte v R:
  $$2x^2 + 5 \leq 3x^2 + x - 1;$$
  - příklad 4.23 na str. 71.

10.2 Cvičení

Cvičení 10.1. Lineární funkce III. pdf hodina 2110 pro studenty – online materiál [18], matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce. Výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 10.2. Lineární funkce IV. pdf hodina 2111 pro studenty – online materiál [18], matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce. Výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 10.3. Kreslení grafů funkcí metodou napodobení výpočtu II. pdf hodina 2403 pro studenty – online materiál [18], matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce. Výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 10.4. Kreslení grafů funkcí metodou dělení definičního oboru I. pdf hodina 2404 pro studenty – online materiál [18], matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce. Výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 10.5. Kreslení grafů funkcí metodou dělení definičního oboru II. pdf hodina 2405 pro studenty – online materiál [18], matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce. Výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 10.5. Kreslení grafů kvadratické funkce. pdf hodina 2501 pro studenty – online materiál [18], matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce. Výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 10.6. Kreslení grafů kvadratické funkce – doplnění na čtverec I. pdf hodina 2502 pro studenty – online materiál [18], matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce. Výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 10.7. Kreslení grafů kvadratické funkce – doplnění na čtverec II. pdf hodina 2503 pro studenty – online materiál [18], matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce. Výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 10.8. Řešení kvadratických nerovnic – s využitím grafu kvadratické funkce. pdf hodina 2511 pro studenty – online materiál [18], matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce. Výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 10.9. Nakreslete graf funkce $y = -2x^2 + 3x + 1$ a určete Dy a Hy.

Cvičení 10.10. Napište vzorec kvadratické funkce, pro kterou platí: $Df = R$, $Hf = (-\infty, 2\rangle$, vrchol nastává pro $x = 3$. Můžete nakreslit i její graf, ale vzorec je klíčový.

Výsledky některých příkladů a cvičení jsou uvedeny na konci textu v oddílu 15.10.

11 Lineárně lomené funkce, mocninné a odmocninné funkce

11.1 Přednáška

V této kapitole pokračujem v přehledu základních typů funkcí využívaných v mnoha oborech zkoumání a praxe.

D) Lineárně lomená funkce

Jedná se o funkci typu

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d},$$

tj. funkci, kterou vytváříme pomocí podílu dvou lineárních funkcí (proto tedy název „lineárně lomená“ funkce). Podrobnější výklad viz [9], str. 72-84. Určitě si projděte následující věci (odkazy se týkají učebnice [9]):

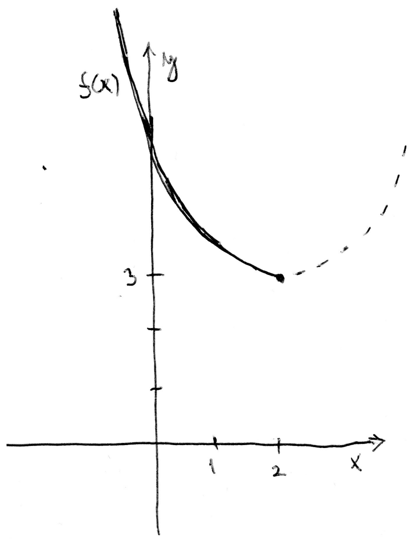
- str. 77 ... graf funkce $y = \frac{k}{x}$ pro různé hodnoty konstanty k;
- str. 78-80 ... obecnější grafy lineárně lomených funkcí – příklady 1 a 2;
- str. 82, příklad 5.9 ... grafy dalších typů, je důležité všechny nakreslit;

E) Mocninné funkce $f(x) = x^n$ a funkce k nim inverzní

Podrobněji viz [9], str. 85-116. Určitě si projděte následující věci (odkazy se týkají učebnice [9]):

- Kreslení grafů mocninné funkce:
  - str. 87 ... grafy funkce $y = x^n$ pro $n \in N$;
  - str. 90 ... grafy funkce $y = x^n$ pro $n \in Z^-$;
  - str. 91, příklad 6.7;
- Hledání inverzní funkce:
  - str. 95, př. 1: Nalezněte funkci inverzní k funkci $y = 3x - 2$ pro $D(f) = \langle -1; 2\rangle$. Nakreslete grafy obou funkcí f a f^{-1} v jedné soustavě souřadnic.
  - nalezněte inverzní funkci k funkci $y = (x-2)^2 + 3$ a) pro $D(f) = (-\infty, 2\rangle$.

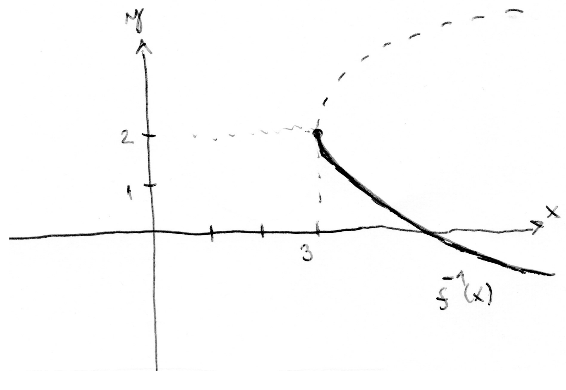
    Řešení: Graf kvadratické funkce pro $Df = R$ není funkce prostá (nabývá dvou stejných hodnot pro různá x, což poznáme podle toho, že rovnoběžky s osou x protínají její graf ve dvou různých bodech), proto k ní inverzní relace není funkcí. Když se omezíme na interval $Df = (-\infty; 2\rangle$, funkce už prostá je (jejím grafem je přesně polovina paraboly):



Funkci inverzní najdeme záměnou x za y v předpisu ($x = (y-2)^2 + 3$) a následným vyjádřením proměnné y z této rovnice:

$$y = 2 \pm \sqrt{x-3}.$$

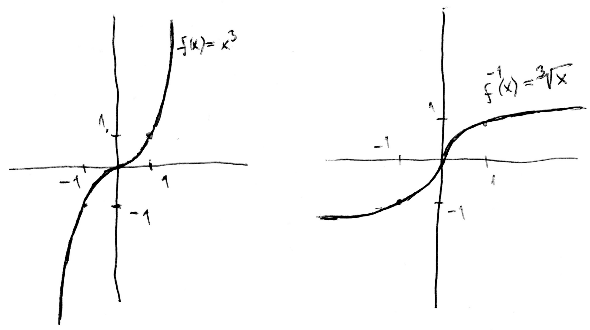
Tento vzorec ovšem není jednoznačným vyjádřením funkce díky operátoru $\pm$. Musíme rozhodnout, které z obou znamének vybrat. Pomocí je, že původní funkce f byla definovaná pro záporná x – to znamená, že (f a f^{-1} si navzájem zaměňují definiční obor a obor hodnot) funkce f^{-1} bude nabývat záporných hodnot, tj. správná volba znaménka je MINUS a hledaná funkce má tvar $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x-3}$:



– nalezněte inverzní funkci k funkci $y = x^3$ pro $D(f) = R$.

Řešení: Funkce $f(x) = x^3$ je prostá pro všechna reálná x (= rovnoběžky s osou x protínají její graf vždy jen v jednom bodě), tj. k ní existuje funkce inverzní: Najdeme ji ze vztahu $y = x^3$ záměnou proměnných x a y a vyjádřením proměnné y:

$$x = y^3 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt[3]{x} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}.$$



Všimněte si z grafů f a f^{-1} jednoho důležitého faktu: pokud f je rostoucí funkce, tak f^{-1} je také rostoucí – tato skutečnost nám může vždy pomoci jako kontrola, zda jsme graf funkce inverzní nakreslili správně.

11.2 Cvičení

Cvičení 11.1. Lineárně lomená funkce – zavedení pojmu. pdf hodina 2601 pro studenty – online materiál [18], matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce. Výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 11.2. Grafy lineárně lomené funkce 1. pdf hodina 2602 pro studenty – online materiál [18], matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce. Výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 11.3. Grafy lineárně lomené funkce 2. pdf hodina 2603 pro studenty – online materiál [18], matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce. Výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 11.4.

4a) Nakreslete graf funkce $f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$ a určete Df a Hf.

4b) Uveďte vzorec lineárně lomené funkce, tj. funkce typu $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, pro kterou platí, že $Df = R \setminus \{3\}$, $Hf = R \setminus \{-1\}$ a f je rostoucí pro $x > 5$ (možná je f rostoucí i na jiných intervalech, ale hlavně ať je rostoucí pro $x > 5$).

4c) Lineárně lomená funkce je zadaná vztahem $f(x) = \frac{x-1}{2x+2}$. Určete její Df, Hf a nakreslete graf.

Cvičení 11.5. Mocninné funkce – přirozený mocnitel. pdf hodina 2701 pro studenty – online materiál [18], matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce. Výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 11.6. Mocninné funkce – záporný mocnitel. pdf hodina 2702 pro studenty – online materiál [18], matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce. Výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 11.5. Nerovnosti – použití grafů mocninných funkcí. pdf hodina 2703 pro studenty – online materiál [18], matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce. Výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 11.6. Inverzní funkce – první pohled na tento pojem, poté co byl představen v kapitole 9 ve formě inverzního zobrazení (inverzní funkce = inverzní zobrazení mezi množinami reálných čísel). pdf hodina 2708 pro studenty – online materiál [18], matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce. Výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 11.7. Druhá odmocnina. pdf hodina 2709 pro studenty – online materiál [18], matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce. Výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 11.8. Druhá odmocnina – graf. pdf hodina 2710 pro studenty – online materiál [18], matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce. Výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 11.9. *n*-tá odmocnina. Pouze první příklad pdf hodiny 2711 pro studenty – online materiál [18], matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce. Výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 11.10.

10a) Nakreslete graf funkce $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} + 3$ pro $x \in (2; \infty)$.

10b) Najděte vzorec funkce $f^{-1}(x)$ inverzní k funkci $f(x)$ z části (a) a nakreslete její graf do téhož obrázku jako graf z části (a).

Cvičení 11.11.

11a) Pro funkci $f(x) = (x+1)^{-2} - 3$ určete Df, Hf a nakreslete graf.

11b) Vypočtěte inverzní funkci k té funkci z části (a), jejíž definiční obor je zúžen pouze na kladná x, a nakreslete grafy obou funkcí do jednoho obrázku.

Cvičení 11.12. Pro následující funkce nakreslete jejich graf, určete $D(f)$, $H(f)$ a najděte příslušnou funkci inverzní: a) $f(x) = -x^2+1$, b) $f(x) = (x-5)^3$, c) $f(x) = \frac{-1}{x} + 2$.

Cvičení 11.13. Pro následující funkce nakreslete jejich graf, určete $D(f)$, $H(f)$ a najděte příslušnou funkci inverzní: a) $f(x) = 2x^{-2}$, b) $f(x) = x^{-3} - 1$.

Cvičení 11.14. Nakreslete grafy funkcí $y = x^{-3}$ a $y = x^{-4}$. Existuje nějaký bod z definičného oboru těchto funkcí, ve kterém tyto funkce nabývají lokálního minima? Pokud ano, který? Pokud ne, proč?

Výsledky některých příkladů a cvičení jsou uvedeny na konci textu v oddílu 15.11.

12 F) = Funkce exponenciální a logaritmické

12.1 Přednáška

Podrobněji viz [9], str. 117-150. Určitě si projděte následující věci (odkazy se týkají učebnice [9]):

- Str. 129, obr. 7.7: Nakreslete graf funkce $y = a^x$ a funkce k ní inverzní $y = \log_a x$, pokud konstanta $a \in (0; 1)$.
- Str. 129, obr. 7.6: Nakreslete graf funkce $y = a^x$ a funkce k ní inverzní $y = \log_a x$, pokud konstanta $a \in (1; \infty)$. Pro zapamatování si správného spárování grafů souvisejících v této a minulé odrážce platí princip, který lze snadno dokázat, že totiž **inverzní funkce k rostoucí funkci je zase rostoucí** – a analogicky **inverzní funkce ke klesající funkci je zase klesající**.
- str. 122, př. 1, př. 2 ... porovnávání hodnot, které využívá znalostí o grafech funkce exponenciální;
- str. 124, př. 7.8.a) ... kreslení grafu funkce exponenciální;

Nyní se podívejme ještě více na logaritmické funkce a jejich vlastnosti:

- definice logaritmu uvádí do souvislosti pojem logaritmické funkce jako inverzní funkce k funkci exponenciální (kde neznámá x se nachází v exponentu funkce):

$$\log_a z = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = z.$$

  Pak následující příklady:

  - str. 132, příklad 1: $\log_2 8 = \dots$
  - str. 133, příklad 2: $\log_{10} 0{,}01 = \dots$
  - str. 134, příklad 4: $\log_8 t = 3 \ \Rightarrow t = \dots$
  - str. 134, příklad 5: $\log_a 100 = 2 \ \Rightarrow a = \dots$

- str. 131, příklad 7.16 ... příklad na porovnávání hodnot;
- str. 131, příklad 7.18 ... logaritmické nerovnice.
- str. 134, příklady 7.23, 7.26 ... výpočet hodnot, jednoduché logaritmické rovnice.
- str. 135-136 ... věty o logaritmech: protože logaritmy jsou vlastně mocniny, tak z pravidel pro mocniny vyplývají i pravidla pro logaritmy:

$$\begin{aligned}
\log_a(r \cdot s) &= \log_a r + \log_a s \\
\log_a \left(\frac{r}{s}\right) &= \log_a r - \log_a s \\
\log_a \left(r^s\right) &= s \cdot \log_a r
\end{aligned}$$

- Str. 136, příklad 1 ... úprava výrazu s logaritmy (pomocí výše uvedených vzorců);

- str. 138, př. 7.30 ... další počítání s logaritmy podle vzorců;
- Mezi logaritmy různých základů existuje vztah, který převádí logaritmus jistého základu na logaritmus jiného základu. Z těchto vzorců se nám bude hodit speciálně převod všech základů na logaritmus o tzv. přirozeném základu (označení 39)

$$\ln x := \log_e x,$$

kde $e = 2{,}718281828459\dots$ je tzv. Eulerovo číslo, v matematice velmi důležité. Převodní vzorec je tvaru

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

(vzorec lze zapamatovat tím způsobem, že ve funkci $\log_a x$ píšeme v jistém smyslu x nad hodnotu a, respektive a je napsáno v dolním indexu – podobně ve zlomku na pravé straně se vyskytuje podíl funkcí ln a opět argument x se vyskytuje graficky nad argumentem a)[41].

- A ještě poslední označení (označení 40): pokud u funkce $\log x$ není uveden žádný základ, zpravidla se jedná o

$$\log x := \log_{10} x$$

(není to vždy pravidlem, v některých učebnicích se výrazem $\log x$ označuje přirozený logaritmus – v tom případě by to ovšem učebnice měla dát čtenáři vědět; v tomto textu $\log x$ znamená logaritmus o základu 10 a pro přirozený logaritmus budeme užívat jeho klasickou značku $\ln x$).

12.2 Cvičení

Cvičení 12.1.

a) Nakreslete graf funkce $f(x) = 0{,}5^x$ a určete Df a Hf.

b) Napište vzorec funkce $f^{-1}(x)$ inverzní k funkci $f(x)$ z části (a).

Cvičení 12.2.

a) Nakreslete graf funkce $f(x) = 0{,}3^{-x} + 2$, určete Df a Hf.

b) Najděte vzorec inverzní funkce f^{-1} k funkci z části (a).

Cvičení 12.3.

a) Nakreslete graf funkce $f(x) = \log_2(x - 1)$ a určete Df a Hf.

b) Vyjádřete neznámou y z rovnice $\ln y = x^2 + 2$.

[41] Tento převodní vzorec budou studenti potřebovat v předmětu matematická analýza – při derivaci či integraci logaritmů různých základů obvykle převádíme na základ přirozený, Eulerovo číslo, a pak teprve provádíme integraci či derivaci. Hodí se nám přitom vědět, že $\ln a$ je konstanta, protože základ a se nemění, tak proto s $\ln a$ zacházíme při integraci či derivaci stejně jako s jakoukoli jinou konstantou. Také díky vzorci je možné si pamatovat (nebo mít tabulky) pouze logaritmy o přirozeném základu a všechny logaritmy o ostatních základech pomocí toho přirozeného základu spočítat.

Cvičení 12.4.

a) Nakreslete graf funkce $f(x) = -\log_2(x-1) + 2$ a určete Df a Hf.

b) Nalezněte vzorec funkce inverzní k funkci (a) a nakreslete její graf.

Cvičení 12.5. Je dána funkce $f(x) = 2^{x-1} + 3$. Najděte vzorec funkce inverzní f^{-1} a nakreslete oba grafy do jednoho obrázku, určete $D(f)$, $H(f)$, $D(f^{-1})$, $H(f^{-1})$.

Cvičení 12.6. Nakreslete grafy funkcí (do tří různých obrázků) a) $y = 0{,}3^x$; b) $y = -0{,}3^x$; c) $y = 2 - 0{,}3^x$; k poslední uvedené funkci najděte vzorec pro funkci inverzní a nakreslete ji do obrázku c).

Cvičení 12.7. Pro funkci $y = 2 \cdot \log_4 x - 1$ nalezněte vzorec funkce inverzní.

Cvičení 12.8. Je dána funkce $f(x) = \log_5(x+2) - 1$. Najděte vzorec funkce inverzní f^{-1} a nakreslete oba grafy do jednoho obrázku, určete $D(f)$, $H(f)$, $D(f^{-1})$, $H(f^{-1})$.

Pokud zbyde čas nebo v rámci opakování a prohloubení učiva lze projít následující témata procvičující exponenciální a logaritmické funkce v online materiálu [18]:

Cvičení 12.9. Exponenciální funkce: Viz realisticky.cz (online materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 2901 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 12.10. Exponenciální funkce 2: Viz realisticky.cz (online materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 2902 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 12.11. Exponenciální funkce 3: Viz realisticky.cz (online materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 2903 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 12.12. Logaritmická funkce: Viz realisticky.cz (online materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 2911 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 12.13. Logaritmická funkce 2: Viz realisticky.cz (online materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 2912 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 12.14. Věty o logaritmech: Viz realisticky.cz (online materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 2913 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 12.15. Věty o logaritmech 2: Viz realisticky.cz (online materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 2914 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 12.16. Věto o logaritmech 2: Viz realisticky.cz (online materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 2915 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 12.17. Exponenciální a logaritmické rovnice: Viz realisticky.cz (online materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 2918 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 12.18. Exponenciální a logaritmické rovnice 2: Viz realisticky.cz (online materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 2919 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 12.19. Exponenciální a logaritmické rovnice 3: Viz realisticky.cz (online materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 2920 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 12.20. Exponenciální a logaritmické nerovnice: Viz realisticky.cz (online materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 2924 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Výsledky některých příkladů a cvičení jsou uvedeny na konci textu v oddílu 15.12.

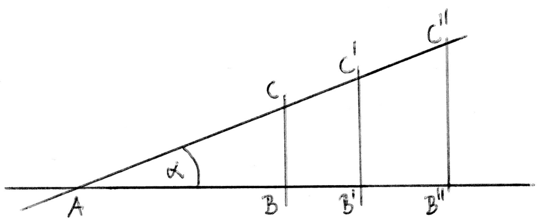
13 G) = Goniometrické funkce

13.1 Přednáška

Odkud se vzaly goniometrické funkce? Označení pochází z řečtiny: *hé gé* ... země, odtud „geometrie“ = měření země, zeměměřičství; dále *hé gónia* ... úhel, roh, úhelný kámen, tj. odtud „goniometrie“ = měření úhlů, úhloměřičství.

A. Označení goniometrických funkcí

Pokud přeskočíme definici úhlu ze základní školy a podíváme se na středoškolskou definici goniometrických funkcí, mohla by se odehrávat následovně: Když se podíváme na pravoúhlé trojúhelníky ABC, $AB'C'$, $AB''C''$, které jsou podobné díky všem třem úhlům navzájem shodným (viz obrázek 20, trojúhelníky ABC, $AB'C'$, $AB''C''$),



Obrázek 20: Pravoúhlé trojúhelníky, které jsou podobné.

vidíme, že například poměr délky odvěsny protilehlé vrcholu A ku délce přepony se nemění a zůstává ve všech třech pravoúhlých trojúhelnících stejný – a je tedy spíše vlastností úhlu α sklonu přepony vůči vodorovné odvěsně, než vlastností délek; označme tento poměr $\sin\alpha$:

$$\sin\alpha := \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|B'C'|}{|AC'|} = \frac{|B''C''|}{|AC''|}.$$

V praxi pak například lze určit z těchto vztahů $|BC| = |AC| \cdot \sin\alpha$, tj. délku jedné strany pravoúhlého trojůhelníka lze vypočítat pomocí délky jiné strany a hodnoty $\sin\alpha$.

Podobně v obrázku vidíme další poměry stran, které se nemění, pokud zachovááváme všechny úhly trojúhelníka stejné, přičemž jeden z nich je pravý, a sice

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &:= \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AB'|}{|AC'|} = \frac{|AB''|}{|AC''|},\\
\operatorname{tg}\alpha &:= \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|AB'|} = \frac{|B''C''|}{|AB''|} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\\
\operatorname{cotg}\alpha &:= \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AB'|}{|B'C'|} = \frac{|AB''|}{|B''C''|} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}
\end{aligned}$$

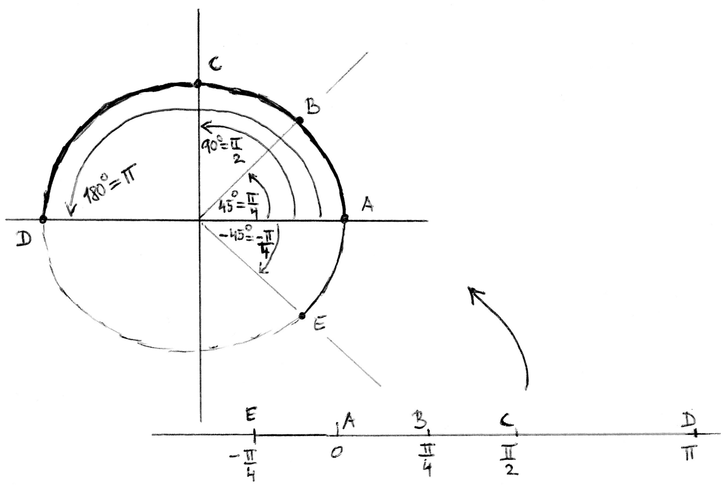
(v daných rovnostech jsou uvedeny jak definiční vztahy :=, tak z nich vyplývající vztahy mezi jednotlivými definicemi, které plynou z toho, že u funkcí tg α, cotg α dáváme funkce $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ do vzájemného poměru). Tím způsobem jsme definovali funkce popisující jistou vlastnost ostrých úhlů, tj. úhlů, které mohou vzniknout jako vnitřní úhly při vrcholu A v pravoúhlém trojůhelníku ABC.

B. Dvě metody měření úhlů

Při měření a popisu úhlů existují dvě základní metody neboli míry:

a) Stupňová míra ... plnému úhlu se přisoudí velikost 360°, pravému úhlu velikost 90°, přímému úhlu velikost 180°, atd.

b) Oblouková míra = délka oblouku:



Obrázek 21: Namotání reálné osy na kružnici o poloměru 1.

Když reálnou číselnou osu „namotáme“[42] na jednotkovou kružnici se středem v počátku a poloměrem 1, na této kružnici dostáváme obrazy reálných čísel – nyní dostáváme úhly určené na jedné straně polopřímkou určenou kladným směrem vodorovné osy, na druhé straně polopřímkou vycházející z počátku, která prochází obrazem reálného čísla „namotaného“ na jednotkové kružnici. Obloukové míře se někdy říká i radiánová míra, kde jednotka jeden radián odpovídá úhlu s vrcholem v počátku a rameny procházejícími obrazy bodů 0 a 1 na jednotkové kružnici (úhel o velikosti jednoho radiánu tedy vytíná na jednotkové kružnici popsané v předchozí konstrukci oblouk délky 1).

