Domácí úkol 2 - řešení

1 Je dán následující systém lineárních rovnic

$$-x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0$$
$$2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = -14$$
$$-x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 3$$
$$2x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 2$$

1. Kolik řešení má výše zadaný systém?

Systém nemá řešení.

2. Má-li systém řešení, zapište jej

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 3 & -14 \\ -1 & -2 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -5 & 5 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +2\bar{r}_1 \\ -\bar{r}_1 \\ +2\bar{r}_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -14 \\ 0 & -3 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -7 & 7 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +3\bar{r}_2 \\ -4\bar{r}_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -14 \\ 0 & 0 & -5 & 13 & -39 \\ 0 & 0 & 5 & -13 & 58 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ +\bar{r}_3 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 5 & -14 \\ 0 & 0 & -5 & 13 & -39 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 19 \end{array}\right)$$

Po užití Gaussovy eliminační metody je zřejmé, že soustava nemá řešení (z posledního řádku vychází $0 = 19$).

② Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ jsou zadány dva podprostory

$W_1 = L(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, $W_2 = L(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$, přičemž:

$\vec{u}_1 = (1, 2, 4, 3)$, $\vec{u}_2 