V těchto dvou mírách potom

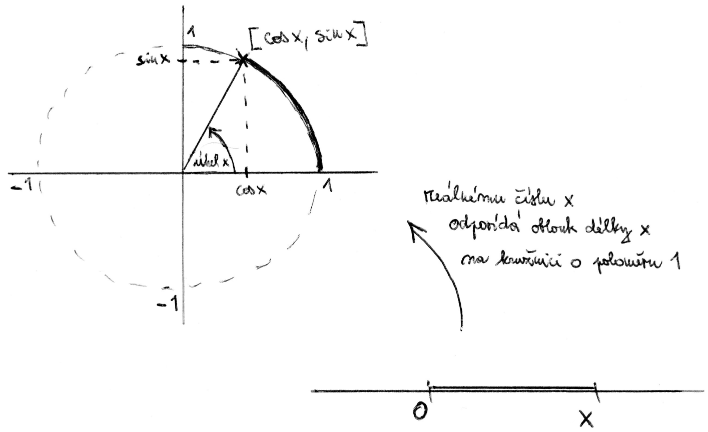
hodnotě 45° odpovídá oblouková délka $\frac{\pi}{4}$ rad,
hodnotě 90° odpovídá oblouková délka $\frac{\pi}{2}$ rad,
hodnotě 180° odpovídá oblouková délka π rad,

[42] Na obě strany donekonečna, tj. to namotávání by nám zabralo hodně času – nicméně toto přibližné vyjadřování je formální, ne že bychom to nekonečné namotávání museli prakticky provést.

atd.

C. Rozšířená definice goniometrických funkcí

Tímto „namotáním“ reálné číselné osy na jednotkovou kružnici, která se dále nachází také v rovině, ve které jsme umístili kartézskou soustavu souřadnic (= vodorovnou a svislou osu) s počátkem ve středu kružnice, lze rozšířit definici goniometrických funkcí $\sin x$, $\cos x$ (a tím i $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$) pro jakékoli reálné x následovně – viz obrázek 22 :



Obrázek 22: Rozšíření definice funkcí $\sin x$ a $\cos x$ pro libovolné reálné x.

Souřadnice obrazu bodu x po namotání na jednotkovou kružnici jsou v kartézské soustavě bodů v rovině, ve které se kružnice nachází, rovny $[\cos x, \sin x]$.

D. Význačné hodnoty goniometrických funkcí

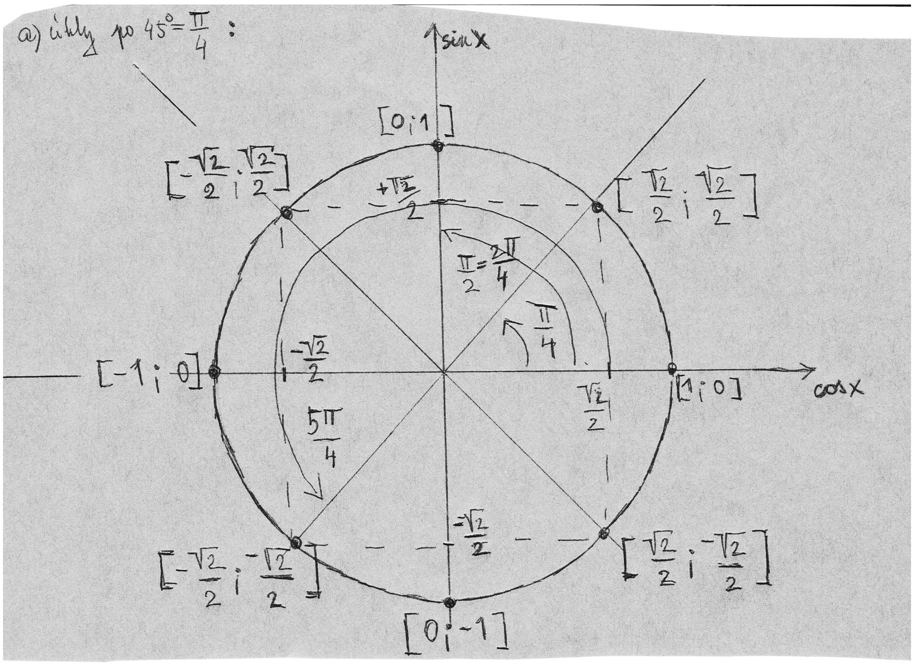
Je důležité pamatovat si hodnoty goniometrických funkcí pro některé důležité úhly x, minimálně hodnoty v tabulce:

x (°)	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
x (rad)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	není def.	0	není def.
$\operatorname{cotg} x$	není def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	není def.	0

Zapamatování údajů z předchozí tabulky právě usnadňuje geometrický význam těchto hodnot jako souřadnic $[\cos x, \sin x]$ obrazu bodu x při namotání reálné osy na jednotkovou kružnici[43].

[43] Pozor, záleží na pořadí, první souřadnice bodů na jednotkové kružnici je rovna hodnotě $\cos x$, druhá souřadnice hodnotě $\sin x$.

- Význačné hodnoty funkcí $\sin x$, $\cos x$ pro násobky úhlu $\frac{\pi}{4}$ jsou uvedeny na obrázku 23:



Obrázek 23: Jednotková kružnice nám usnadňuje zapamatovat si hodnoty $\sin x$ a $\cos x$ pro násobky úhlu $\frac{\pi}{4}$.

- Význačné hodnoty funkcí $\sin x$, $\cos x$ pro násobky úhlu $\frac{\pi}{6}$ jsou uvedeny na obrázku 24:

E. Graf a vlastnosti goniometrických funkcí

Podívejme se nyní na grafy funkcí $\sin x$, $\cos x$, tg x, cotg x s definičním oborem rozšířeným pro všechna $x \in R$ a z grafů se pokusíme vyčíst jejich vlastnosti.

- Vlastnosti funkce $\sin x$ vyčtené z jejího grafu:

a) Graf funkce $\sin x$ vidíme na obrázku 25.

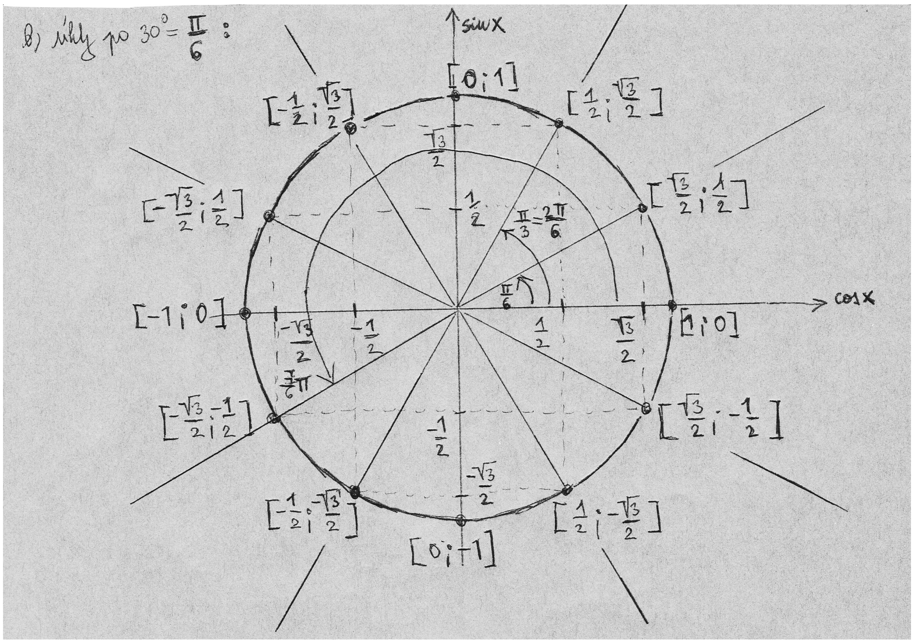
b) $D(f) = R$.

c) $H(f) = \langle -1; 1 \rangle$.

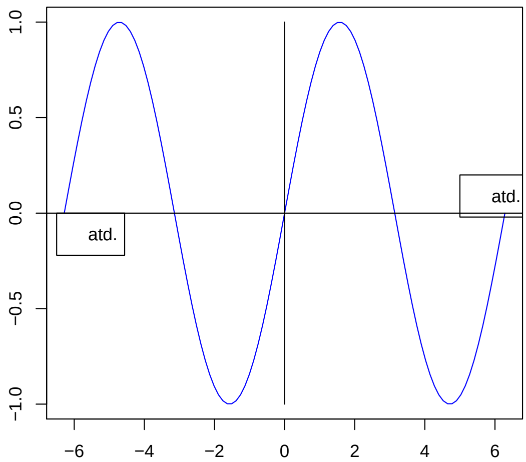
d) Funkce $\sin x$ je rostoucí na každém z intervalů $\langle \frac{-\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rangle$ a klesající na každém z intervalů $\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \rangle$ (pro $k \in Z$). Odtud lze odvodit, že lokální minimum nastává v bodech $\frac{-\pi}{2} + 2k\pi$ (pro $k \in Z$), lokální maximum v bodech $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (pro $k \in Z$).

e) Funkce $\sin x$ je lichá, protože její graf je středově souměrný podle počátku soustavy souřadnic, tj. platí $\sin(-x) = -\sin x$ pro libovolné $x \in R$.

f) Funkce $\sin x$ je ohraničená zdola (např. konstantou $K = -1$) i shora (např. konstantou $L = 1$).



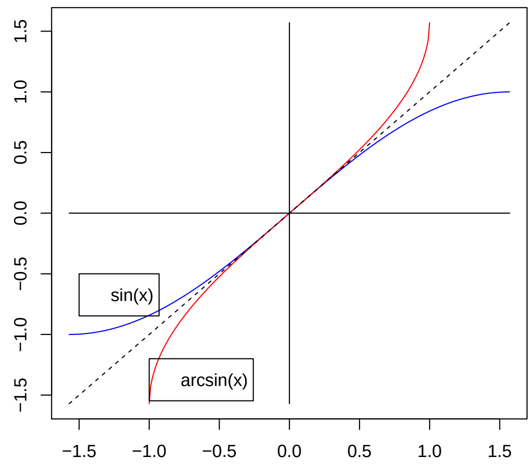
Obrázek 24: Jednotková kružnice nám usnadňuje zapamatovat si hodnoty $\sin x$ a $\cos x$ pro násobky úhlu $\frac{\pi}{6}$.



Obrázek 25: Graf funkce $f(x) = \sin x$.

g) Funkce $\sin x$ je periodická s délkou nejmenší periody $p = 2\pi$.

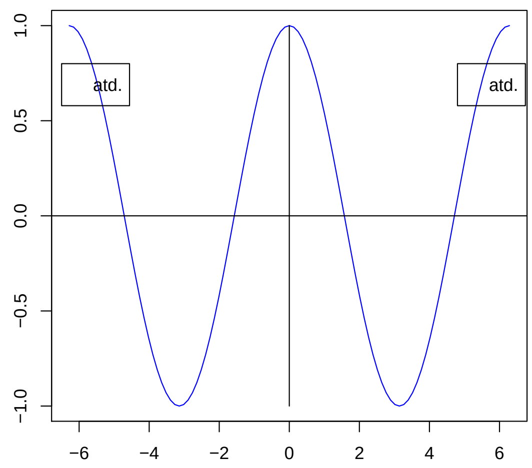
h) Funkce $f(x) = \sin x$ není prostá (= injektivní), protože například hodnoty nula nabývá v nekonečně mnoha bodech, tj. 0 je v relaci f^{-1} s nekonečně mnoha body, a tak je porušena podmínka z definice zobrazení. Tedy obecně řečeno k funkci $\sin x$ funkce inverzní neexistuje. Ovšem pokud bychom se omezili na $f(x) = \sin x$ pro $x \in \langle \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$, tato funkce prostá je a inverzní funkce k ní existuje, označujeme ji $f^{-1}(x) = \arcsin\, x$. Grafy této funkce $\sin x$ na zúženém definičním oboru a funkce k ní inverzní vidíte na obrázku 26:



Obrázek 26: $f(x) = \sin x$ (modře) pro $x \in \langle \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$ a funkce k ní inverzní (červeně) $f^{-1}(x) = \arcsin\, x$.

- Vlastnosti funkce $\cos x$ vyčtené z jejího grafu:

a) Graf funkce $\cos x$ vidíme na obrázku 27.



Obrázek 27: Graf funkce $f(x) = \cos x$.

b) $D(f) = R$.

c) $H(f) = \langle -1; 1 \rangle$.

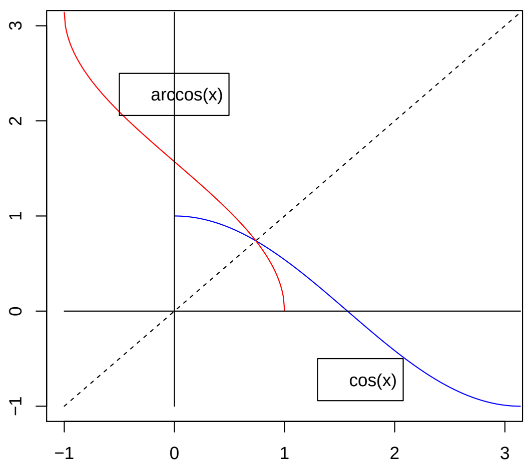
d) Funkce $\cos x$ je rostoucí na každém z intervalů $\langle \pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi \rangle$ a klesající na každém z intervalů $\langle 0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi \rangle$ (pro $k \in Z$). Odtud lze odvodit, že lokální minimum nastává v bodech $\pi + 2k\pi$ (pro $k \in Z$), lokální maximum v bodech $0 + 2k\pi$ (pro $k \in Z$).

e) Funkce $\cos x$ je sudá, protože její graf je osově souměrný podle svislé osy y, tj. platí $\cos(-x) = \cos x$ pro libovolné $x \in R$.

f) Funkce $\cos x$ je ohraničená zdola (např. konstantou $K = -1$) i shora (např. konstantou $L = 1$).

g) Funkce $\cos x$ je periodická s délkou nejmenší periody $p = 2\pi$.

h) Funkce $f(x) = \cos x$ není prostá (= injektivní), protože například hodnoty nula nabývá v nekonečně mnoha bodech, tj. 0 je v relaci f^{-1} s nekonečně mnoha body, a tak je porušena podmínka z definice zobrazení. Tedy obecně řečeno k funkci $\cos x$ funkce inverzní neexistuje. Ovšem pokud bychom se omezili na $f(x) = \cos x$ pro $x \in \langle 0; \pi \rangle$, tato funkce prostá je a inverzní funkce k ní existuje, označujeme ji $f^{-1}(x) = \arccos x$. Grafy funkce $\cos x$ na zúženém definičním oboru a funkce k ní inverzní vidíte na obrázku 28:



Obrázek 28: Graf $f(x) = \cos x$ (modře) pro $x \in \langle 0; \pi \rangle$ a funkce k ní inverzní (červeně) $f^{-1}(x) = \arccos x$.

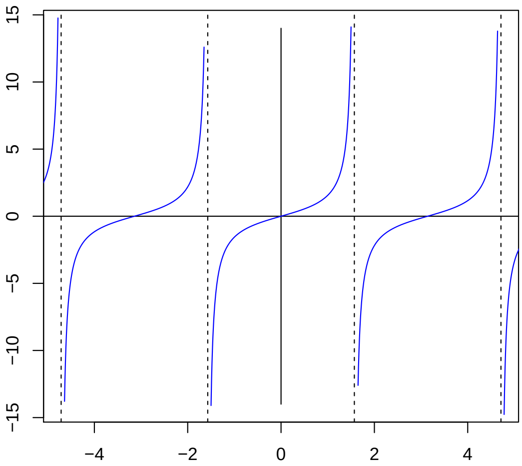
- Vlastnosti funkce $\operatorname{tg} x$ vyčtené z jejího grafu:

a) Graf funkce $\operatorname{tg} x$ vidíme na obrázku 29.

b) $D(f) = R - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$.

c) $H(f) = R$.

d) Funkce $\operatorname{tg} x$ je rostoucí na každém z intervalů $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ a nemá lokální extrémy.



Obrázek 29: Graf funkce $f(x) = \text{tg } x$.

e) Funkce tg x je lichá[44], protože její graf je středově souměrný podle počátku soustavy souřadnic, tj. platí tg $(-x) = -\text{tg } x$ pro libovolné $x \in D(f)$.

f) Funkce tg x není ohraničená shora ani zdola.

g) Funkce tg x je periodická s délkou nejmenší periody $p = \pi$.

h) Funkce $f(x) = \text{tg } x$ není prostá (= injektivní), protože například hodnoty nula nabývá v nekonečně mnoha bodech, tj. 0 je v relaci f^{-1} s nekonečně mnoha body, a tak je porušena podmínka z definice zobrazení. Tedy obecně řečeno k funkci tg x funkce inverzní neexistuje. Ovšem pokud bychom se omezili na $f(x) = \text{tg } x$ pro $x \in \left(\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, tato funkce prostá je a inverzní funkce k ní existuje, označujeme ji $f^{-1}(x) = \text{arctg } x$. Grafy funkce tg x na zúženém definičním oboru a funkce k ní inverzní vidíte na obrázku 30:

- Vlastnosti funkce cotg x vyčtené z jejího grafu:

a) Graf funkce cotg x vidíme na obrázku 31.

b) $D(f) = R - \{0 + k\pi\}$.

c) $H(f) = R$.

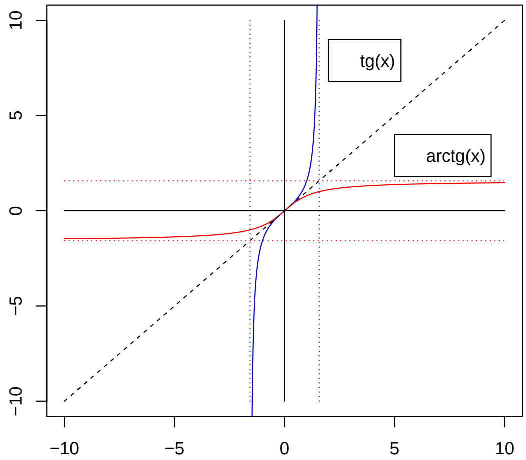
d) Funkce cotg x je klesající na každém z intervalů $(0 + k\pi, \pi + k\pi)$ a nemá lokální extrémy.

e) Funkce cotg x je lichá, protože její graf je středově souměrný podle počátku soustavy souřadnic, tj. platí cotg $(-x) = -\text{cotg } x$ pro libovolné $x \in D(f)$.

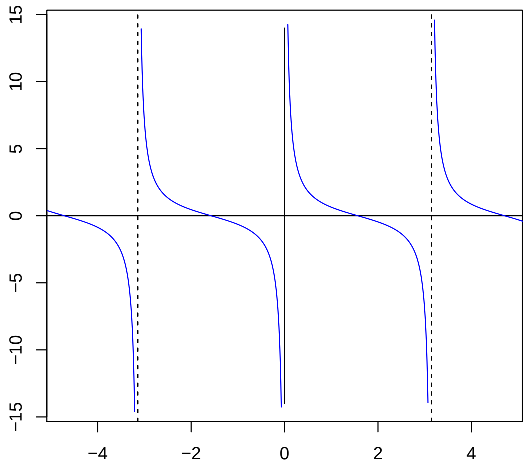
f) Funkce cotg x není ohraničená shora ani zdola.

g) Funkce cotg x je periodická s délkou nejmenší periody $p = \pi$.

[44] Součin nebo podíl dvou funkcí, z nichž jedna je lichá a druhá sudá, je lichá funkce ... díky této vlastnosti víme, že funkce tg x i cotg x jsou liché.

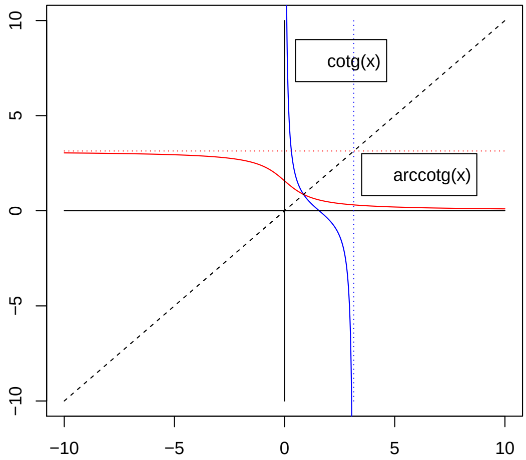


Obrázek 30: Graf fukce $f(x) = \text{tg}\ x$ (modře) pro $x \in \left(\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ a funkce k ní inverzní (červeně) $f^{-1}(x) = \text{arctg}\ x$.



Obrázek 31: Graf funkce $f(x) = \text{cotg}\ x$.

h) Funkce $f(x) = \text{cotg}\ x$ není prostá (= injektivní), protože například hodnoty nula nabývá v nekonečně mnoha bodech, tj. 0 je v relaci f^{-1} s nekonečně mnoha body, a tak je porušena podmínka z definice zobrazení. Tedy obecně řečeno k funkci cotg x funkce inverzní neexistuje. Ovšem pokud bychom se omezili na $f(x) = \text{cotg}\ x$ pro $x \in (0; \pi)$, tato funkce prostá je a inverzní funkce k ní existuje, označujeme ji $f^{-1}(x) = \text{arccotg}\ x$. Grafy funkce cotg x na zúženém definičním oboru a funkce k ní inverzní vidíte na obrázku 32:



Obrázek 32: Graf fukce $f(x) = \text{cotg } x$ (modře) pro $x \in (0;\pi)$ a funkce k ní inverzní (červeně) $f^{-1}(x) = \text{arccotg } x$.

Zapamatovat si průběh grafů zúžených goniometrických funkcí a funkcí k nim inverzních lze pomocí následujících dvou faktů: a) inverzní funkce k rostoucí funkci je opět rostoucí (jak je to u funkcí zúžený $\sin x$ a zúžený $\text{tg } x$); inverzní funkce ke klesající funkci je opět klesající (jak je to u funkcí zúžený $\cos x$ a zúžený $\text{cotg } x$); b) $D(f) = H(f^{-1})$ a $H(f) = D(F^{-1})$ ... platí pro všechny čtyři zúžené goniometrické funkce.

13.2 Cvičení

Projděme si důležité pertie cvičení ke goniometrickým funkcím podle učebnice [10] (dané učebnice se týkají i následující odkazy na strany a čísla příkladů)[45]:

Cvičení 13.1. Velikost úhlu ve stupňové a obloukové míře

1. Str. 21-23, řešený př. 1.
2. Převodní vztahy mezi stupni a radiány získáme z trojčlenky podle toho, zda se nám líbí více vzorec se 180° nebo 360°:

$$\begin{array}{ll} 1 \text{ rad } \ldots & \dfrac{\pi}{180} \text{ stupnů} = \dfrac{2\pi}{360} \text{ stupňů;} \\ x \text{ rad } \ldots & \alpha \text{ stupňů.} \end{array}$$

Odtud získáme vzorec pro převod stupňů na radiány

$$\alpha = \frac{x \cdot 180}{\pi} = \frac{x \cdot 360}{2\pi}$$

[45] Základní uvedení do stupňové a obloukové míry úhlů a do funkcí $\sin x$, $\arcsin x$, $\cos x$, $\arccos x$, $\text{tg } x$, $\text{arctg } x$, $\text{cotg } x$, $\text{arccotg } x$ viz přednáška v této kapitole.

nebo radiány na stupně

$$x = \frac{\alpha \cdot \pi}{180} = \frac{\alpha \cdot 2\pi}{360}.$$

3. Str. 24, příklady 5 a 6 ... konkrétní převod míry úhlu z radiánů na stupně nebo naopak. Další příklady str. 25, př. 2.10.a), 2.11.a).

Cvičení 13.2. Orientovaný úhel a jeho vlastnosti

1. Str. 27-28 ... základní velikost orientovaného úhlu: $0 \leq \alpha < 2\pi$ v obloukové míře, respektive $0 \leq \alpha < 360$ v úhlové míře;

2. orientovaný úhel, který nemá základní velikost, lze převést na úhel se základní velikostí odečtením či přičtením vhodného násobku 2π, respektive v úhlové míře vhodného násobku 360°;

3. př. 1-str. 29, další příklady: 2.19-str.32, 2.20-str.33, 2.21, 2.22.

Cvičení 13.3. Vlastnosti funkcí $\sin x$, $\cos x$

1. Řešené příklady 6-str.37 a 1-str.38-39;

2. další příklady: str.40-41, příklady 2.24 až 2.33.

Cvičení 13.4. Grafy funkcí $\sin x$, $\cos x$

1. Str. 42 ... grafy; str. 43 – př. 1, str. 44 – př. 2, str. 46 – př. 3, str. 48 – př. 2.39;

2. další příklady: str. 49 – př. 2.40.

Cvičení 13.5. Grafy funkcí $\mathrm{tg}\, x$, $\mathrm{cotg}\, x$

1. Str. 57-58 ... grafy; str. 55 – příklad 1;

2. str. 60 – př. 2.43 až 2.49.

Cvičení 13.6. Grafy a vlastnosti cyklometrických funkcí:

1. Nakreslete graf a určete vlastnosti funkce $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\pi}{2}$;

2. Nakreslete graf a určete vlastnosti funkce $f(x) = \arccos(3x - 2)$;

3. Nakreslete graf a určete vlastnosti funkce $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{arccotg}\,(2x - 5) + \pi$.

Cvičení 13.7. Goniometrické rovnice

1. Str. 61 – příklad 1 ... využití jednotkové kružnice;

2. další příklady: str.68 – př. 2.52, str. 69 – př. 2.57.

Cvičení 13.8. Úlohy k opakování – str. 69-70, příklady 2.60 až 2.68.

Pokud už jste prošli všechna předchozí cvičení, tak jako opakování, nebo jako alternativní procvičení místo předchozího může sloužit následující sada cvičení z online materiálu [18]:

Cvičení 13.9. Hodnoty orientovaných úhlů. Viz realisticky.cz (online materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 4206 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 13.10. Zavedení funkce sinus a cosinus. Viz realisticky.cz (online materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 4207 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 13.11. Zavedení funkce sinus a cosinus 2. Viz realisticky.cz (online materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 4208 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 13.12. Vlastnosti funkcí sinus a cosinus. Viz realisticky.cz (online materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 4209 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 13.13. Grafy funkcí sinus a cosinus. Viz realisticky.cz (online materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 4210 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 13.14. Grafy funkcí sinus a cosinus 2. Viz realisticky.cz (online materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 4211 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 13.15. Rychlé určování hodnot funkcí sinus a cosinus. Viz realisticky.cz (online materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 4212 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 13.16. Hledání úhlu ke známým hodnotám funkcí sinus a cosinus = jednoduché goniometrické rovnice. Viz realisticky.cz (online materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 4213 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 13.17. Funkce tangens. Viz realisticky.cz (online materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 4214 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 13.18. Funkce cotangens. Viz realisticky.cz (online materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 4215 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 13.19. Funkce arcus sinus. Viz realisticky.cz (online materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 4216 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 13.20. Ostatní cyklometrické funkce. Viz realisticky.cz (online materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 4217 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 13.21. Goniometrické rovnice. Viz realisticky.cz (online materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 4301 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 13.22. Goniometrické nerovnice. Viz realisticky.cz (online materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 4303 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Výsledky některých příkladů a cvičení jsou uvedeny na konci textu v oddílu 15.13.

14 Vlastnosti funkce – shrnutí

14.1 Přednáška

V této kapitole se už nejedná o klasický výklad, ale spíše o shrnutí definic vlastností funkce probíraných v předchozích čtyřech kapitolách. Vzhledem k tomu, že studenti se učí přesnému vyjadřování a matematickému symbolickému zápisu, definice a úkoly z této kapitoly budou součástí závěrečné zkoušky předmětu.

Definice vlastností funkce

V dalším se zaměříme na přesnější vyjádření vlastností reálných funkcí. Studenti budou muset znát definice následujících vlastností, a také vědět, jak se daná vlastnost pozná z grafu funkce $f(x)$. Říkáme, že (definice 58)

1. funkce f je rostoucí na intevalu I, když
$$\forall x, y \in I: \quad x < y \;\Rightarrow\; f(x) < f(y);$$
2. funkce f je klesající na intevalu I, když[46]
$$\forall x, y \in I: \quad x < y \;\Rightarrow\; f(x) > f(y);$$
3. x_0 z $D(f)$ je lokální minimum funkce f, když existuje otevřený interval I obsahující x_0 a platí
$$f(x) \geq f(x_0) \;\; \forall x \in I;$$
4. x_0 z $D(f)$ je lokální maximum funkce f, když existuje otevřený interval I obsahující x_0 a platí
$$f(x) \leq f(x_0) \;\; \forall x \in I;$$
5. funkce f je sudá na svém definičním oboru, když
$$\forall x \in D(f): \; (-x) \in D(f) \;\wedge\; f(-x) = f(x);$$
6. funkce f je lichá na svém definičním oboru, když
$$\forall x \in D(f): \; (-x) \in D(f) \;\wedge\; f(-x) = -f(x);$$
7. funkce f není ani sudá, ani lichá na svém definičním oboru, když pro ni neplatí předchozí dvě definice.
8. funkce f je zdola ohraničená na svém oboru hodnot $H(f)$, když
$$\exists K \in R: \forall x \in D(f): \quad K \leq f(x);$$

[46] Pozor na tzv. obraceče, kteří bez přemýšlení obrátí obě nerovnosti v definici rostoucí fukce – tímto způsobem totiž nedostanou definici funkce klesající, ale zase jen funkce rostoucí, s tím rozdílem, že se na graf funkce dívají zprava, z druhé strany!!!!!! Ve správné definici klesající funkce je na rozdíl od definice funkce rostoucí převrácen jen jeden symbol nerovnosti!! Část $x < y$ je stále stejná – stále chceme popisovat tu situaci, že první dosazovaná hodnota je menší než ta druhá, tj. obraz čísla x na reálné ose je stále nalevo od obrazu čísla y.

9. funkce f je shora ohraničená na svém oboru hodnot $H(f)$, když

$$\exists L \in R : \forall x \in D(f) : \quad f(x) \leq L;$$

10. funkce f je ohraničená na svém oboru hodnot $H(f)$, když je ohraničená shora i zdola, tj. když

$$\exists K, L \in R : \forall x \in D(f) : \quad K \leq f(x) \leq L;$$

11. funkce f je periodická, když

$$\exists p \in R : p > 0 \ \wedge \ \forall x \in D(f) : \quad (x + kp \in D(f) \ \forall k \in Z \quad \wedge \quad f(x) = f(x + kp)).$$

Budeme se učit poznávat uvedené vlastnosti (včetně těch, které byly definovány v kapitole 9, jako je $D(f)$, $H(f)$, rozeznání, zda je funkce prostá = injektivní, a následné sestavení inverzní funkce) na základě grafu funkce.

Určení některých vlastností z grafu funkce:

1. Definiční obor poznáme z grafu funkce takto: kolmice z bodů grafu na vodorovnou osu soustavy souřadnic ji protínají právě v bodech z $D(f)$.

2. Obor funkčních hodnot: kolmice z bodů grafu na svislou osu soustavy souřadnic ji protínají právě v bodech z $H(f)$.

3. Lokální minimum v bodě x_0 z $D(f)$ (na vodorovné ose) nastává tehdy, když existují body $a, b \in D(f)$ tak, že

$$x_0 \in (a, b) \ \wedge \ f \text{ je klesající na } \langle a; x_0 \rangle \ \wedge f \text{ je rostoucí na } \langle x_0; b \rangle;$$

4. Lokální maximum v bodě x_0 z $D(f)$ (na vodorovné ose) nastává tehdy, když existují body $a, b \in D(f)$ tak, že

$$x_0 \in (a, b) \ \wedge \ f \text{ je rostoucí na } (a; x_0 \rangle \ \wedge f \text{ je klesající na } \langle x_0; b);$$

5. Sudou funkci poznáme tak, že její graf je osově souměrný vzhledem ke svislé ose soustavy souřadnic (osa y je osa souměrnosti).

6. Lichou funkci poznáme tak, že její graf je středově souměrný vzhledem k průsečíku souřadných os (bod $[0; 0]$ je střed souměrnosti).

7. Funkci, která není ani sudá, ani lichá, poznáme tak, že její graf není ani osově souměrný vzhledem ke svislé ose, ani středově souměrný vzhledem k počátku soustavy souřadnic[47].

[47] Aby to funkci ani sudé, ani liché nebylo líto, tak pokud je její definiční obor středově symetrický vzhledem k počátku a funkce je dostatečně slušná, tedy například spojitá, lze ji vyjádřit jako součet dvou (spojitých!) funkcí, z nichž jedna je sudá a druhá lichá – tedy z každé spojité funkce na vhodném definičním oboru lze separovat dvě hodnoty, z nichž jedna přispívá do sudosti a druhá do lichosti. Tato separace funkce na sudou a lichou část ovšem nepatří do základních dovedností, jimiž se budeme zabývat.

8. Funkci ohraničenou zdola poznáme tak, že existuje konstantní funkce $y = K$ rovnoběžná s osou x tak, že graf funkce $f(x)$ je celý nad přímkou $y = K$.

9. Funkci ohraničenou shora poznáme tak, že existuje konstantní funkce $y = L$ rovnoběžná s osou x tak, že graf funkce $f(x)$ je celý pod přímkou $y = L$.

10. Funkci ohraničenou zdola i shora poznáme tak, že existují konstantní funkce $y = K$ a $y = L$ rovnoběžné s osou x tak, že graf funkce $f(x)$ je celý nad přímkou $y = K$ a pod přímkou $y = L$.

11. To, že funkce f je prostá (injektivní), poznáme z jejího grafu tak, že rovnoběžky s osou x její graf protnou vždy nejvýše v jednom bodě.

12. To, že funkce f je surjektivní, poznáme z jejího grafu tak, že rovnoběžky s osou x vždy protnou její graf v nějakém bodě (aspoň jednom).

13. To, že funkce f je bijekce R na R, poznáme z jejího grafu tak, že rovnoběžky s osou x její graf protnou vždy právě v jednom bodě.

14. Pokud je naším úkolem nakreslit funkci inverzní f^{-1} k funkci f, tak můžeme využít faktu, že grafy funkcí f a f^{-1} jsou osově souměrné vzhledem ke grafu lineární funkce $y = x$[48].

15. To, že funkce je periodická, poznáme z jejího grafu tak, že část grafu odpovídající délce nejmenší periody na vodorovné ose se opakuje v tom smyslu, že rovnoběžky s osou x protínají graf funkce v nekonečně mnoha bodech, jejichž vzájemná vzdálenost je rovna násobku této nejmenší periody.

přehled úkolů pro rozbor funkce $f(x)$:

a) Určete $D(f)$.

b) Určete $H(f)$.

c) Určete intervaly, na kterých je funkce rostoucí (klesající), nalezněte její lokální extrémy.

d) Určete, zda je funkce sudá, lichá, nebo není ani sudá, ani lichá.

e) Určete zda je funkce ohraničená (zdola nebo shora).

f) Určete, zda je funkce prostá – pokud ano, tak vyjádřete funkcí k ní inverzní.

g) Určete, zda je funkce periodická – pokud ano, najděte délku její nejmenší periody.

h) Nakreslete graf funkce f.

[48]To plyne mimo jiné z toho faktu, že při hledání inverzní funkce zaměňujeme x za y ve funkčním předpisu $y = f(x)$ a vyjadřujeme proměnnou x jako funkci proměnné y, a tedy oba grafy jsou „zaměnitelné“ = osově symetrické vzhledem k této „ose zaměnitelnosti“ $y = x$.

14.2 Vlastnosti funkce – shrnující cvičení

V tomto cvičení se setkáte s některými vlastnostmi funkcí, jakýmsi souhrnným pohledem na funkce a opakováním některých věcí z předchozích čtyř kapitol.

Cvičení 14.1. Rostoucí a klesající funkce. Viz realisticky.cz (online materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 2113 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 14.2. Rostoucí a klesající funkce 2. Viz realisticky.cz (online materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 2114 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 14.3. Sudá a lichá funkce. Viz realisticky.cz (online materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 2406 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 14.4. Omezenost = ohraničenost funkce, maximum, minimum. Viz realisticky.cz (online materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 2407 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 14.5. Kreslení grafů obecné funkce. Viz realisticky.cz (online materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 2412 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 14.6. Kreslení grafů obecné funkce 2. Viz realisticky.cz (online materiál [18]), matematika pro SŠ, oddíl rovnice a funkce, pdf hodina 2413 pro studenty – výsledky viz tatáž hodina, pdf pro učitele.

Cvičení 14.7. Dokončete definice nebo jejich negace bez jediného českého slova, jen pomocí matematických symbolů (u negací nejprve vytvořte příslušnou pozitivní definici, a teprve pak symbolický zápis negujte):

a) Relace f je zobrazení z X do Y, když ...

b) Relace f není zobrazení z X do Y, když ...

c) Funkce f je rostoucí na intervalu I, když ...

d) Funkce f není rostoucí na intervalu I, když ...

e) Funkce f je klesající na intervalu I, když ...

f) Funkce f není klesající na intervalu I, když ...

g) Reálné číslo x_0 je lokální minimum funkce f, když ...

h) Reálné číslo x_0 není lokální minimum funkce f, když ...

i) Reálné číslo x_0 je lokální maximum funkce f, když ...

j) Reálné číslo x_0 není lokální maximum funkce f, když ...

k) Funkce f je sudá, když ...

l) Funkce f není sudá, když ...

m) Funkce f je lichá, když ...

n) Funkce f není lichá, když ...

o) Funkce f je shora ohraničená, když ...

p) Funkce f není shora ohraničená, když ...

Cvičení 14.8. Uveďte příklad vzorce (nikoli jen obrázku) reálné funkce, která je sudá.

Cvičení 14.9. Uveďte příklad vzorce (nikoli jen obrázku) reálné funkce, která je lichá.

Výsledky některých příkladů a cvičení jsou uvedeny na konci textu v oddílu 15.14.

15 Výsledky některých příkladů

15.1 Výsledky ke kapitole 1.2 – logické spojky, univerzální výroky, důkaz výčtem pravdivostních hodnot

Ad cvičení 1.1. Studenti sami – každý řádek obou výrokových forem má stejnou pravdivostní hodnotu při všech kombinacích pravdivostních hodnot jeho dílčích výrokových proměnných.

Ad cvičení 1.2. Viz řešení na konci knihy [2].

Ad cvičení 1.3. V knize se zadáním najdete i odpovědi na konci textu.

Ad cvičení 1.4. Negace výroků:

4a) Existuje přirozené číslo, které není rovno součtu všech svých dělitelů. Mimochodem, číslům, která jsou rovna součtu všech svých dělitelů **mimo číslo samotné**, se říká dokonalá čísla – patří mezi ně např. 6 nebo 28, protože

$$6 = 1 + 2 + 3, \qquad 28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14.$$

4b) Dnes nebude pršet nebo nebudeme psát písemku z matematiky. Tím pádem ten den nebude tak hrozný.

4c) Aspoň jeden učený z nebe spadl.

4d) Existují nejvýše dně přirozená čísla, která jsou rovna součtu všech svých dělitelů.

4e) Existuje aspoň pět prvočísel.

4f) Dnes večer nepůjdu do kina ani si nepřečtu zajímavou knihu. Rozhodl jsem se trucovat.

4g) Existuje nanejvýš jedno nebo existují aspoň tři celá čísla, která se rovnají své druhé mocnině. Původní věta je skutečně pravdivá – danými **právě dvěma celými čísly** jsou 0 a 1.

Ad cvičení 1.5. Symbolický zápis je:

5a) $\forall n \in N \; \exists \, k \in N : k > 2n + 1$. Jedná se o pravdivý výrok.

5b) $\forall z \in Z \; \exists \, k \in Z : k - 1 < z^3$. Krásně rozlišujeme prvky množiny malými písmeny, samotné množiny označujeme velkými písmeny. Matematický zápis má pravidla, která by měla být pomocí čtenáři i autorovi textu. Výrok je mimochodem také pravdivý.

Ad cvičení 1.6. Výsledky jsou uvedeny na konci knihy [17], v případě nejasnosti konzultujte se cvičícím.

15.2 Výsledky ke kapitole 2.2 – důkaz implikace (přímý a nepřímý), důkaz ekvivalence

Ad cvičení 2.1. . Postup důkazu viz [2], str. 92, příklad 4.2 – řešení je uvedeno na konci knihy [2].

Ad cvičení 2.2. . Postup důkazu viz [2], str. 100-101, př. 1. Jen místo pojmu „obměna implikace“ užívá kniha [2] pojmu „kontrapozice implikace“.

Ad cvičení 2.3. . Nepřímý důkaz ([2], str.103, př. 4.14) – postup důkazu viz [2], str. 153.

Ad cvičení 2.4. U důkazů pomocí reprezentanta x množiny na každé ze stran rovnosti lze často obě implikace dokazovat najednou. Dokažme například první rovnost množinových výrazů $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$.

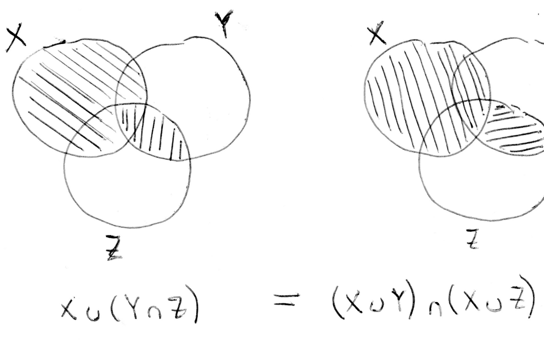
Důkaz:

$$
\begin{aligned}
& x \in X \cup (Y \cap Z) \;\Leftrightarrow\; (x \in X \;\vee\; x \in Y \cap Z) \;\Leftrightarrow\; (x \in X \;\vee\; (x \in Y \;\wedge\; x \in Z)) \;\Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\; & (x \in X \;\vee\; x \in Y) \;\wedge\; (x \in X \;\vee\; x \in Z) \;\Leftrightarrow\; (x \in X \cup Y) \;\wedge\; (x \in X \cup Z) \;\Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow\; & x \in (X \cup Y) \cap (X \cup Z).
\end{aligned}
$$

Místo abychom dokazovali implikaci „$\Rightarrow$“ řetězcem implikací (přímý důkaz typu 2) zleva doprava a implikaci „$\Leftarrow$“ řetězcem implikací zprava doleva, provedli jsme řetězec ekvivalencí a dokázali obě implikace současně.

Nutno říci, že dokazovat ekvivalenci řetězcem dílčích ekvivalencí je způsob dosti neobvyklý a užívaný snad jen při důkazu rovnosti množin. V jiných situacích je lepší si ekvivalenci rozdělit na dvě implikace platící současně a dokazovat zvlášť každou z nich. Některé důkazy ekvivalencí studenti uvidí v předmětu Algebra 1.

Důkaz téhož vztahu $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ pomocí Vennových diagramů: Nakreslíme tři množiny v obecné poloze pro každou stranu množinové rovnosti a vyšrafujeme část roviny (nákresny), která odpovídá bodům daného množinového výrazu – zjišťujeme, že oběma množinovým výrazům odpovídají tytéž šrafované části, tj. množinové výrazy jsou si rovny:



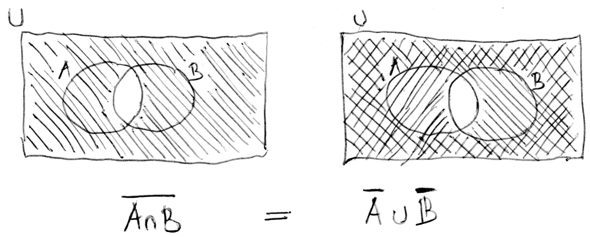
Podobně lze dokázat oběma způsoby i druhou rovnost ze zadání tohoto cvičení.

Ad cvičení 2.5. Dokažme opět oběma způsoby jako v předchozím cvičení množinovou rovnost $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, druhou rovnost přenechávám na starost studentům.

Důkaz pomocí řetězce ekvivalencí:

$$x \in \overline{A \cap B} \;\Leftrightarrow\; x \in U \;\wedge x \notin A \cap B \;\Leftrightarrow\; x \in U \;\wedge\; (x \notin A \;\vee\; x \notin B) \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad (x \in U \;\wedge x \notin A) \;\vee\; (x \in U \;\wedge\; x \notin B) \;\Leftrightarrow\; (x \in U - A) \;\vee\; (x \in U - B) \;\Leftrightarrow\; x \in \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Důkaz pomocí Vennových diagramů:



Ad cvičení 2.6. Negace jsou:

6a) Půjdu na ten večírek, ale Ondra tam nepůjde, nebo se také může stát, že Ondra půjde na večírek a já tam nepůjdu.

6b) Přijde Honza a já mu o tom neřeknu. Nebo: Přijde Honza, ale neřeknu mu o tom.

Cvičení 2.7. Negace výroků podle ekvivalentních úprav:

7a)

$$\neg((A \Rightarrow B) \wedge C) \overset{v.01}{\Leftrightarrow} \neg(A \Rightarrow B) \vee (\neg C) \overset{dsl.v.06}{\Leftrightarrow} (A \wedge \neg B) \vee \neg C.$$

7b)

$$\neg(A \Rightarrow (B \vee C)) \overset{dsl.v.06}{\Leftrightarrow} A \wedge \neg(B \vee C) \overset{v.02}{\Leftrightarrow} A \wedge \neg B \wedge \neg C.$$

7c)

$$\neg((A \vee B) \wedge C) \overset{v.01}{\Leftrightarrow} \neg(A \vee B) \vee \neg C \overset{v.02}{\Leftrightarrow} (\neg A \wedge \neg B) \vee \neg C.$$

Ad cvičení 2.8. Obměna: Pokud n^2 není sudé číslo, pak n není sudé číslo. Jedná se o pravdivé tvrzení.

15.3 Výsledky ke kapitole 3.2 – důkaz sporem, indukcí, konstrukcí a protipříkladem

Ad Cvičení 3.1. Důkaz sporem: Předpokládejme, že $\sqrt{3}$ JE racionální číslo, tj. lze je vyjádřit ve tvaru zlomku. Předpokládejme bez újmy na obecnosti, že v tomto zlomku už nelze krátit, tj. pokud je krácení možné, provádíme je tak dlouho, až dospějeme do vztahu

$$\sqrt{3} = \frac{m}{n},$$

kde $m \in Z$, $n \in N$ a čísla m, n jsou nesoudělná (= nemají společného dělitele většího než číslo 1). Umocněním obou stran na druhou dostaneme

$$3 = \frac{m^2}{n^2},$$

a tedy

$$3n^2 = m^2.$$

Z poslední rovnosti plyne, že číslo m^2 je dělitelné třemi, a tedy i číslo m musí být dělitelné třemi, tj. $m = 3k$ pro $k \in N$. Dosazením do naší rovnosti máme

$$3n^2 = 9k^2, \quad \text{po vydělení třemi } n^2 = 3k^2.$$

Z poslední rovnosti plyne, že číslo n^2 je dělitelné třemi, a tedy i číslo n musí být dělitelné třemi, tj. $n = 3l$ pro nějaké $l \in N$ – ale to je spor s konstrukcí čísel m, n, protože jsme je sestavili tak, aby neměli žádného jiného přirozeného dělitele než číslo 1. Dospěli jsme řetězcem přesných úvah ke sporu – nesprávný je tedy původní předpoklad, tj. platí jeho opak, $\sqrt{3}$ není číslo racionální, nelze ji vyjádřit ve tvaru zlomku.

Ad Cvičení 3.2. Ad 2a indukcí) První část: dokažme pro prvních několik hodnot: 4 kč lze vyplatit pomocí dvou dvoukorun, 5 kč pomocí jedné pětikoruny, 6 kč pomocí tří dvoukorun.

Druhá část: Výrok $V(n)$ má tvar: Obnos n kč lze sestavit pouze ze dvoukorun a pětikorun. Dokažme indukční implikaci

$$V(n) \quad \Rightarrow \quad V(n+1)$$

pro libovolné přirozené n počínaje hodnotou 7. Předpokládejme, že platí $V(n)$. Popišme, jak pomocí této hromady vyčíslíme hromadu o sumě $(n + 1)$:

1. Pokud n je liché počínaje sedmičkou, tak tuto hodnotu lze odměřit pomocí jedné pětikoruny a zbytek dosypat pouze ze dvoukorun. Pak hodnotu $(n+1)$ odměříme tak, že vezmem z hromady pětikorunu a místo ní vrátíme tři dvoukoruny, tj. dotaneme číslo o jednu korunu větší.

2. Pokud n je sudé počínaje osmičkou, tak tuto hodnotu lze odměřit pomocí samých dvoukorun. Pak hodnotu $(n + 1)$ odměříme tak, že dvě dvoukoruny odebereme a vrátíme jednu pětikorunu.

Ad 2b: dokážeme indukcí:

i) $n = 1$ dosadíme do obou stran rovnosti: $1 = \frac{1\cdot 2}{2}$ ... platí;
$n = 2$ dosadíme do obou stran: $1 + 2 = \frac{2\cdot 3}{2}$ ... platí.

ii) Předpokládáme platnost indukčního předpokladu: Vzorec platí pro n, tj.

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

A odtud nyní dokážeme platnost vztahu (= chceme dokázat) pro $(n + 1)$:

$$1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}.$$

Zkusme upravit levou stranu dokazované rovnosti s využitím pravé strany indukčního předpokladu (a poté převedeme na společného jmenovatele a vytkneme člen $(n + 1)$ v čitateli):

$$\underbrace{1 + 2 + \cdots + n}_{=\frac{n(n+1)}{2}} + (n+1) \overset{ind.p.}{=} \frac{n\cdot(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n\cdot(n+1) + 2\cdot(n+1)}{2} = \frac{(n+1)\cdot(n+2)}{2}.$$

A to jsme chtěli dokázat, důkaz je hotov. S využitím platnosti vztahu pro n jsme jej dokázali pro $(n + 1)$.

Ad 2c: dokážeme indukcí:

i) $n = 1$ dosadíme do obou stran rovnosti: $1 = 1^2$ ... platí;
$n = 2$ dosadíme do obou stran: $1 + 3 = 2^2$ ... platí.

ii) Předpokládáme platnost indukčního předpokladu: Vzorec platí pro n, tj.

$$1 + 3 + 5 \cdots + (2n-3) + (2n-1) = n^2.$$

Odtud nyní dokážeme (chceme dokázat) platnost vztahu pro $(n + 1)$[49]:

$$1 + 2 + \cdots + (2(n+1) - 3) + (2(n+1) - 1) = (n+1)^2,$$

což lze upravit na vztah

$$1 + 2 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) = (n+1)^2.$$

Zkusme upravit levou stranu dokazované rovnosti s využitím pravé strany indukčního předpokladu (a poté použijeme vzorec $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, ale z druhé strany, tj. zprava doleva):

$$\underbrace{1 + 2 + \cdots + (2n-1)}_{=n^2} + (2n+1) \overset{ind.p.}{=} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

A to jsme chtěli dokázat, důkaz je hotov. S využitím platnosti vztahu pro n jsme dokázali, že platí i pro $(n + 1)$.

[49]Napíšeme tedy přesně stejný vztah, ale místo n píšeme všude $(n + 1)$.

Ad Cvičení 3.3. Ve všech třech případech lze splnit příslušný úkol, tj. existenční důkaz vykonáme konstrukcí daného úkolu:

a) Ze dvanácti zápalek lze snadno sestavit čtyři samostnatné trojúhelníky.

b) Z devíti zápalek už potřebujeme šetřit – pokud sestavíme jeden větší rovnostranný trojúhelník o délce strany ze dvou zápalek, zbydou nám ještě tři zápalky na spojení středů jejich stran – tím je velký trojúhelník rozdělen na čtyři menší.

c) Zadání je zde nejednoznačné. Pokud by zadávající trval na tom, aby výsledkem byly čtyři stejně velké trojúhelníky v rovině, řešení neexistuje. Ovšem bez omezení na rovinu můžeme jeden trojůhelník ze tří zápalek postavit jako základnu čtyřstěnu, zbylé tři zápalky tvoří hrany čtyřstěnu v prostoru – a čtyřstěn, jak známo, má čtyři shodné trojůhelníky ze svých stěn.

Ad cvičení 3.4. Symbolický zápis výroků:

4a) $\exists n \in N: \ n + 5 > 10.$

4b) $\forall n \in N: \ 6|n \ \Leftrightarrow \ (2|n \ \wedge \ 3|n).$

4c) $\forall d \in N: \ (d|p \ \Rightarrow \ d = 1 \ \vee \ d = p)$. Lze přepsat i v jiné variantě, která se možná čtenáři bude zdát přirozenější:

$$\nexists\, d \in N: \ (d|p \ \wedge \ d \neq 1 \ \wedge \ d \neq p).$$

Ad cvičení 3.5. Negace výroků ze cvičení 3.4:

5a) $\forall n \in N: \ n + 5 \leq 10$ (výrok je nepravdivý). Znak $\exists$ jsme tedy nahradili v negaci znakem $\forall$, a současně jsme znegovali i podmínku za dvojtečkou.

5b) $\exists n \in N: \ [6|n \ \wedge \ (2 \nmid n \ \vee \ 3 \nmid n)] \ \vee \ (2|n \ \wedge \ 3|n \ \wedge \ 6 \nmid n).$

5c) $\exists d \in N: \ (d|p \ \wedge \ d \neq 1 \ \wedge \ d \neq p)$. Negaci druhé varianty lze provést velmi jednoduše: pokud původní tvrzení říká, že neexistuje číslo jisté vlastnosti, negací je tvrzení, že existuje aspoň jedno číslo této vlastnosti – tj. pouze znak $\nexists$ změníme na $\exists$, a daná vlastnost zůstane stejná:

$$\exists\, d \in N: \ (d|p \ \wedge \ d \neq 1 \ \wedge \ d \neq p).$$

Ad cvičení 3.6. Důkaz Thaletovy věty viz cvičení. Pozor, tento důkaz bude zkoušen na prověrce (a) ve 4. týdnu semestru.

Ad cvičení 3.7. Větu $2|n^2 \ \Rightarrow \ 2|n$ dokážeme nepřímo, tj. budeme dokazov přímo její obměnu:

$$2 \nmid n \Rightarrow 2 \nmid n^2.$$

Úsudek 01: Pokud $2 \nmid n$, tak n je liché, tj. $n = 2k + 1$ pro nějaké $k \in N$.

Úsudek 02: Pokud $n = 2k + 1$, tak $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$, tedy číslo liché.

Závěr: n^2 je liché, tj. $2 \nmid n^2$. Důkaz je hotov.

15.4 Výsledky ke kapitole 4.2 – Operace s množinami, důkaz užitím Vennových diagramů, kartézský součin

Ad cvičení 4.1. Viz cvičení 2.5.

Ad cvičení 4.2. Teorie množin je vystavěna na dvouhodnotové logice, protože náš přístup je ten, že každý objekt do množiny buď patří, nebo ne. Tj. množinovému výrazu odpovídá výrok o tom, jaké prvky patří do výsledné množiny. Operace sjednocení odpovídá vysvětlení pomocí disjunkce, operace průniku logickému vysvětlení pomocí konjunkce. Kromě vět 1,2 a 9,10 existují další vztahy mezi logikou a teorií množin, například zákonu negace negace výroku $(\neg(\neg A) \Leftrightarrow A)$ odpovídá rovnost pro doplněk doplňku množiny $\overline{\overline{A}} = A$, protože operaci doplňku odpovídá logické vysvětlení pomocí negace.

Ad cvičení 4.3. a) Například $(B \cap C) \setminus A$; b) například $(B \setminus (A \cup C)) \cup (A \cap B \cap C)$; c) například $(B \cap D) \setminus C$; d) například $B \setminus (A \cup C)$.

Ad cvičení 4.4. Důkazy viz Vennovy diagramy.

Ad cvičení 4.5. Symbolické definice pojmů:

5a) $\overline{A} = \{x \in U : \ x \notin A\}$.

5b) $A \setminus B = \{x \in A : \ x \notin B\}$.

5c) $A \times B = \{[x, y] : \ x \in A, \ y \in B\}$.

5d) $A \cup B = \{x : \ x \in A \ \vee \ x \in B\}$.

5e) $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$.

5f) $A \div B = \{x : \ (x \in A \ \wedge \ x \notin B) \ \vee \ (x \in B \ \wedge \ x \notin A)\}$.

Ad cvičení 4.6. věta 9: Doplněk průniku je sjednocením doplňků.
věta 10: Doplněk sjednocení je průnikem doplňků.

Ad cvičení 4.7. $(\overline{A \cup B}) \cap C = \{17, 18, 19\}$.

Ad cvičení 4.8.

a) Množina je soubor navzájem rozlišitelných prvků.

b) Například $S = (C - A) \cup (A \cap B \cap C)$.

Ad cvičení 4.9. Označme

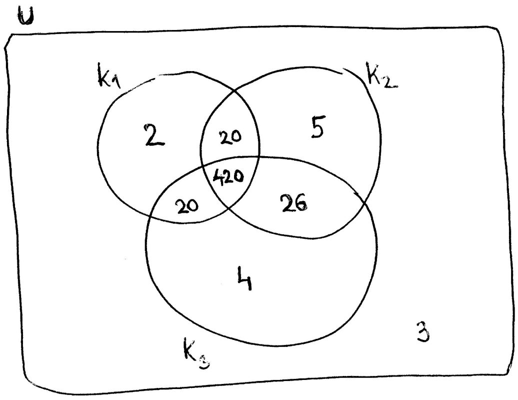
$K_1 =$ množina všech součástek, které prošly první kontrolou;

$K_2 =$ množina všech součástek, které prošli druhou kontrolou;

$K_3 =$ množina všech součástek, které prošly třetí kontrolou;

$U =$ univerzální množina všech 500 součástek.

Dále nakresleme množiny K_1, K_2, K_3 v obecné poloze uvnitř univerzální množiny U. A můžeme vyplňovat počty prvků v jednotlivých částech roviny, které reprezentují počty prvků v dané části množiny. Další informace vyplňujeme v následujícím pořadí (viz též obrázek):



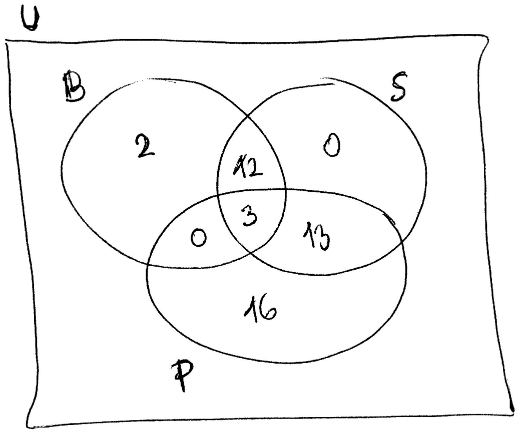
- 3 součástky neprošly žádno z kontrol ... napíšeme číslo 3 mimo dané tři množiny, ale uvnitř množiny U.
- 7 součástek neleží v K_1 ani K_2 ... do K_3 napíšeme čtyřku mimo všechny průniky, protože jsme od sedmi odečetli ještě tři prvky, které neprošly žádno z kontrol.
- 5 součástek neleží v K_2 ani K_3 ... do K_1 napíšeme mimo průniky dvojku, protože jsme od pěti odečetli tři prvky, které jsou zcela mimo.
- 8 součástek neleží v K_1 ani K_3 ... do K_2 napíšeme mimo průniky pětku, protože jsme od osmi odečetli tři prvky, které jsou zcela mimo.
- 38 součástek neleží v K_1 ... jestliže od 38 odečteme pět prvků, které leží výlučně v K_2, čtyři prvky, které leží výlučně v K_3, a ještě tři prvky, které jsou zcela mimo, píšeme počet 26 do množiny $K_2 \cap K_3 - K_1$.
- 29 součástek neleží v K_2 ... jestliže od 29 odečteme dva prvky, které leží výlučně v K_1, čtyři prvky, které leží výlučně v K_3, a ještě tři prvky, které jsou zcela mimo, píšeme počet 20 do množiny $K_1 \cap K_3 - K_2$.
- 30 součástek neleží v K_3 ... jestliže od 30 odečteme pět prvků, které leží výlučně v K_2, dva prvky, které leží výlučně v K_1, a ještě tři prvky, které jsou zcela mimo, píšeme počet 20 do množiny $K_1 \cap K_2 - K_3$.
- Vylučovací metodou v množině $K_1 \cap K_2 \cap K_3$ musí ležet pět set minus všechna dosud napsaná čísla, což je rovno 420.

Nyní už bude hračka odpovědět na otázky ze zadání:

a) 420 součástek prošlo všemi kontrolami bez vady, tj. žádná z kontrol je neshledala nevyhovujícími.

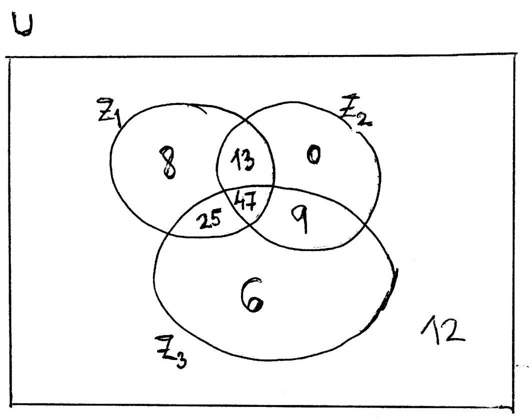
b) $20 + 20 + 26 = 66$ součástek neprošlo právě jednou z kontrol K_1, K_2, K_3 (některou z nich), tj. dvěma kontrolami prošlo a tou třetí ne.

Ad cvičení 4.10. Označme B množinu letadel, která byla na letišti z předchozího dne, S množinu letadel, která daný den startovala, P množinu letadel, která v daný den přistála. Tyto tři množiny nakreslíme v obecné poloze, která mán rozdělí „území těchto tří množin" na sedm částí. Do nich budeme vpisovat jednotlivé informace ze zadání – viz obrázek:



A nyní zbývá odpovědět na otázku ze zadání: Na letišti toho dne večer zůstalo $2 + 3 + 16 = 21$ letadel (Dvě letadla toho dne vůbec nevzlétla, tři letadla vzlétla, ale vrátila se, a šestnáct nových letadel přistálo v ten den na letišti). Výsledné číslo 21 je dáno součtem počtu prvků tří disjuktních částí roviny.

Ad cvičení 4.11. Označme Z_1 množinu studentů, kteří složili zkoušku první, Z_2 množinu těch, co složili zkoušku druhou, Z_3 množinu těch, co složili zkoušku třetí. Nakreslíme-li si tyto množiny v obecné poloze, můžeme pomalu vyplňovat počty prvků v jednotlivých oblastech roviny – počínaje těmi, které víme naprosto jistě.



Postupně dostaneme:

- Deset procent studentů nesložilo žádnou zkoušku ... mimo kruhy píšeme číslo 12.

- Nebyl nikdo, kdo by složil zkoušku pouze z druhého předmětu ... do $Z_2 - Z_1 \cup Z_3$ píšeme číslo 0.
- Dvacet studentů neobstálo ani u jednoho z nich – je míněno „ani u druhého, ani u třetího předmětu“, o nichž byla řeč v první části souvětí (i čeština správně pochopená hraje roli) ... do $Z_1 - Z_2 \cup Z_3$ píšeme číslo 8, protože jsme od 20 odečetli ještě 12 studentů, kteří jsou úplně mimo.
- 9 studentů složilo druhou zkoušku, ale ne zkoušku první ... to je krásná informace o počtu studentů v množině $Z_2 \cap Z_3 - Z_1$ (zkouška: $0 + 9 = 9$ studentů se nachází v množině $Z_2 - Z_1$).
- 56 studentů složilo úspěšně zkoušku ze druhého i třetího předmětu ... toto je informace o počtu prvků množiny $Z_2 \cap Z_3$ ... odtud lze určit počet studentů v průniku všech tří množin: $56 - 9 = 47$.
- 33 studentů nevyhovělo ze třetího předmětu ... mimo množinu Z_3 je 33 studentů a tyto oblasti roviny mimo jediné máme už prošetřeny, tj. do zbývajícího pole $Z_1 \cap Z_2 - Z_3$ píšeme $33 - 12 - 0 - 8 = 13$.
- 47 studentů složilo ze tří zkoušek dvě ... tato informace se týká součtu počtu studentů ze tří různých oblastí – jedná se o studentu nacházející se v průniku vždy dvou množin, ale mimo průnik všech tří množin. Dvě z těchto tří částí máme už popsány, tj. tu třetí určíme odečtením počtu prvků zbylých dvou od 47, dostaneme

$$|Z_1 \cap Z_3 - Z_2| = 47 - 13 - 9 = 25.$$

Nyní máme ve Vennově diagramu informace o všech částech roviny kromě té, na kterou se ptá zadání úlohy: Kolik studentů složilo výlučně předmět třetí? Tuto informaci získáme, když odečteme všech sedm počtů navzájem disjunktních množin od čísla 120:

$$120 - 12 - 0 - 8 - 13 - 47 - 25 - 9 = 120 - 114 = \underline{\underline{6}}.$$

15.5 Výsledky ke kapitole 5.2 – Dělitelnost celých čísel, důkaz užitím Dirichletova principu, operace s komplexními čísly

Ad Příklad 5.3.

ad a) $25 : 3 = 8$, zbytek je 1; tedy $25 = 3 \cdot 8 + 1$, tj. $q = 8$, $r = 1$.

ad b) $(-25) : 3 = -8$, zbytek je -1; tedy $-25 = 3 \cdot (-8) + (-1)$ ... to ještě nesplňuje podmínku věty, odečteme tedy dělitele 3 od pravé strany a současně jej přičteme:

$$-25 = 3 \cdot (-8) - 3 + 3 - 1 = 3 \cdot (-9) + 2 \quad \Rightarrow \quad q = -9, \ \ r = +2.$$

Ad cvičení 5.1.

1a) $z_1 + z_2 = 3$, $z_1 \cdot z_2 = 2 - 2i + 4i + 4 = 6 + 2i$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+2i}{2-2i} = \frac{1+2i}{2-2i} \cdot \frac{2+2i}{2+2i} = \frac{2+2i+4i-4}{4+4} = \frac{-2+6i}{8} = \frac{-1+3i}{4} = \frac{-1}{4} + \frac{3}{4}i.$$

$(1 + 2i)^2 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i$; $(2 - 2i)^2 = 4 - 8i - 4 = -8i$.

1b) Můžeme použít klasický vzorec

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1}{2} \pm i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Řešením rovnic s vyšší mocninou proměnné x se budou studenti zabývat v předmětu Algebra 3.

Cvičení 5.2. Převeďte daná komplexní čísla v algebraickém tvaru na goniometrický tvar:

2a) $z_1 = 2(\cos 0 + i \cdot \sin 0)$, $z_2 = 2(\cos \pi + i \cdot \sin \pi)$.

2b) $z_3 = \cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6}$, $z_4 = \cos \frac{5\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{5\pi}{6}$.

2c) $z_5 = \cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2}$, $z_6 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{2} = \cos \frac{-\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{-\pi}{2}$.

Cvičení 5.3. Převeďte daná komplexní čísla v goniometrické tvaru na algebraický tvar:

3a) $z_1 = -\sqrt{2} + i \cdot \sqrt{2}$.

3b) $z_2 = -3i$.

3c) $z_3 = 2\sqrt{3} - 2i$.

Ad cvičení 5.4. Ad 13a) Vyjdeme z předpokladu $a|b$, $a|c$ a užitím definice 28 tento předpoklad přepíšeme:

$$b = a \cdot q_1, \quad c = a \cdot q_2 \quad \text{pro nějaká čísla} \quad q_1, q_2 \in Z.$$

Pak lze číslo $(b + c)$ vyjádřit jako

$$b + c = aq_1 + aq_2 = a \cdot (q_1 + q_2),$$

tedy podle definice 28 je $(b + c)$ nějaký násobek čísla a, tj. $a|(b + c)$.

Ad 13b) Důkaz je podobný důkazu věty 13a).

Ad cvičení 5.5. Proveďme Euklidův algoritmus pro hledání největšího společného dělitele:

$$\begin{aligned} 364 : 208 &= 1, \text{ zbytek } r_0 = 156; \\ 208 : 156 &= 1, \text{ zbytek } r_1 = 52; \\ 156 : 52 &= 3, \text{ zbytek } r_2 = 0. \end{aligned}$$

Tj. NSD je posledním nenulovým zbytkem, tj. jedná se o číslo 52.

Tentýž NSD jsou schopni studenti najít i rozkladem na prvočinitele:

$$\begin{aligned} 364 &= 2^2 \cdot 91 = 2^2 \cdot 7 \cdot 13; \\ 208 &= 2^3 \cdot 26 = 2^4 \cdot 13. \end{aligned}$$

Tedy $NSD = 2^2 \cdot 13 = 52$ ... brali jsme součin všech mocnin prvočísel, které jsou děliteli obou z daných čísel.

Ad cvičení 5.6. Převedeme jednotlivá tvrzení do symbolického matematického zápisu:

6a) $8|(2k + 1)^2 - 1)$ pro $k \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Upravme dělence:

$$(2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k(k + 1).$$

Součin $k(k + 1)$ je jako součin po sobě jdoucích čísel číslo sudé nebo nula, tj. číslo dělitelné dvěma. Odtud jeho čtyřnásobek je dělitelný osmi.

6b) $8|[(2k + 1)^2 - (2l + 1)^2]$, kde $k, l \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Upravme dělence:

$$(2k + 1)^2 - (2l + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 - 4l^2 - 4l - 1 = 4k(k + 1) - 4l(l + 1).$$

Podle úlohy 4(a) se jedná o rozdíl čísel dělitelných osmi, tj. výsledek je číslo dělitelné osmi.

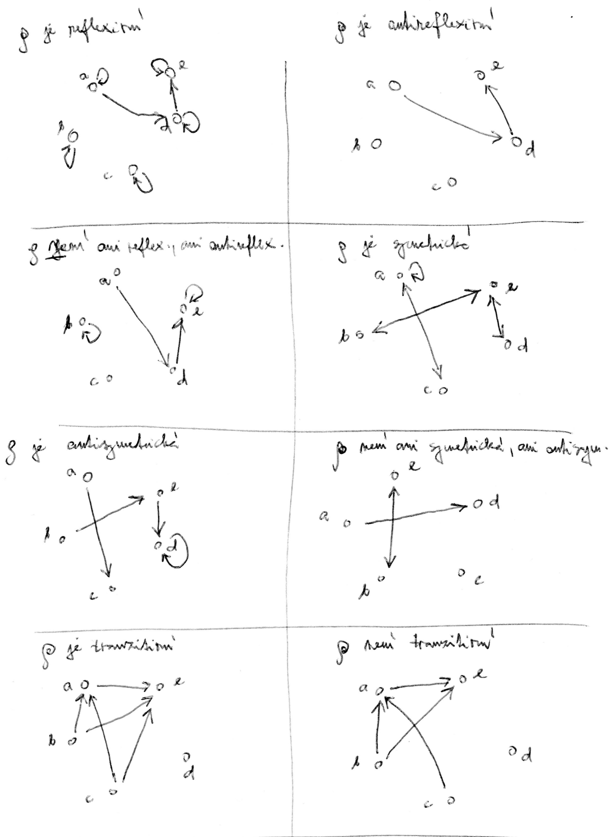
6c) $6|(2k - 1 + 2k + 2k + 1)$. Odtud úpravou dělence dostaneme: $2k - 1 + 2k + 2k + 1 = 6k$, a to je číslo evidentně dělitelné šesti (každý násobek šesti je dělitelný šesti).

15.6 Výsledky ke kapitole 6.2 – Binární relace a její vlastnosti

Ad Příklad 6.1. :

- reflexivní relace je reprezentována smyčkami u všech prvků (jedničkami na celé hlavní diagonále),
- antireflexivní relace nepřítomností smyček (nepřítomností jedniček na hlavní diagonále),
- symetrická relace má pro každou šipku též šipku v opačném směru,
- antisymetrická relace nemůže mít oboustranné šípky mezi dvěma různými prvky,
- tranzitivní relace musí pro např. šipku od a do b a od b do c obsahovat i šipku od a do c,
- úplná relace jednak obsahuje všechny smyčky, a pak pro každé dva různé prvky x, y vede šipka buď z x do y (tedy x je v relaci s y), nebo šipka z y do x, nebo obojí.

Ad Příklad 6.2. : Studentům by mělo být jasné, že např. antireflexivní ($anti - 12$) relace není negací relace reflexivní (11), ale úplným protipólem reflexivní relace – tj. že existují relace s nějakou smyčkou, které nejsou ani reflexivní, ani antireflexivní. Podobně u tranzitivní relace nemusí být všechny možné tranzitivní spoje prvky relace, ale jen ty, které jsou vynuceny šipkami v posloupnosti tří prvků (tj. $x\rho y$ a $y\rho z$ vynucují šipku $x\rho z$). Možná řešení viz obrázek:



Ad Příklad 6.3. : R je reflexivní (11) a tranzitivní (13). Je důležité si všimnout, že relace R není antisymetrická, protože například $3|(-3)$ a $(-3)|3$, ale odtud neplyne $3 = -3$. Není ani symetrická, protože pokud $3|6$, neplyne odtud, že $6|3$.

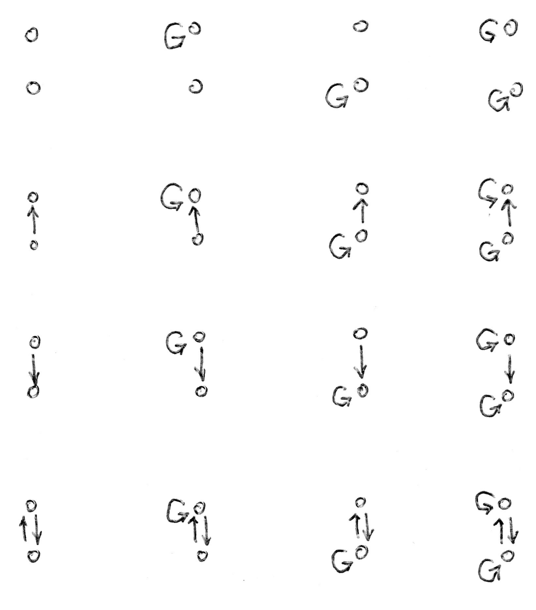
Ad Příklad 6.4. : ad a) může, ale jen relace, která je podmnožinou reflexivní relace, bez šipek mezi různými prvky; tedy jedná se o relaci, jejíž jediné prvky jsou nějaké smyčky (ne nutně všechny).

Ad Příklad 6.5. : ad a) R je reflexivní (11), antisymetrická ($anti - 12$) a tranzitivní (13).
ad b) R je reflexivní (11), symetrická (12) a tranzitivní (13).
ad c) R je reflexivní (11), antisymetrická ($anti - 12$) a tranzitivní (13).
ad d) R je pouze reflexivní (11), jinak nic rozumného nelze říci.

Ad cvičení 6.3.

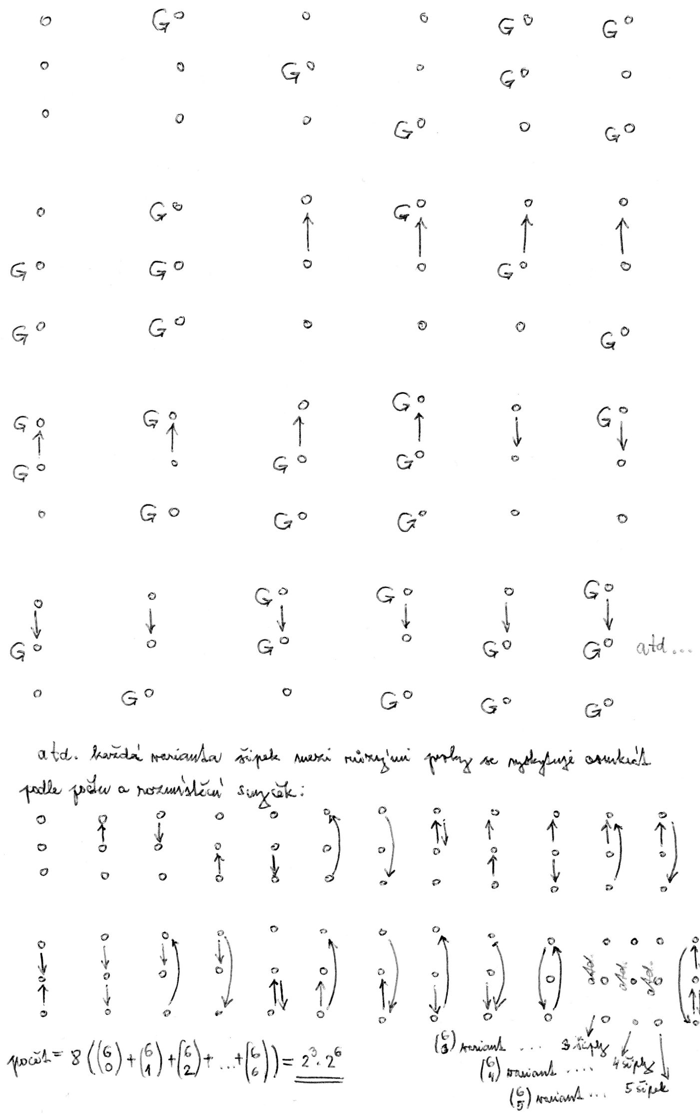
Ad a) Relace na jednoprvkové množině jsou dvě: prázdná relace a relace obsahující jednu smyčku jediného prvku do sebe sama.

Ad b) Relací navzájem různých na dvouprvkové množině je šestnáct – viz obrázek:



Rozbor obrázku: na dvouprvkové množině existují čtyři kombinace rozdělení smyček, tj. čtyřikrát se musí násobit jakákoli verze rozdělení šipek mezi různými prvky. Rozdělení šipek mezi různými prvky jsou čtyři, tj. celkový počet je dán součinem $4 \cdot 4 = \underline{\underline{16}}$ variant.

Ad c) Relací navzájem různých na tříprvkové množině je 512:



Rozbor obrázku: existuje osm rozdělení smyček, tj. počet různých rozdělení šipek mezi navzájem různými prvky se musí násobit osmi. Pro různá rozdělení variant šipek mezi různými prvky existuje

- jedna varianta bez šipek mezi různými prvky;
- šest variant jedné šipky mezi různými prvky;
- z šesti variant jedné šipky vybíráme dvě šipky, tj. variant se dvěma šipkama mezi různými prvky je $\binom{6}{2} = 15$ variant;
- variant se třemi šipkami existuje $\binom{6}{3}$;
- variant se čtyřmi šipkami existuje $\binom{6}{4}$;
- variant s pěti šipkami existuje $\binom{6}{5}$;
- variant se šesti šipkami existuje $\binom{6}{6}$.

Tedy celkem dostáváme

$$8 \cdot \left(\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \cdots + \binom{6}{6}\right) = 2^3 \cdot 2^6 = 512 \text{ variant.}$$

ad d) Můžeme se pokusit o hypotézu, kolik různých relací existuje na n-prvkové množině:

- Počet rozmístění smyček ... 2^n.
- Dále počet rozmístění šipek mezi různými prvky ... 2 na počet variant umístění jedné šipky mezi různými prvky.
- Jednu šipku umístíme kolika způsoby? Vybereme dva různé prvky $\binom{n}{2}$ způsoby, a vynásobíme dvěma. Jednu šipku mezi různé prvky tedy umístíme

$$\binom{n}{2} \cdot 2 = n(n-1) \quad \text{způsoby.}$$

- Celkem tedy máme: Počet relací na n-prvkové množině ... $2^n \cdot 2^{n(n-1)} = 2^{n+n^2-n} = 2^{n^2}$.

Ad cvičení 6.4. Například $\rho = \{[1;2],[2;1],[2;3],[3;2]\}$.

Ad cvičení 6.5. Například $\rho_1 = \{[1;2]\}$, $\rho_2\{[2;3]\}$ jsou obě tranzitivní (protože neporušují podmínku tranzitivity), ale jejich sjednocení tranzitivní není.

Ad cvičení 6.6. Například $\rho = \{[3;4],[4;3],[1;2]\}$ – porušuje podmínku symetrie i podmínku antisymetrie.

Ad cvičení 6.7. a) Relace $|$ je antisymetrická na množině N. b) Relace $|$ není antisymetrická na množině Z, protože z faktu, že $3|(-3) \ \wedge \ (-3)|3$ neplyne $3 = -3$.

Ad cvičení 6.8. Relace není reflexivní, protože např. $[2;2] \not{i}n\rho$; není ani antireflexivní, protože $[1;1] \in \rho$. Není symetrická, protože např. $[2;4] \in \rho$, ale $[4;2] \notin \rho$. Antisymetrická je, protože neporušuje podmínku antisymetrie – jediná dvojice navzájem symetrických prvků je totiž $[1;1]$, a v ní se o navzájem různé prvky nejedná. Není tranzitivní, protože např. $[2;4] \in \rho$, $[4;16] \in \rho$, ale $[2;16] \notin \rho$. Není úplná, protože např. $[2;3] \notin \rho$ a současně ani $[3;2] \notin \rho$.

Ad cvičení 6.9. Vlastnost symetrie (12) relace ρ na množině M:

a) (12) symbolicky: $\forall x, y \in M : \ x\rho y \ \Rightarrow \ \neg(y\rho x)$;

b) Negace (12): $\exists x, y \in M : \ x\rho y \ \wedge \ \neg(y\rho x)$.

Ad cvičení 6.10 Vlastnost anti-(12) relace ρna množině M:

a) anti-(12) symbolicky: $\forall x, y \in M : \ x\rho y \ \wedge \ y\rho x \ \Rightarrow \ x = y$;

b) Negace anti-(12): $\exists x, y \in M : \ x\rho y \ \wedge \ y\rho x \ \wedge \ x \neq y$.

Ad cvičení 6.11. Negujte vlastnost (13) relace ρna množině M, a to důkladněji než jen stylem „není pravda, že“. Postup:

a) (13) symbolicky: $\forall x, y, z \in M : \; x\rho y \;\wedge\; y\rho z \;\Rightarrow\; x\rho z.$

b) Negace (13): $\exists x, y, z \in M : \; x\rho y \;\wedge\; y\rho z \;\wedge\; \neg(x\rho z).$

Ad cvičení 6.12. Reflexivita (11): neplatí, protože např. $\{1;2\}$ není v relaci se sebou samotnou.
Antireflexivita anti-(11): neplatí, protože celá množina A je v relaci se sebou samotnou.
Symetrie (12): platí, při sjednocení v podmínce relace nezáleží na pořadí množin.
Anti-(12): neplatí, např. $\{1;2\}$ a $\{3;4;5\}$ jsou v relaci, a přitom se jedná o různé podmnožiny.
Tranzitivita (13): Neplatí, např. $\{1\}\rho\{2;3;4;5\}$ a současně $\{2;3;4;5\}\rho\{1;2\}$, ale $\neg(\{1\}\rho\{1;2\})$.
Úplnost (14): Neplatí, např. $\neg(\{1\}\rho\{1;2\})$ a současně $\neg(\{1;2\}\rho\{1\})$.

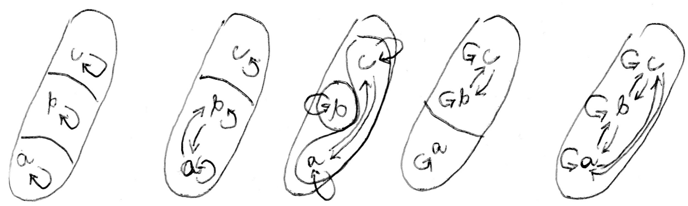
Ad cvičení 6.13. Jakákoli dvě lichá čísla jsou navzájem v relaci ρ_1. Liché číslo není v relaci se žádným sudým číslem, ani dvě sudá čísla nejsou nikdi v relaci. A proto tedy:
Reflexivita (11): Neplatí, protože např. $[2;2] \notin \rho_1$.
Antireflexivita anti-(12): Neplatí, protože např. $[3;3] \in \rho_1$. Symetrie (12): Platí, protože u součinu nezáleží na pořadí čísel.
Anti-(12): Neplatí, protože např. $[1;3] \in \rho_1$ a $[3;1] \in \rho_1$ a čísla 1 a 3 jsou navzájem různá.
Tranzitivita (13): Platí, vlastnost lichého výsledku se přenáší na součin jakýchkoli dvou lichých čísel.
Úplnost (14): Neplatí, např. $[2;4] \notin \rho_1$ ani $[4;2] \notin \rho_1$.

Ad cvičení 6.14. Vlastnosti relace u týmů, které hrají proti soupeři na domácím hřišti:
Reflexivita (11): Neplatí, týmy nehrají se sebou samotným v soutěžním zápase (i když na tréninku ano, ale to se nepočítá).
Antireflexivita anti-(11): Platí.
Symetrie (12): Platí, oba týmy hrají společně na domácím hřišti i na hřišti soupeře.
Anti-(12): Neplatí, ze symetrického vztahu neplyne, že tým hraje sám se sebou.
Tranzitivita (13): Ano, protože hraje každý s každým, tj. v relaci jsou obsaženy všechny uspořádané dvojice se dvěma různými týmy.
Úplnost (14): Podle definice pojmu vlastnosti (14) tato relace není úplná, protože úplnost, jak jsme ji definovali, zahrnuje i reflexivitu. Kdyby někdo definoval pojem úplné relace jen pro navzájem různé prvky, relace by úplná byla.

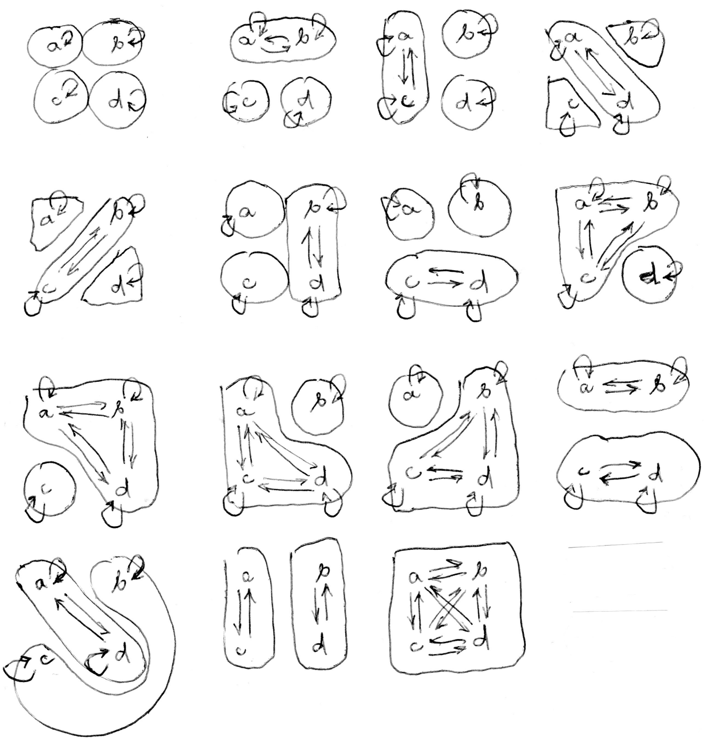
Ad cvičení 6.15. Viz odpovědi na otázky a výsledky na konci sbírky [17].

15.7 Výsledky ke kapitole 7.2 – ekvivalence a rozklady

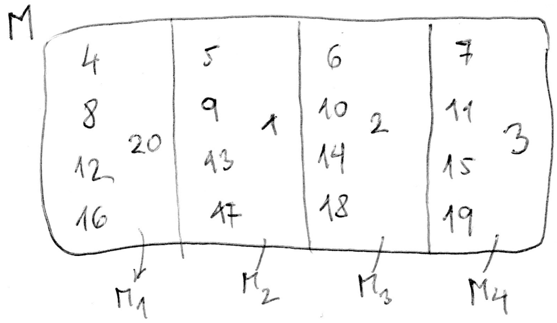
Ad Příklad 7.4. Relace jsou reprezentovány šipkovými grafy v obrázku množin:



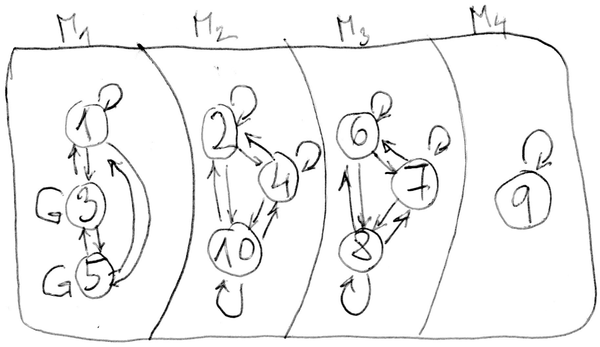
Ad Příklad 7.5. a) Možných rozkladů čtyřprvkové množiny na podmnožiny je patnáct. b) Relace ekvivalence je v každém množinovém rozkladu vyznačena soustavou šipek (šipkovým grafem). U ekvivalence určené rozkladem platí, že v relaci jsou všechny možné prvky v každé podmnožině rozkladu:



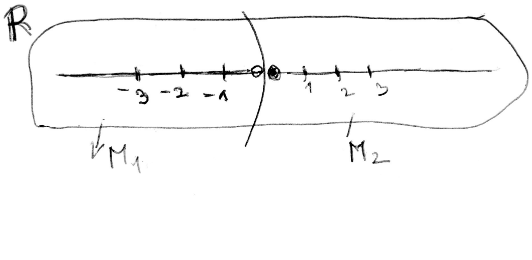
Ad cvičení 7.1. Faktormnožina má čtyři prvky – jsou jimi podmnožiny M_1, M_2, M_3, M_4, viz obrázek:



Ad cvičení 7.2. Relace ekvivalence je reprezentována šipkovým grafem. V relaci jsou všechny možné prvky v každé množině rozkladu:



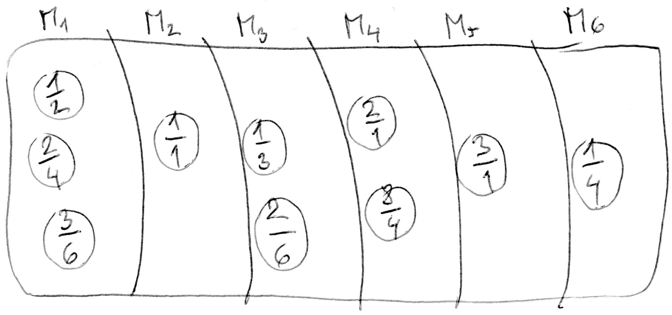
Ad cvičení 7.3. Rozkladu na dvě podmnožiny



Odpovídá relace ekvivalence na množině reálných čísel definovaná

$$\rho = \{[x; y] : \ (x < 0 \ \wedge \ y < 0) \ \vee \ (x \geq 0 \ \wedge \ y \geq 0)\}.$$

Ad cvičení 7.4. Ekvivalenci lze přirozeně definovat mezi těmi zlomky, které lze rozšířit či zkrátit jeden na druhý. Faktormnožina podle této ekvivalence má šest prvků – množiny M_1, M_2, ..., M_6. Viz obrázek:



Ad cvičení 7.5. Chceme rozdělit rozkladem reálná čísla na dvě podmnožiny – například na čísla záporná a čísla nezáporná. V každé podmnožině musí být v relaci ekvivalence každý prvek s každým prvkem. Tedy můžeme třeba i využít zkrácený zápis:

$$\rho = \{[x; y] \in R^2 \ : \ (x < 0 \ \wedge \ y < 0) \ \vee \ (x \geq 0 \ \wedge \ y \geq 0)\}.$$

Uvedené řešení je jedno z možných řešení – rozdělit množinu do dvou podmnožin lze provést mnoha způsoby (nekonečně mnoha způsoby).

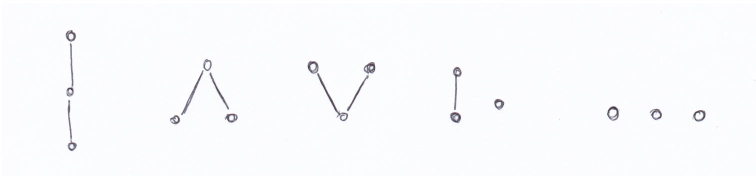
Ad cvičení 7.6. Výsledky viz sbírka [17], ke konci textu.

15.8 Výsledky ke kapitole 8.2 – Uspořádané množiny, maximální prvek, největší prvek a supremum

Ad Příklad 8.1: Relace je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní – takže je to podle definice, která bude následovat, uspořádání!!

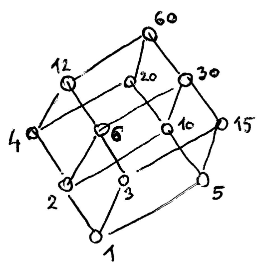
Ad Příklad 8.3: Daný Hasseův diagram je na obrázku 16 (b).

Ad Příklad 8.4: Neizomorfních posetů na tříprvkové množině je pět – viz obrázek 33:



Obrázek 33: Všechny navzájem různé (až na přeznačení prvků) tříprvkové posety.

Ad Příklad 8.7: Všech přirozených dělitelů čísla 60 je dvanáct, jejich uspořádání do posetu vytváří něco jako „dva kvádry nad sebou“, pokud je spojíme úhledně – viz obrázek:



Ad Příklad 8.9: ad a) $\sup\{a, d\} = c$, $\sup\{e, f\} = e$.
ad b) $\sup M$ neexistuje, protože množina horních závor $\{b, c, d\}$ nemá nejmenší prvek.

Ad cvičení 8.1: i)

$$\trianglelefteq_a = \{[1,1],[2,2],[3,3],[4,4],[1,2],[2,3],[1,3],[1,4],[4,3],[1,3]\};$$

$$\trianglelefteq_b = \{[1,1],[2,2],[3,3],[4,4],[3,4],[4,1],[3,1],[4,2],[3,2]\}.$$

ii)

$$\vartriangleleft_a = \{[1,2],[2,3],[1,3],[1,4],[4,3],[1,3]\};$$

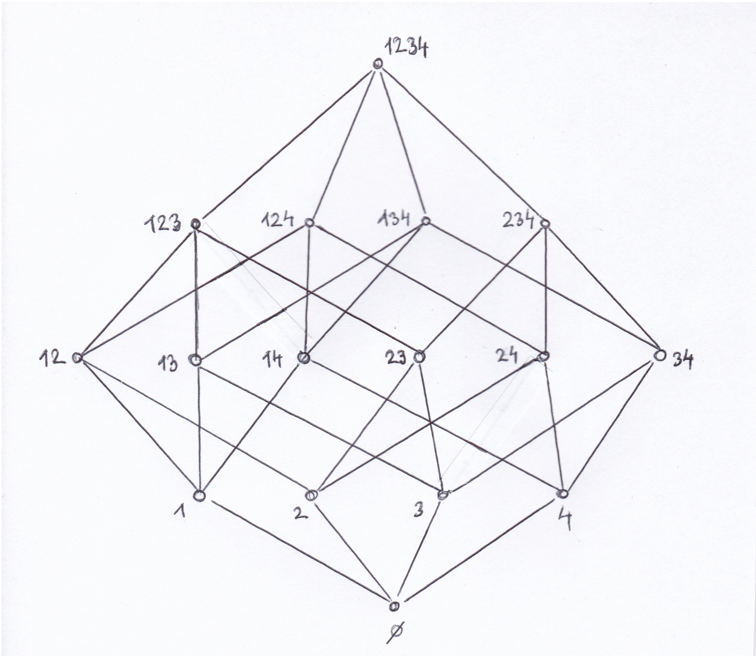
$$\vartriangleleft_b = \{[3,4],[4,1],[3,1],[4,2],[3,2]\}.$$

iii)

$$\prec_a = \{[1,2],[2,3],[1,4],[4,3]\};$$

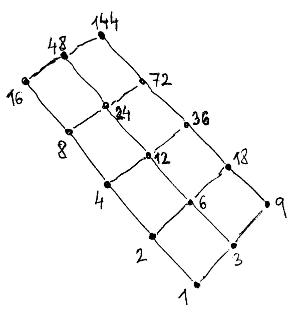
$$\prec_b = \{[3,4],[4,1],[4,2]\}.$$

Ad cvičení 8.2: Jedná se o poset zobrazený na titulní straně textu [14]: obrázek 34.

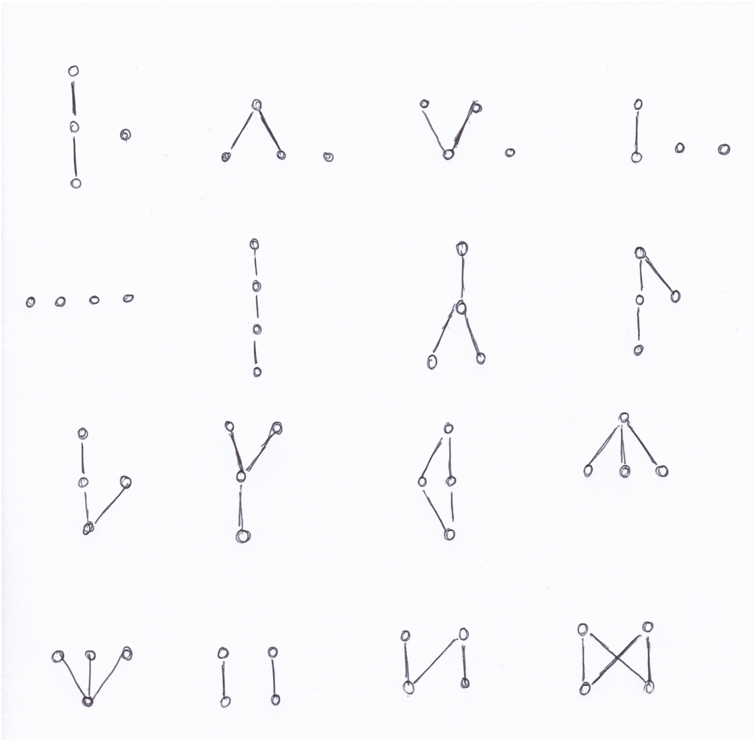


Obrázek 34: Poset $(2^P, \subseteq)$ pro $P = \{1, 2, 3, 4\}$.

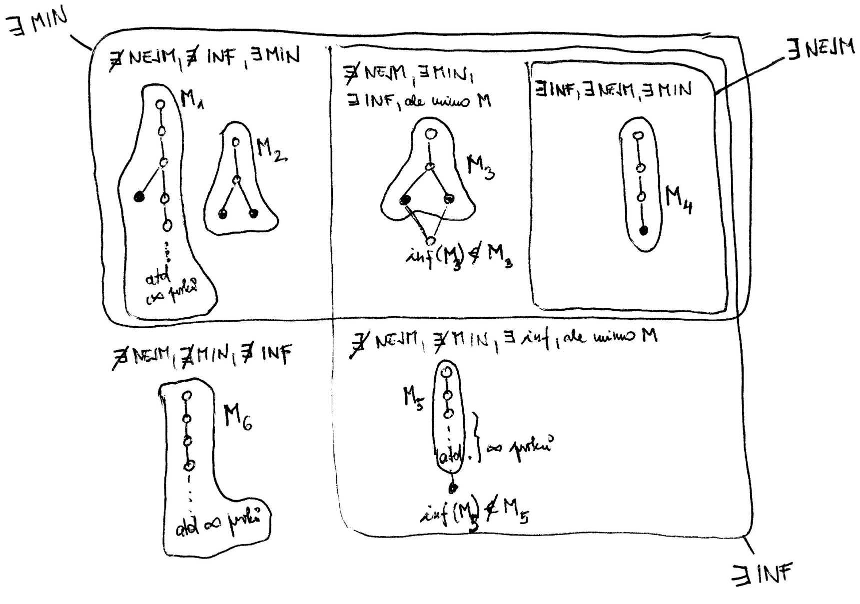
Ad cvičení 8.3.



Ad cvičení 8.4. Navzájem různých posetů (až na přeznačení prvků) na čtyřprvkové množině je šestnáct – viz obrázek:



Ad cvičení 8.5. Vzájemné souvislosti mezi minimálním prvkem, nejmenším prvkem a infimem jsou vymezeny na obrázku:



Z osmi variant kombinace prvků „MIN“, „NEJM“, „INF“, kdy dané prvky existují či neexistují, tři varianty vůbec nemohou nastat:

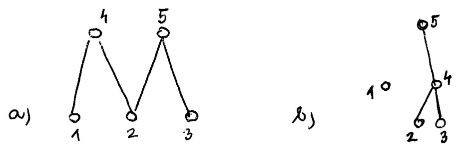
a) nenastane ∄ MIN, ∃ NEJM, ∃ INF;

b) nenastane ∃ MIN, ∃ NEJM, ∄ INF;

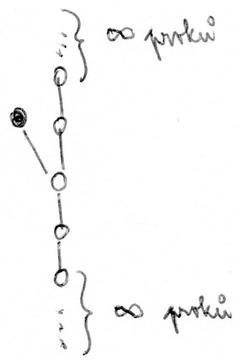
c) nenastane ∄ MIN, ∃ NEJM, ∄ INF.

Dalších pět kombinací by s trochou fantazie (viz obrázek) mohlo obsahovat posety daného typu.

Ad cvičení 8.6. Viz obrázek – dva možné příklady. Poset (b) má skutečně tři minimální a dva maximální prvky, protože nesrovnatelný prvek je jak prvkem maximálním, tak prvkem minimálním.

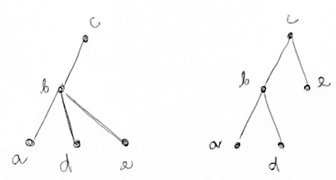


Ad cvičení 8.7. Viz obrázek:



Ad cvičení 8.8. Například oba posety ve cvičení 8.6 – třeba prvky 1, 2, 3 jsou navzájem nesrovnatelné, tj. žádný není menší nebo roven než ty druhé dva.

Ad cvičení 8.9. Oba posety na obrázku – prvky a, d, e jsou navzájem nesrovnatelné, žádný není menší nebo roven než ty další dva:



Ad cvičení 8.10.

a) $\ldots \forall x \in M : \ x \leq x_0$.

b) $\ldots \exists x \in M : \ (x > x_0 \ \vee \ x \not\leq x_0)$.

Ad cvičení 8.11.

ad a) Hasseův diagram je schéma, které zachycuje relaci uspořádání. Vztah $[x, y]$ relace je v něm zachycen tak, že existuje posloupnost bezprostředních předchůdců a následovníků, že

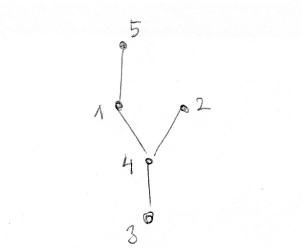
$$x \prec x_1 \prec x_2 \prec \cdots \prec y.$$

Přitom uspořádanost dvojice je zachycena tím, že první prvek ve dvojici je nakreslen níže než druhý prvek ... díky této úmluvě se šipky nekreslí, protože všechny by směřovaly směrem nahoru.

Zachycení vlastností uspořádání: (11) ... smyčky se nekreslí a rozumí se, že všechny prvky jsou v relaci se sebou automaticky;
anti-(12): nemohou být spojeny hranou dva prvky v diagramu vedle sebe – to by znamenalo, že jsou navzájem v relaci, a přitom jsou různé, tj. byla by porušena podmínka anti-(12);
(13): Pokud $a \trianglelefteq b \wedge b \trianglelefteq c$ tak se má za to, že automaticky platí $a \trianglelefteq c$, ovšem hrana $a \to c$ se nesmí kreslit. Jakmile jsou některé dva prvky spojeny řetězcem bezprostředních předchůdců a následovníků, jsou (v daném pořadí: nižší prvek s vyšším prvkem) v relaci, i když diagram je nespojuje hranou.

ad b) Tento diagram je téměř stejný jako ten ze cvičení 8.3, ovšem není v něm zakreslena horní řada prvků z 8.3, tj. čísla 16, 48, 144.

Ad cvičení 8.12. Ano, jedná se o poset, viz obrázek:



Ad cvičení 8.13.

a) Na posetu $(P, \trianglelefteq)$ uvažujme neprázdnou podmnožinu M. Číslo m je infimum množiny M v tomto posetu, když je největší dolní závorou množiny M.

b) Největší dolní závorou je největší společný dělitel daných čísel z množiny M, nejmenší horní závorou je nejmenší splečný násobek těchto čísel. Tedy $\inf\{8, 12, 30\} = 2$ a $\sup\{8, 12, 30\} = 120$.

Ad cvičení 8.14. Viz výsledky na konci textu [17].

15.9 Výsledky ke kapitole 9.2 – Zobrazení, funkce, posloupnost, operace

Ad cvičení 9.4. Viz obrázek v definici 52e).

Ad cvičení 9.5. Viz obrázek v definice 52d).

Ad cvičení 9.6. ad a) Viz definice 53; ad b) $g \circ f(x) = \sqrt{\sin x}$.

Ad cvičení 9.7. ad a) viz definice 52; ad b) $h \circ g \circ f(x) = \frac{1}{(2^x+1)^2}$.

Ad cvičení 9.8. Porovnejte své odpovědi s definicemi jednotlivých typů zobrazení. Zaměřte se také na to, zda každý příklad zobrazení je nebo není zobrazením více typů současně. Zdůvodněte proč se jedná o daný typ.

Ad cvičení 9.9. Definujeme příklad zobrazení $f : Z \to N$, které je injektivní, ale ne surjektivní. Řešení zde existuje celá řada, popišme jen jedno z nich (je výhodou si celou situaci kreslit):

- Nemá se jednat o surjekci, tak nechejme třeba čísla 1 a 2 neobsazená žádným vzorem.
- Nulu v Z zobrazíme například na trojku v N: $f(0) = 3$.
- Zdá se, že zobrazit dvě nekonečné množiny (množinu kladných celých čísel a množinu záporných celých čísel) na jednu nekonečnou množinu není možné, ale zobrazení je možné zkonstruovat díky paradoxům, které platí u nekonečných množin: množinu $\{4, 5, 6, \ldots\}$ lze totiž rozdělit na dvě nekonečné podmnožiny, například na podmnožinu jejích sudých čísel a podmnožinu jejích lichých čísel:

  $$\{4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots\} = \{4, 6, 8, \ldots\} \cup \{5, 7, 9, \ldots\}.$$

  To nám už napovídá, jakým způsobem definujeme hledané zobrazení f:

  - Kladná celá čísla zobrazíme injektivně na množinu $\{4, 6, 8, \ldots\}$: $f(1) = 4$, $f(2) = 6$, $f(3) = 8$, $f(4) = 10$, atd.
  - Záporná celá čísla zobrazíme injektivně na množinu $\{5, 7, 9, \ldots\}$: $f(-1) = 5$, $f(-2) = 7$, $f(-3) = 9$, $f(-4) = 11$, atd.

Zobrazení f jsme tedy zkonstruovali tak, že žádné dva obrazy nejsou stejné (tj. jedná se o injekci), a přitom čísla 1, 2 v množině N nejsou obsazena žádným vzorem (NEjedná se o surjekci).

Ad cvičení 9.10. Definujme příklad zobrazení $f : R \to Z$, které je surjektivní, ale ne injektivní. Řešení existuje celá řada, popíšeme jedno z nich (je výhodné si celou situaci kreslit):

- Má se jednat o surjekci, tak pokryjme nejprve celou množinu Z obrazy bodů z R – můžeme vzít třeba velmi jednoduchý předpis $f(k) = k$ pro všechna $k \in Z$. Už nyní víme, že f bude surjekce.

- Nyní zbývá dodefinovat zobrazení f pro ta reálná čísla, která nejsou celá. Musíme to ovšem udělat takovým způsobem, aby všechny obrazy byly celočíselné. Vezměme například $f(x) = k$ pro každé x z intervalu $(k; k+1)$.

Zobrazení f je definováno tak, že pro každé celočíselné k se celý interval $\langle k; k+1)$ zobrazí na celé číslo k. Jinými slovy, f není injekce, protože různá x z intervalu $\langle k; k+1$ se zobrazují na stejné celé číslo.

Ad cvičení 9.11. Definujme příklad zobrazení $f : N \to Z$, které je bijektivní.Řešení existuje celá řada, popíšeme jedno z nich (je výhodné si celou situaci kreslit):

- Nejprve pokryjeme nulu, například jedničkou: $f(1) = 0$.
- Dále pokryjme záporná čísla, kterých je nekonečně mnoho: pokryjeme je sudými přirozenými čísly, kterých je také nekonečně mnoho!!! $f(2) = -1$, $f(4) = -2$, $f(6) = -3$, $f(8) = -4$, atd. obecně $f(k) = -\frac{k}{2}$ pro sudá k.
- A zbývá pokrýt kladná celá čísla, kterých je také nekonečně mnoho. Nám ovšem ještě nekonečně mnoho neobsazených vzorů zbývá, tj. $f(3) = 1$, $f(5) = 2$, $f(7) = 3$, $f(9) = 4$, atd. obecně $f(l) = \frac{l-1}{2}$ pro lichá $l \geq 3$.

Takto definované zobrazení je konstruováno tak, aby pokrylo všechna celá čísla (tj. je surjekce), a současně $Df = N$ a f nenabývá dvou stejných hodnot (tj. je injekce). Dohromady je tedy bijekcí.

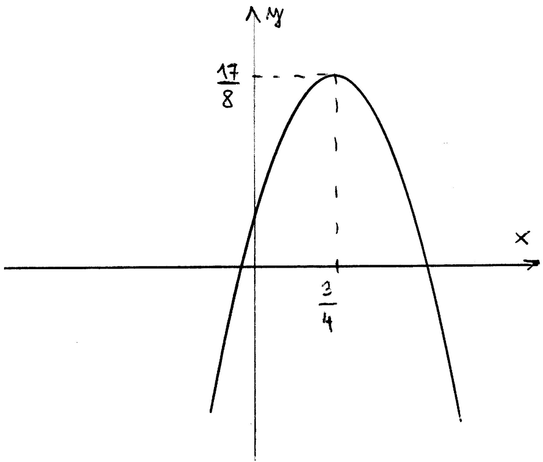
Ad cvičení 9.12. Výsledky na konci učebnic [8], [17]. V případě nejasného vysvětlení kontaktujte svého cvičícího.

15.10 Výsledky ke kapitole 10.2 – Lineární a kvadratické funkce

Ad cvičení 10.9. Při úpravě předpisu kvadratické funkce $y = -2x^2 + 3x + 1$ nejprve vytkneme -2, aby u člene x^2 v závorce byl koeficient 1, a pak vnitřek závorky doplníme na úplný čtverec (přičteme a odečteme číslo $\frac{9}{16}$, aby se výsledek nezměnil, ale mohli jsme pro první tři členy v závorce použít vzorec $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$):

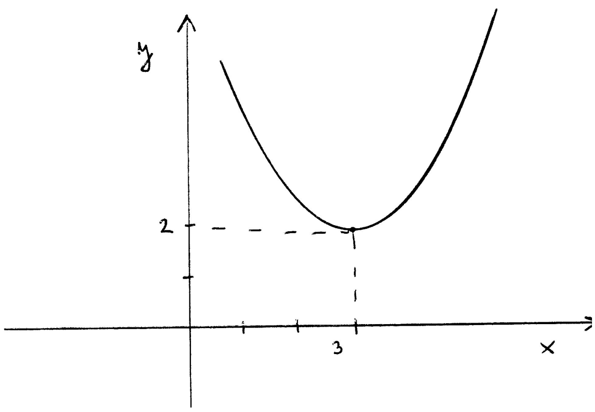
$$\begin{aligned} -2x^2 + 3x + 1 &= -2 \cdot (x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}) = -2 \cdot \left(\left[x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{3}{4} + \frac{9}{16} \right] - \frac{9}{16} - \frac{1}{2} \right) = \\ &= -2 \cdot \left(\left[x - \frac{3}{4} \right]^2 - \frac{17}{16} \right) = \underline{\underline{-2 \cdot \left(x - \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{17}{8}}}. \end{aligned}$$

Z upraveného tvaru je vidět: -2 znamená, že funkce bude nabývat neohraničeně záporných funkčních hodnot (tj. její graf parabola bude otočená směrem k minus nekonečnu na svislé ose), z dalších hodnot vyčteme, že vrchol paraboly nastává v bodě $\left[\frac{3}{4}; \frac{17}{8}\right]$.



Z grafu funkce vidíme, že $Df = R$, $Hf = (-\infty; \frac{17}{8}\rangle$.

Ad cvičení 10.10. Z vymezujících množin $Df = R$, $Hf = \langle 2; \infty)$ vidíme, že parabola bude tentokrát otočená k plus nekonečnu na svislé ose. Vrchol nastává pro $x = 3$, má tedy souřadnice $[3; 2]$.



Můžeme psát předpis ve tvaru

$$f(x) = (x-3)^2 + 2.$$

Tento vzorec není určen jednoznačně, protože v zadání úlohy není uvedeno, jak moc má být parabola sevřená-rozevřená kolem své osy. Koeficient před závorkou nemusí být roven jedné, ale jakékoli nenulové kladné reálné hodnotě. Předpisy $f(x) = 0{,}5 \cdot (x-3)^2 + 2$, $f(x) = 5 \cdot (x-3)^2 + 2$, atd. jsou všechny odpovědí na zadání úlohy. Možná bychom mohli psát $f(x) = a \cdot (x-3)^2 + 2$, kde $a \in R^+$.

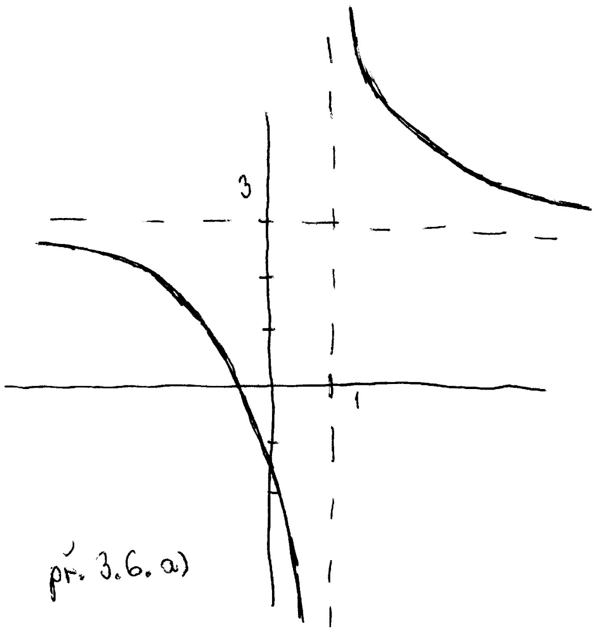
15.11 Výsledky ke kapitole 11.2 – Lineárně lomené funkce, funkce mocninné a odmocninné

Ad cvičení 11.4. Výsledky příkladů na lineárně lomenou funkci:

4a) Abychom získali základní tvar vyjádření funkce $f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$, provedeme dělení polynomů:

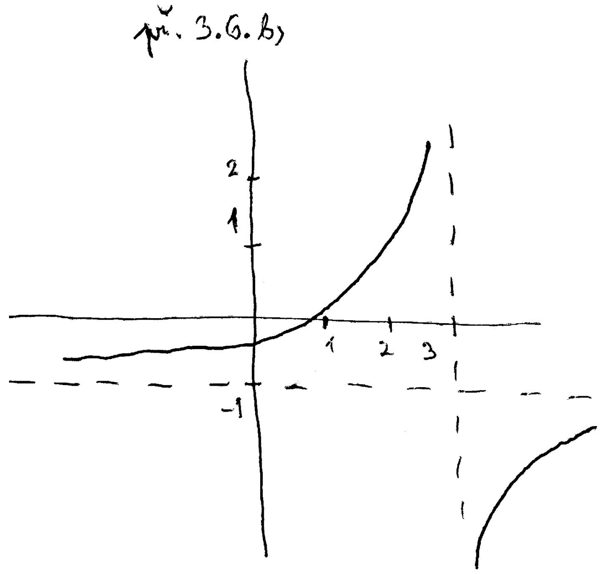
$$(3x+2) : (x-1) = 3 + \frac{5}{x-1}.$$

Odtud už je vidět, že svislá osa je posunuta do přímky $x = 1$ a vodorovná do přímky $y = 3$, a tedy můžeme kreslit posunutý graf:



Dále $Df = R - \{1\}$, $Hf = R - \{3\}$.

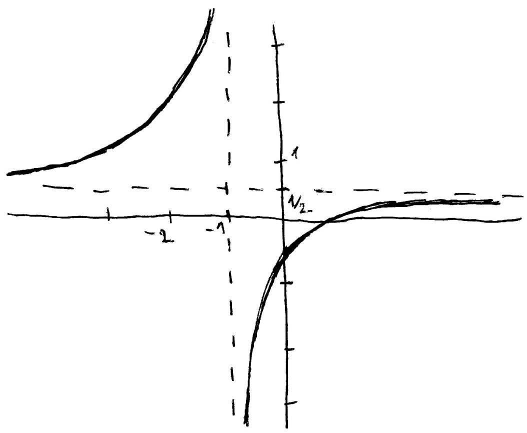
4b) Z $Df = R \setminus \{3\}$ plyne, že svislá osa je posunutá do přímky $x = 3$. Z $Hf = R \setminus \{-1\}$ plyne, že vodorovná osa je posunuta do přímky $y = -1$. Dále protože funkce je pro $x > 3$ rostoucí, její graf leží v posunutém druhém a čtvrtém kvadrantu, což lze zařídit znaménkem MINUS v čitateli zlomku ze základního tvaru. Tomu odpovídá např. funkce $f(x) = -1 - \frac{1}{x-3}$, nebo $f(x) = -1 - \frac{2}{x-3}$, zkrátka každá funkce typu $f(x) = -1 - \frac{a}{x-3}$, kde $a \in R^+$:



4c) Děláme podobně jako 4a): Provedeme dělení polynomů

$$(x-1):(2x+2)=\frac{1}{2}-\frac{2}{2x+2}.$$

Odtud už je vidět, že svislá osa je posunutá do přímky $x=-1$ (je to ta hodnota proměnné x, pro kterou $2x+2$ je rovno nule) a vodorovná osa je posunuta do přímky $y=\frac{1}{2}$. Graf kreslíme do druhého a čtvrtého posunutého kvadrantu, což plyne ze znaménka MINUS před zlomkem základního tvaru (to vlastně znamená, že -2 se nachází v čitateli zlomku):



Dále $Df=R-\{-1\}$, $Hf=R-\{\frac{1}{2}\}$.

Ad cvičení 11.10. Jedná se o podobnou funkci jako je $y=\frac{1}{x^2}=x^{-2}$ na zúženém definičním oboru, jenže graf zadané funkce je oproti této funkci posunutý o dvě jednotky doprava a tři jednotky nahoru.

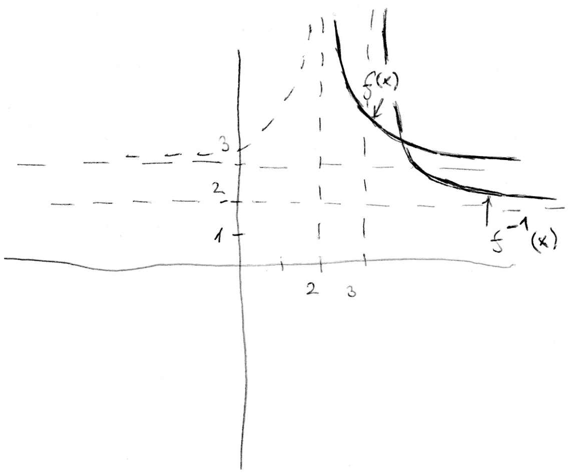
ad 10a) Graf funkce $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}+3$ pro $x\in(2;\infty)$: viz obrázek níže.

ad 10b) Nejprve zaměníme x a y ve vzorci: $x = \frac{1}{(y-2)^2} + 3$, a pak z něj vyjádříme y:

$$y = \frac{\pm 1}{\sqrt{x-3}} + 2.$$

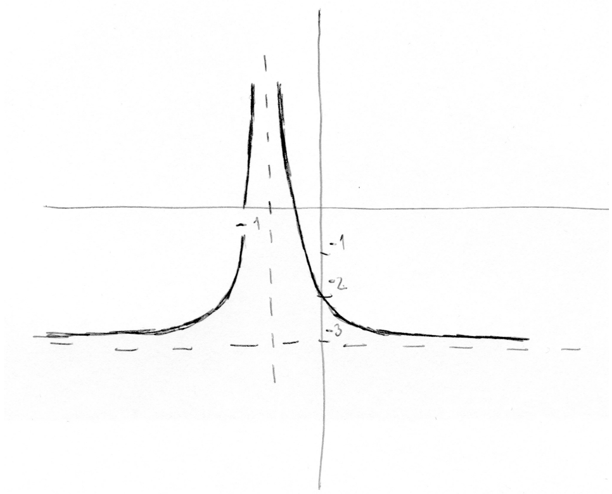
Zůstává otázkou, jaké znaménko zvolit na místě $\pm$. Pomůže nám, že definiční obor funkce $f(x)$ obsahoval pouze kladná čísla (větší než 2) – tj. obor hodnot Hf^{-1} bude také obsahovat pouze kladná čísla (větší než 2). Tj. v čitateli zlomku volíme znaménko PLUS a hledaná funkce je tvaru $f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}} + 2$.

Grafy obou funkcí viz obrázek:



Cvičení 11.11.

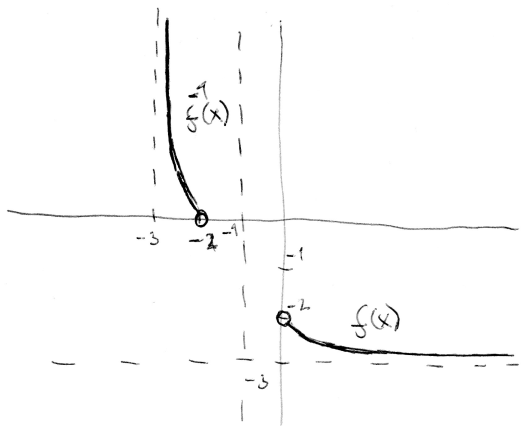
11a) $Df = R - \{-1\}$, $Hf = R - \{-3\}$, graf funkce viz obrázek:



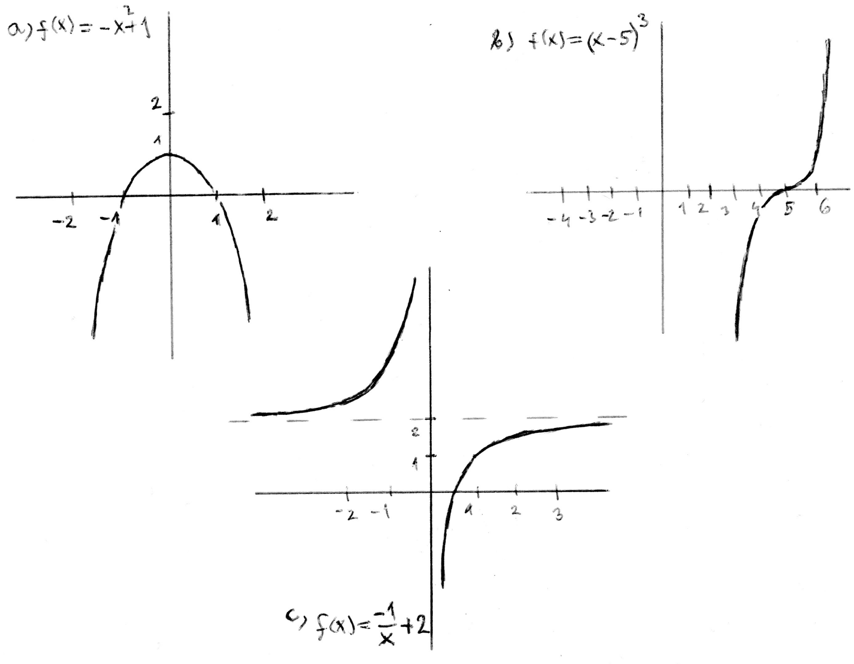
11b) Nejprve zaměníme x a y ve vzorci: $x = \frac{1}{(y+1)^2} - 3$, a pak z něj vyjádříme y:

$$y = \frac{\pm 1}{\sqrt{x+3}} - 1.$$

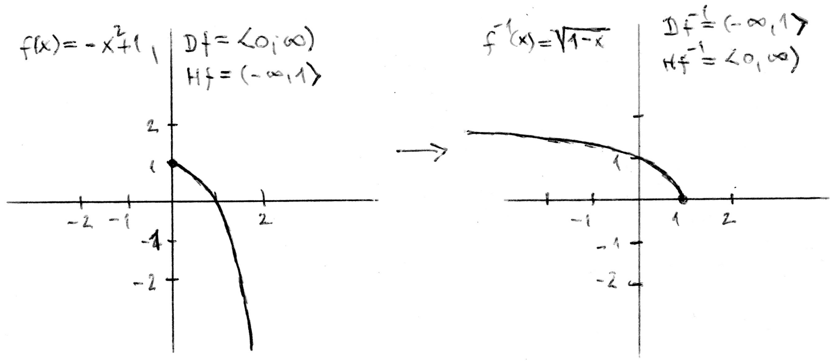
Zůstává otázkou, jaké znaménko zvolit na místě $\pm$. Pomůže nám, že definiční obor funkce $f(x)$ obsahoval pouze kladná čísla – tj. obor hodnot Hf^{-1} bude také obsahovat pouze kladná čísla. Tj. v čitateli zlomku volíme znaménko PLUS a hledaná funkce je tvaru $f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x+3}} - 1$. Graf obou funkcí viz obrázek:



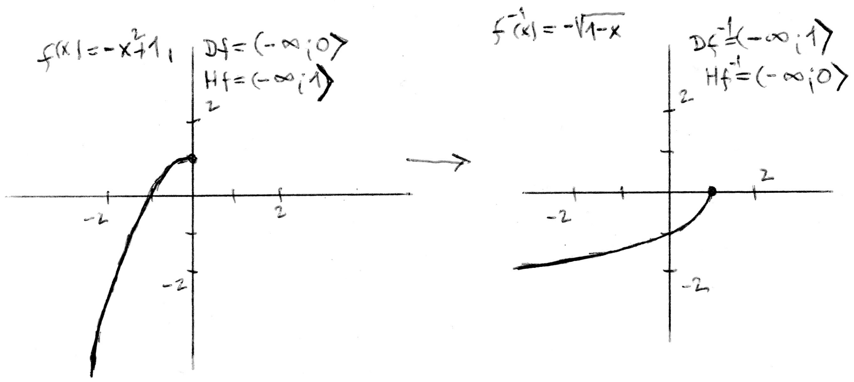
Ad cvičení 11.12. Grafy funkcí a) $f(x) = -x^2+1$, b) $f(x) = (x-5)^3$, c) $f(x) = \frac{-1}{x}+2$ jsou na obrázku:



ad a) $D(f) = R$, $H(f) = (-\infty; 1\rangle$ a příslušná inverzní funkce f^{-1} neexistuje, protože funkce f není prostá. Eventuálně bychom se mohli se zadáním funkce omezit na nezáporná x, na tomto zúženém intervalu už funkce f prostá je a inverzi najdeme včetně grafu:

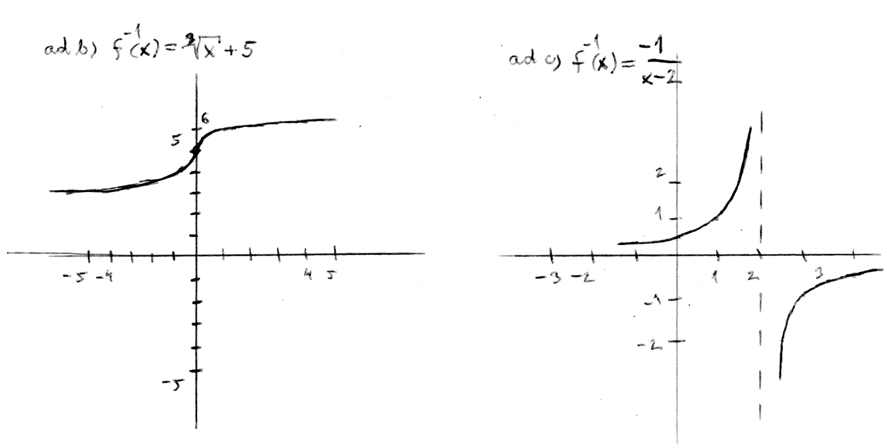


Nebo se můžeme omezit na nekladná x – pro takto zúžený definiční obor také inverzní funkce existuje, viz grafy:

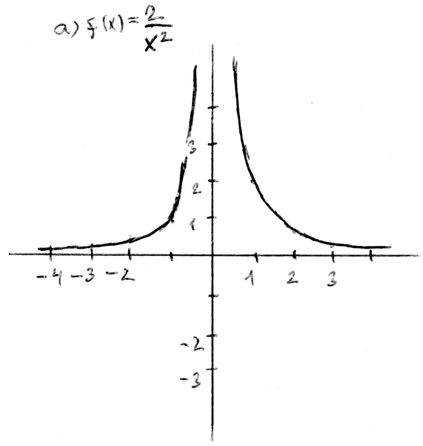


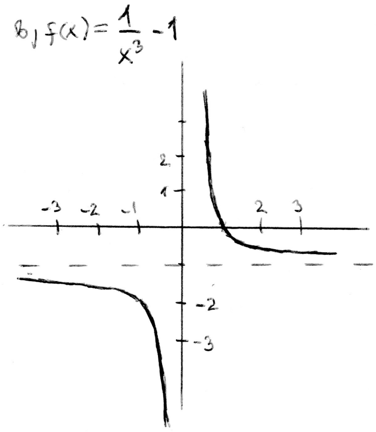
ad b) $D(f) = R$, $H(f) = R$ a inverze existuje, protože f je funkce prostá – viz obrázek níže.

ad c) $D(f) = R - \{0\}$, $H(f) = R - \{2\}$ a inverze existuje, protože f je funkce prostá – viz obrázek:

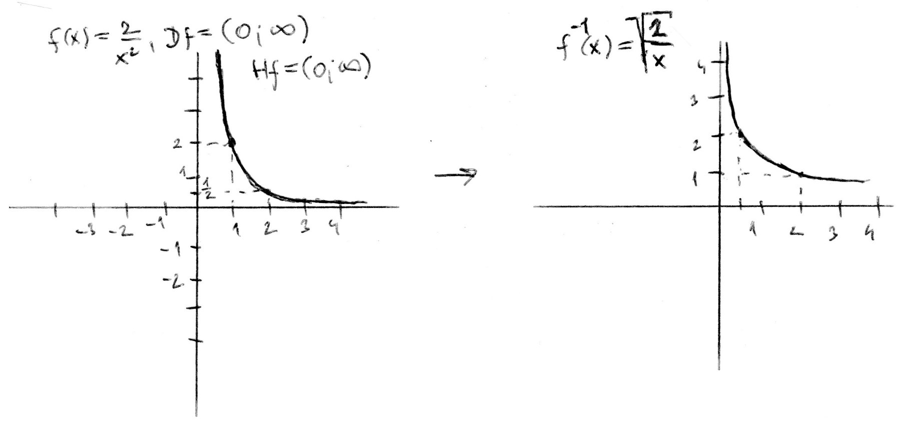


Ad cvičení 11.13. Grafy funkcí a) $f(x) = 2x^{-2}$, b) $f(x) = x^{-3} - 1$ jsou na obrázku:

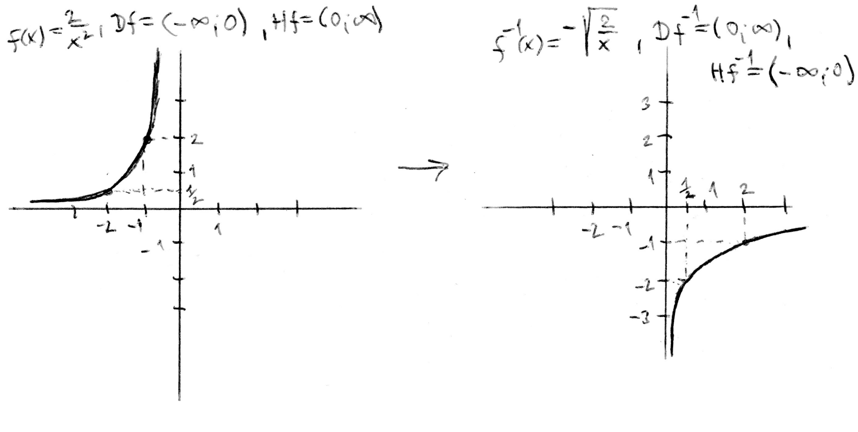




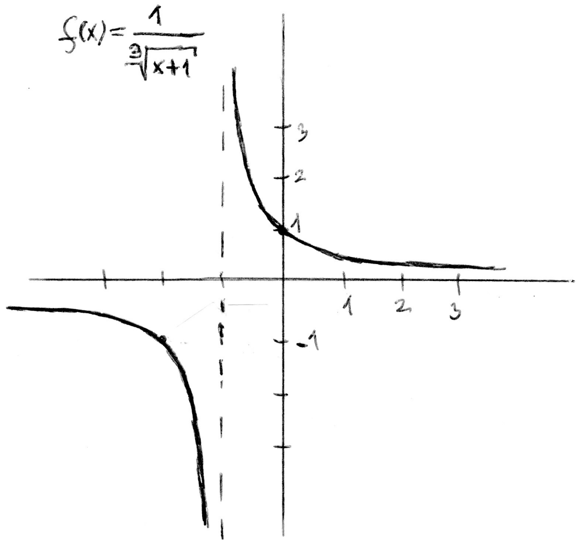
ad a) $D(f) = R - \{0\}$, $H(f) = \langle 0; \infty)$ a příslušná inverzní funkce f^{-1} neexistuje, protože funkce f není prostá. Eventuálně bychom se mohli se zadáním funkce omezit na kladná x, na tomto zúženém intervalu už funkce f prostá je a inverzi najdeme včetně grafu:



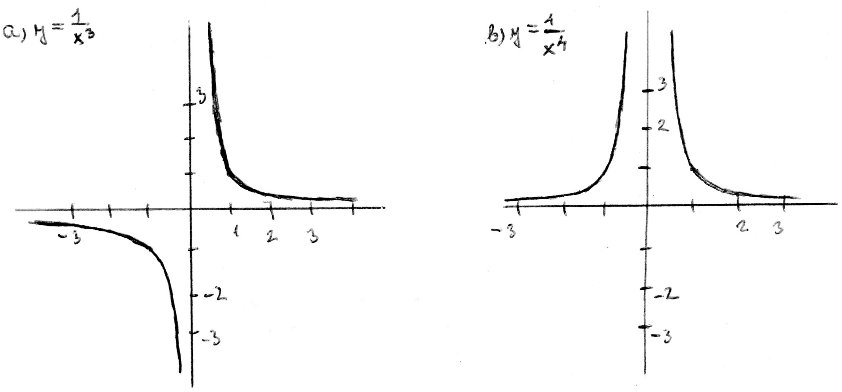
Nebo se můžeme omezit na záporná x – pro takto zúžený definiční obor také inverzní funkce existuje, viz grafy:



ad b) $D(f) = R - \{0\}$, $H(f) = R - \{-1\}$ a inverze existuje, protože f je funkce prostá – viz obrázek:



Ad cvičení 11.14. Grafy funkcí a) $y = x^{-3}$, b) $y = x^{-4}$ jsou na obrázku:



ad a) Na intervalu $(-\infty; 0)$ funkce f nemá minimum, protože není zdola ohraničená. Platí totiž

$$\lim_{x \to 0_-} \frac{1}{x^3} = -\infty$$

(čteme: limita z funkce $\frac{1}{x^3}$ pro x blížící se k nule zleva se rovná minus nekonečnu). Na intervalu $(0; \infty)$ ovšem minimum také neexistuje – funkční hodnoty pro x jdoucí k nekonečnu se sice limitně blíží k nule, tj.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^3} = 0,$$

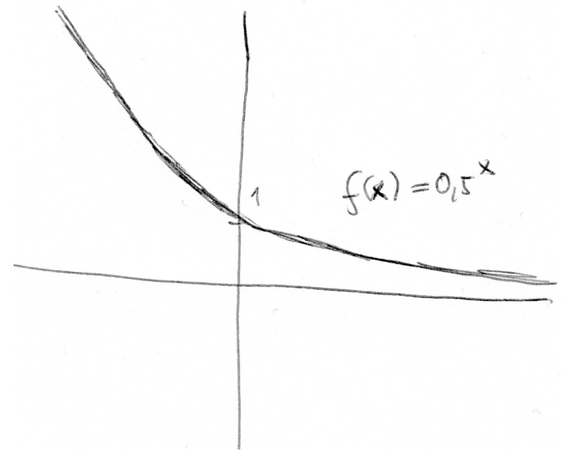
ovšem funkce f této funkční hodnoty nenabývá v žádném konečném bodě. Použitím terminologie z kapitoly 8 říkáme, že množina funkčních hodnot funkce f má pro x z intervalu $(0; \infty)$ infimum (rovné nule), nikoli minimum.

ad b) Funkce $f(x) = \frac{1}{x^4}$ nemá v žádném bodě svého definičního oboru minimum – pouze je množina $H(f)$ ohraničená a má infimum, ale minimum funkce f neexistuje v žádném bodě definičního oboru.

15.12 Výsledky ke kapitole 12.2 – Funkce exponenciální a logaritmické

Ad cvičení 12.1.

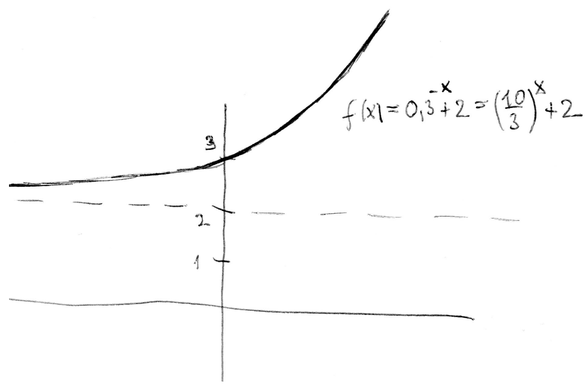
a) $Df = R$, $Hf = R+$, graf viz obrázek:



b) Nejprve zaměníme x a y, dostaneme $x = 0{,}5^y$. Nyní z tohoto vztahu vyjádříme y, přitom máme na paměti, že inverzní funkce k mocninné funkce je funkce logaritmická, jejíž základem je číslo, které bylo v exponenciální funkci umocněno na mocninu x, dostaneme tedy: $y = \log_{0,5} x$.

Ad cvičení 12.2.

a) Nehezkou zápornou mocninu upravíme: $f(x) = 0{,}3^{-x} + 2 = \left(\frac{3}{10}\right)^{-x} + 2 = \left(\frac{10}{3}\right)^{x} + 2$. Vidíme, že $Df = R$ a $Hf = (2; \infty)$ a funkce je rostoucí, protože základ exponentu je $\frac{10}{3}$, což je číslo větší než 1:

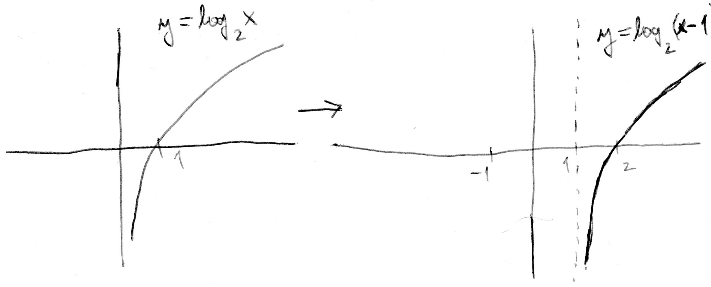


b) Nejprve zaměníme y a x, dostaneme $x = (\frac{10}{3})^y + 2$. Odtud vyjádříme y:

$$f^{-1}(x) = y = \log_{\frac{10}{3}}(x - 2).$$

Ad cvičení 12.3.

a) $Df = (1; \infty)$ ... kdo si není jistý, řeší nerovnici $x - 1 > 0$, tj. argument funkce logaritmické musí být kladný. Dále $Hf = R$. Graf funkce je posunutý o hodnotu 1 doprava vzhledem k základnímu grafu $y = log_2 x$:



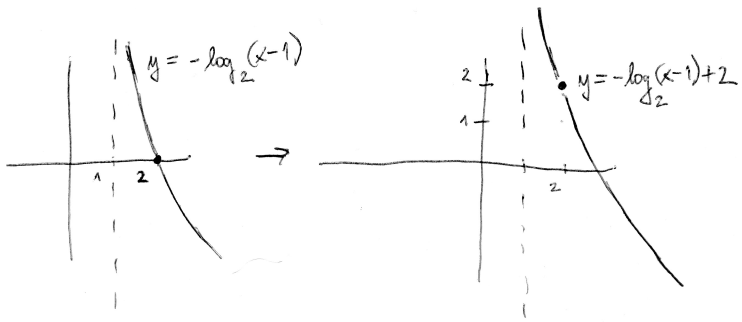
b) Rovnici $\ln y = x^2 + 2$ lze převést na ekvivalentní rovnici

$$e^{\ln y} = e^{x^2+2}.$$

Na levé straně této rovnice jsou funkce navzájem inverzní, tj. obě se vyruší a dostaneme $y = e^{x^2+2}$.

Ad cvičení 12.4.

a) Vyjdeme z grafu funkce af funkce $y = \log_2(x - 1)$, který je výsledkem cvičení 12.3.(a). Nejprve k funkci ze cvičení 12.3.(a) přidáme znaménko MINUS – tím dojde k překlopení celého grafu vzhledem k vodorovné souřadné ose x. A nakonec k výsledku přičteme hodnotu 2, což odpovídá posunu celého grafu v kladném směru osy y:



Posun grafu o hodnotu 2 nezměnil ani Dy, ani Hy funkce z předchozího kroku, pouze se bod $[2; 0]$ (průsečík grafu s osou x) posunul do bodu $[2; 2]$. Celkem vidíme u výsledné funkce, že $Df = (1; \infty)$, $Hf = R$.

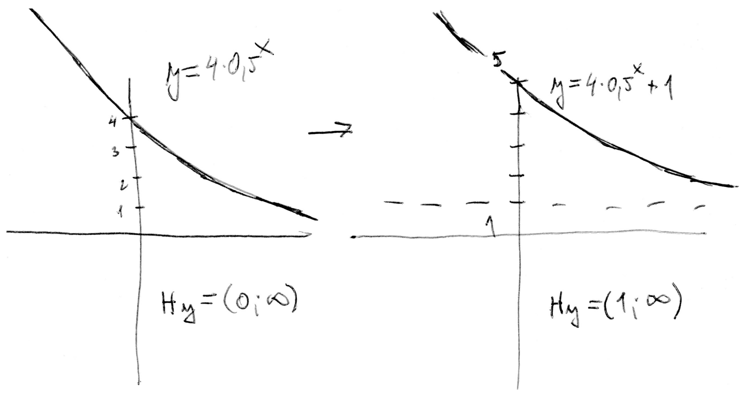
b) Nejprve zaměníme x, y a dostaneme $x = -\log_2(y-1)+2$. Odtud vyjádříme proměnnou y: před umístěním obou stran rovnice do mocniny čísla 2, které je základem logaritmu v našem příkladu, rovnici upravíme do takového tvaru, že logaritmus je na jedné straně s koeficientem 1, vše ostatní je na druhé straně rovnice:

$$\log_2(y - 1) = 2 - x.$$

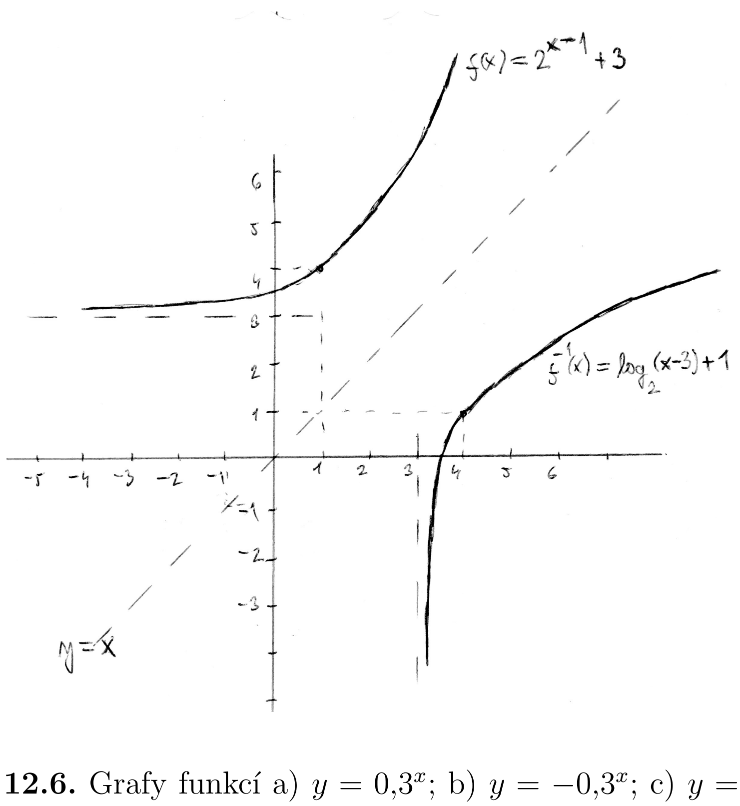
Nyní obě strany rovnice napíšeme do exponentu základu 2 – díky „zametení smetí" před logaritmem na levé straně se exponenciální funkce a logaritmus o stejném základu vyruší, tj. dostaneme

$$2^{\log_2(y-1)} = 2^{2-x} \;\Rightarrow\; y-1 = 2^{2-x} = 2^2 \cdot 2^{-x} = 4 \cdot 0{,}5^x \;\Rightarrow\; \underline{\underline{y = 4 \cdot 0{,}5^x + 1}}.$$

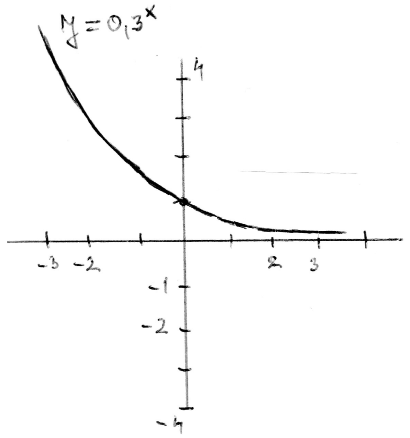
Můžeme vesele kreslit graf exponenciální funkce:

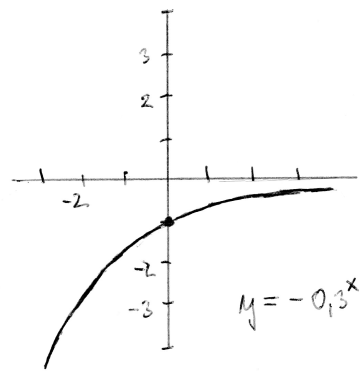


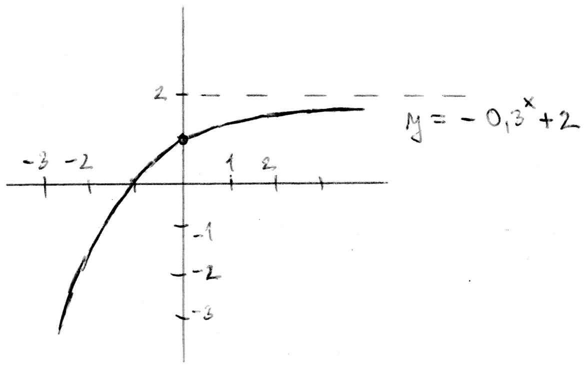
Ad cvičení 12.5. K funkci $f(x) = 2^{x-1} + 3$ existuje funkce inverzní, jejíž předpis má tvar $f^{-1}(x) = \log_2(x-3) + 1$. $D(f) = R$, $H(f) = (3;\infty)$, $D(f^{-1}) = (3;\infty)$, $H(f^{-1}) = R$. Oba grafy vidíte na obrázku osově souměrné vzhldem k přímce $y = x$, která představuje záměnu proměnných při vyjádření závislosti v inverzním směru:



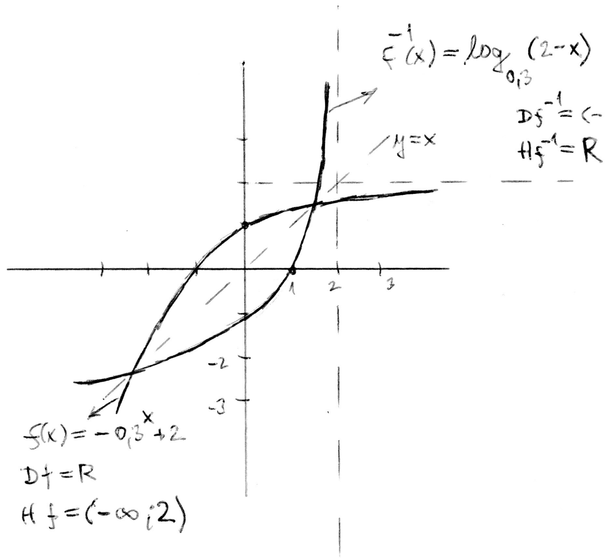
Ad cvičení 12.6. Grafy funkcí a) $y = 0{,}3^x$; b) $y = -0{,}3^x$; c) $y = 2 - 0{,}3^x$ vidíte na obrázku:







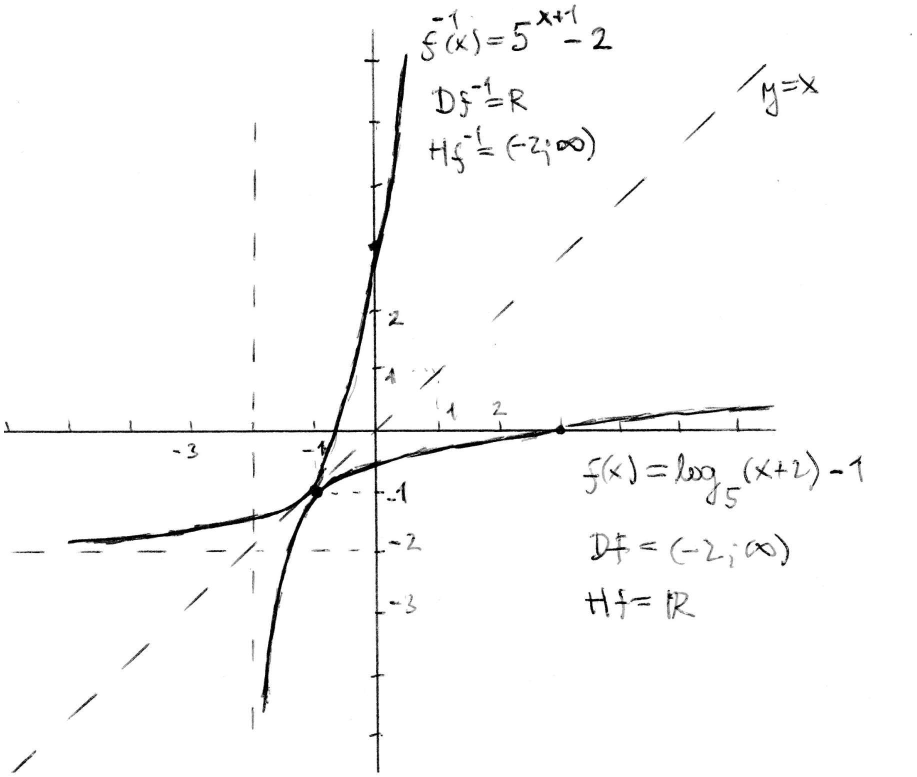
k poslední uvedené funkci je na následujícím obrázku nakreslena i funkce inverzní:



Ad cvičení 12.7. K funkci $f(x) = 2 \cdot \log_4 x - 1$ má inverzní funkce předpis $f^{-1}(x) = 4^{\frac{x+1}{2}}$. Pokud si ještě vyjádříme 4 jako 2^2, lze vzorec upravit na tvar

$$f^{-1}(x) = 2^{2 \cdot (\frac{x}{2} + \frac{1}{2})} = 2^{x+1}.$$

Ad cvičení 12.8. K funkci $f(x) = \log_5(x + 2) - 1$ existuje funkce inverzní zadaná předpisem $f^{-1}(x) = 5^{x+1} - 2$. Oba grafy vidíte na obrázku:



Je patrné, že $D(f) = (-2; \infty)$, $H(f) = R$, $D(f^{-1}) = R$, $H(f^{-1}) = (-2; \infty)$.

15.13 Výsledky ke kapitole 13.2 – Funkce goniometrické a cyklometrické

Ad cvičení 13.1. až 13.5. Výsledky příkladů najdete v učebnici [10].

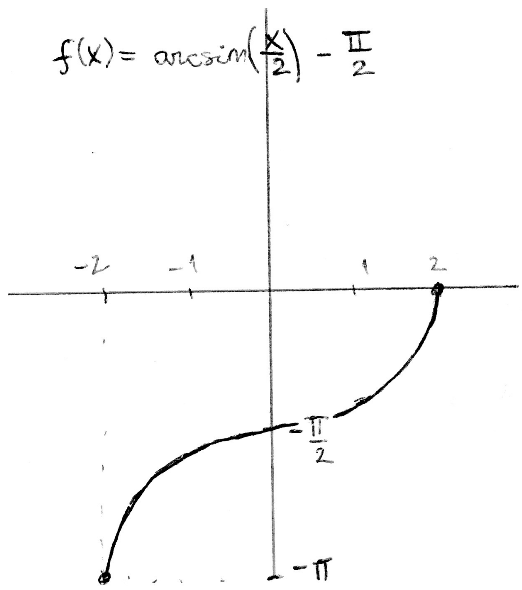
Cvičení 13.6. Grafy a vlastnosti cyklometrických funkcí:

1. Graf funkce $f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\pi}{2}$:

   - Vyjdeme z $D(\arcsin x) = \langle -1; 1\rangle$, $H(\arcsin x) = \langle \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle$: Argument funkce arcsin musí ležet v tomtéž intervalu $\langle -1; 1\rangle$:

   $$-1 \leq \frac{x}{2} \leq 1 \;\Rightarrow\; -2 \leq x \leq 2 \;\Rightarrow\; D(f) = \langle -2; 2\rangle.$$

   - $H(f)$ dostaneme tak, že $H(\arcsin x) = \langle \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\rangle$ posuneme o hodnotu $\frac{\pi}{2}$ do „záporného směru“: $H(f) = \langle -\pi; 0\rangle$.
   - Ještě si můžeme uvědomit, že funkce arcus sinus je rostoucí (pokud v argumentu není minus před x, protože to by způsobilo zase nějaké změny);
   - Vyznačíme do grafu funkční hodnoty v krajních bodech definičního oboru: $f(-2) = -\pi$, $f(2) = 0$ a můžeme kreslit graf:

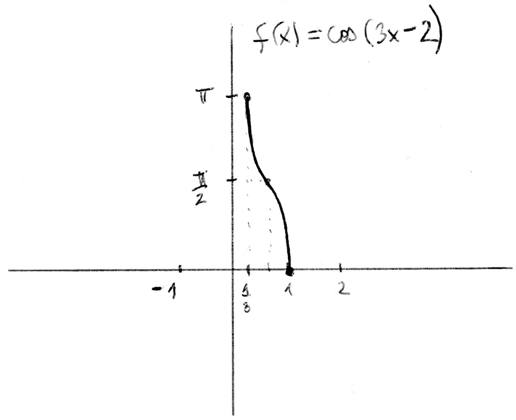
   Vlastnosti funkce $f(x)$: Funkce je rostoucí na celém $D(f)$, lokální i globální minumum nastává v bodě $x = -2$, lokální a globální maximum nastává v bodě $x = 2$.

2. Graf funkce $f(x) = \arccos(3x - 2)$:

   - Vyjdeme z $D(\arccos x) = \langle -1; 1\rangle$, $H(\arccos x) = \langle 0; \pi\rangle$: Argument funkce arccos musí ležet v tomtéž intervalu $\langle -1; 1\rangle$:

   $$-1 \leq 3x - 2 \leq 1 \;\Rightarrow\; 1 \leq 3x \leq 3 \;\Rightarrow\; \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \;\Rightarrow\; D(f) = \langle \frac{1}{3}; 1\rangle.$$

- $H(f)$ se nemění, protože po vypočtení arkus kosinu argumentu už dále k této hodotě nic nepřičítáme, ani ji ničím nenásobíme, tj. $H(f) = \langle 0; \pi \rangle$.
- Ještě si můžeme uvědomit, že funkce arcus cosinus je klesající (pokud v argumentu není minus před x, protože to by způsobilo zase nějaké změny);
- Vyznačíme do grafu funkční hodnoty v krajních bodech definičního oboru: $f(\frac{1}{3}) = \pi$, $f(1) = 0$ a můžeme kreslit graf:



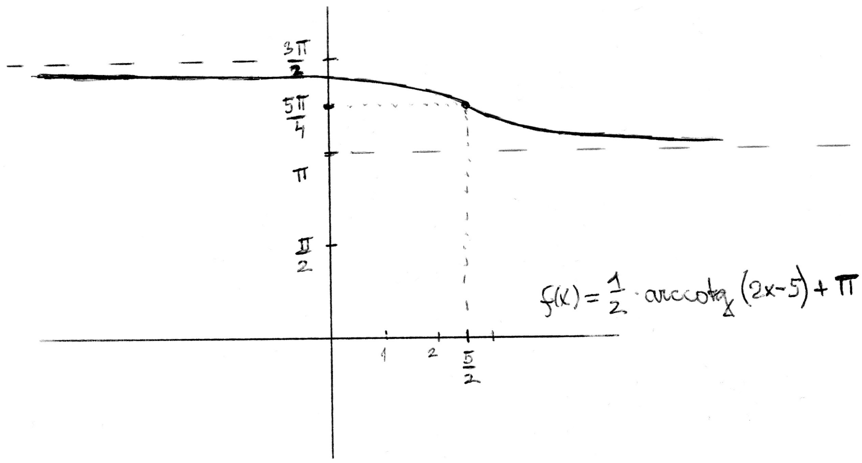
Vlastnosti funkce $f(x)$: Funkce je klesající na celém $D(f)$, lokální i globální minumum nastává v bodě $x = 1$, lokální a globální maximum nastává v bodě $x = \frac{1}{3}$.

3. Graf funkce $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arccotg}(2x - 5) + \pi$:

- Vyjdeme z $D(\operatorname{arccotg} x) = R$, $H(\arccos x) = (0; \pi)$: Argument funkce arccotg může být libovolný, tj. $D(f) = R$. Maximálně bychom si mohli říci, kam se posune základní bod $[0; \frac{\pi}{2}]$ průsečíku grafu funkce arccotg x se svislou osou: tento jakýsi střed souměrnosti grafu se posune do takového bodu, ve kterém platí $2x - 5 = 0$, tj. $x = \frac{5}{2}$.
- $H(f)$ se změní dvěma zásahy: nejprve se násobením jednou polovinou interval $H(\operatorname{arccotg} x) = \langle 0; \pi \rangle$ zmenší na $(0; \frac{\pi}{2})$, a pak se po přičtení čísla π posune na $H(f) = (\pi; \frac{3\pi}{2})$. Odtud lze určit, že střed souuměrnosti grafu bude mít y-ovou souřadnici ve středu intervalu $H(f)$, tj. pro

$$y = \frac{1}{2}(\pi + \frac{3\pi}{2}) = \frac{5\pi}{4}$$

- Ještě si můžeme uvědomit, že funkce arcus cotangens je klesající (pokud v argumentu není minus před x, protože to by způsobilo zase nějaké změny);
- Vyznačíme do grafu střed souměrnosti grafu $[\frac{5}{2}; \frac{5\pi}{4}]$, a také asymptoty v krajních bodech intervalu $H(f)$ – jedná se o konstantní funkce $y = \pi$ a $y = \frac{3\pi}{2}$ – a můžeme kreslit graf:



Vlastnosti funkce $f(x)$: Funkce je klesající v R a nemá lokální ani globální extrémy – můžeme maximálně říci, že je ohraničená shora i zdola.

Ad cvičení 13.7. a 13.8. Výsledky příkladů najdete v učebnici [10].

15.14 Výsledky ke kapitole 14.2 – Vlastnosti funkce – shrnutí

Ad cvičení 14.7. Definice v těchto odpovědích nemusí být zcela totožné s definicemi v textu.

ad a) Relace f je zobrazení z X do Y, když ...

$$\forall x \in X \ \exists \ \text{ nejvýše jedno } y \in Y \ : \ [x; y] \in f.$$

ad b) Relace f není zobrazení z X do Y, když ...

$$\exists x \in X, y, z \in Y \ : \ [x; y] \in f \ \wedge \ [x; z] \in f \ \wedge \ y \neq z.$$

ad c) Funkce f je rostoucí na intervalu I, když ...

$$\forall x_1, x_2 \in I \ : \ x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) < f(x_2).$$

ad d) Funkce f není rostoucí na intervalu I, když ...

$$\exists x_1, x_2 \in I \ : x_1 < x_2 \ \wedge \ f(x_1) \geq f(x_2).$$

ad e) Funkce f je klesající na intervalu I, když ...

$$\forall x_1, x_2 \in I \ : \ x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) > f(x_2).$$

ad f) Funkce f není klesající na intervalu I, když ...

$$\exists x_1, x_2 \in I \ : x_1 < x_2 \ \wedge \ f(x_1) \leq f(x_2).$$

ad g) Reálné číslo x_0 je lokální minimum funkce f, když ...

$$\exists (a; b) \subseteq D(f) : x_0 \in (a; b) \ \wedge \ f(x_0) \leq f(x) \forall x \in (a; b).$$

ad h) Reálné číslo x_0 není lokální minimum funkce f, když ...

$$\forall ((a; b) \subseteq D(f) : x_0 \in (a; b)) \exists x_1 \in (a; b) \ : \ f(x_0) > f(x_1)$$

(slovně: x_0 není lokálním minimem funkce f, když pro jakýkoli interval $(a; b)$, který obsahuje bod x_0, leží v tomto intervalu nějaký bod x_1 s nižší funkční hodnotou $f(x_1) < f(x_0)$).

ad i) Reálné číslo x_0 je lokální maximum funkce f, když ...

$$\exists (a; b) \subseteq D(f) : x_0 \in (a; b) \ \wedge \ f(x_0) \geq f(x) \forall x \in (a; b).$$

ad j) Reálné číslo x_0 není lokální maximum funkce f, když ...

$$\forall ((a; b) \subseteq D(f) : x_0 \in (a; b)) \exists x_1 \in (a; b) \ : \ f(x_0) < f(x_1)$$

(slovně: x_0 není lokálním maximem funkce f, když pro jakýkoli interval $(a; b)$, který obsahuje bod x_0, leží v tomto intervalu nějaký bod x_1 s vyšší funkční hodnotou $f(x_1) > f(x_0)$).

ad k) Funkce f je sudá, když ...

$$\forall x \in D(f) \ : \ (-x) \in D(f) \ \wedge \ f(-x) = f(x).$$

ad l) Funkce f není sudá, když ...

$$\exists x \in D(f) \ : \ (-x) \notin D(f) \ \vee \ ((-x) \in D(f) \ \wedge \ f(-x) \neq f(x).$$

ad m) Funkce f je lichá, když ...

$$\forall x \in D(f) \ : \ (-x) \in D(f) \ \wedge \ f(-x) = -f(x).$$

ad n) Funkce f není lichá, když ...

$$\exists x \in D(f) \ : \ (-x) \notin D(f) \ \vee \ ((-x) \in D(f) \ \wedge \ f(-x) \neq -f(x).$$

ad o) Funkce f je shora ohraničená, když ...

$$\exists \, L \in R \ : \ \forall x \in D(f) : \ f(x) \leq L.$$

ad p) Funkce f není shora ohraničená, když ...

$$\forall L \in R \, \exists \, x \in D(f) \ : \ f(x) > L$$

(slovně: funkce f přesáhne v některém bodě jakoukoli konstantu L, ať je jakkoli velká).

Cvičení 14.8. Příklady sudé funkce: $f(x) = \cos x$, $f(x) = x^2$.

Cvičení 14.9. Příklady liché funkce: $f(x) = \sin x$, $f(x) = \text{tg } x$, $f(x) = \text{cotg } x$, $f(x) = x^3$.

Seznam literatury:

1 P. Horák: M 1125 Základy matematiky. Elektronický text do analogického předmětu na Přírodovědecké fakultě MU Brno. Počet stran 100 v roce 2013. Tento text pokrývá předmět M0001 Základy matematiky na Pedagogické fakultě asi z poloviny, ale i daná polovina se věnuje záležitostem odlišným od těch, na které je kladen důraz na Pedagogické fakultě.

2 Rediger Thiele: Matematické důkazy. SNTL Praha 1985. Počet stran 160. Představení zákonitostí logického usuzování a dokazování v matematice. Poněkud širší pokrytí tématu logika, kterému jsou v předmětu Základy matematiky věnovány první tři přednášky.

3 Raymond Smullyan: Jak se jmenuje tahle knížka? Zajímavé logické problémy od jednoduchých hádanek pro ZŠ až po složitější logické úlohy, které vyžadují důkladný vysokoškolský rozbor.

4 D.Jordan, P.Smith: Mathematical techniques. Oxford 2008, 4th Edition. V kontextu předmětu Základy matematiky nás z knihy zajímá zatím jen kapitolka 35 – sets (= množiny) na str. 791-800.

5 Eva Nováková: Analýza výsledků soutěže Matematický klokan, Brno 2016. Zajímavá kniha seznamující s mezinárodní soutěží Matematický klokan a rozborem výsledků této soutěže v ČR v kategorii pro 4.-5. třídy ZŠ. Tato kniha dobře uvádí do problematiky didaktiky matematiky na ZŠ: úlohy různého typu, dělení matematiky na různá odvětví, apod.

6 Hrůša,K., Dlouhý,Z., Rohlíček, J.: Úvod do studia matematiky. SPN 1963. Zdroj několika příkladů.

7 Herman, Chrápavá, Jančovičová, Šimša: Matematika pro primy, sekundy, tercie, kvarty – série 17 učebnic pro nižší třídy gymnázií a 2.stupeň ZŠ.

8 Charles Pinter: A book of Abstract Algebra, 2010. Jedná se o reprint druhého vydání z roku 1990. Tento text je vhodný pro partie navazujícího předmětu Algebra 1 na PdF MUNI, nicméně autora přednášky Základy matematiky už částečně inspiroval. Je neobyčejně čtivě napsán. Pinter říká, že napsal svou knihu z té pozice, že algebra (a tím i diskrétní matematika) je důležitá a má důležitá uplatnění.

9 O.Odvárko: Funkce, Prometheus 1993. Edice Matematika pro gymnázia, sešit 3, počet stran 160. Tento text je potřeba v závěru předmětu Základy matematiky a v úvodu navazujícího předmětu Matematická analýza 1 na Pedagogické fakultě MU.

10 O.Odvárko: Goniometrie, Prometheus 1994. Edice Matematika pro gymnázia, sešit 7, počet stran 127. Tento text je potřeba v závěru předmětu Základy matematiky a v úvodu navazujícího předmětu Matematická analýza 1 na Pedagogické fakultě MU.

11 S.Kowal: Matematika pro volné chvíle. Praha 1985, druhé vydání. Kniha, která na velkém množství úloh prochází celou historii matematiky v rámci zajímavých úloh, jejichž řešení uvádí buď v textu, nebo na konci každé kapitoly. Název láká širokou veřejnost, ale řada úloh je vysokoškolské obtížnosti, i když jejich řešení je často proveditelné i na SŠ.

12 Jedličková, Krupka, Nechvátalová: Matematika – nová škola. Série 16 učebnic a 16 pracovních sešitů nově vznikající v Brna v letech 2012 až 2019.

13 Odvárko, O.: Finanční matematika. Poslední, dvanáctá učebnice ze séria učebnic a pracovních sešitů k výuce na 2. stupni ZŠ.

14 Jan Kopka: Svazy a Booleovy algebry (Ústí nad Labem 1991, zejména str. 19-82). Kolega Kopka napsal svůj text z té pozice, že by rád přehledně a srozumitelně podal přehled pojmů algebry a diskrétní matematiky, aby byla vidět její krása. Kniha je hlubším rozvedením pojmu uspořádaná množina uvedeným v předmětu Základy matematiky.

15 Rosický, J.: Grupy a okruhy. Skriptum přírodovědecké fakulty MUNI, Brno 2000. Pokročilý text jako doplněk předmětu Algebra 1, zde byl využit pouze pro důkaz vět o dělitelnosti celých čísel v kapitole 5.

16 Robová, Hála, Calda: Matematika pro SŠ – komplexní čísla, kombinatorika, pravděpodobnost a statistika. Prometheus 2013. Tato kniha je dobrým úvodem do komplexních čísel na 56 stranách, do kombinatoriky na 38 stranách (kromě kombinací s opakováním, které jsou vysvětlovány krkolomně), do pravděpodobnosti na 46 stranách (věta o úplné pravděpodobnosti a Bayesův vzorec zde nejsou už dost procvičeny) a do popisné statistiky na 57 stranách. Stručně a výstižně, pro kteroukoli z těchto čtyř částí matematiky je to kniha k nezaplacení (a priceless book[50]).

17 P. Horák: Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I, Brno 2002. Sbírka příkladů ke staršímu vydání textu [1] na Přírodovědecké fakultě MU.

18 M.Krynický: Matematika realisticky. Online pdf materiály (cca 500 hodin pro 6. až 9. ročník ZŠ, cca 500 hodin pro čtyřleté gymnázium) na stránce realisticky.cz. Dobrý výchozí bod ohledně obsahu i didaktiky matematiky na ZŠ a SŠ. Vzhledem k tomu, že se jedná o dobrý, spíše výjimečný materiál online, je v České Republice využíván minimálně jako doplňkový materiál na řadě základních a středních škol. Odtud jsou vzaty některé příklady pro přednášku 10 a pro několik cvičení předmětu.

[50]Studenti angličtiny pozor: „priceless“ kupodivu neznamená něco bezcenného, ale je to označením věcí neocenitelných, tj. ceny nevyčíslitelné = nezměrné.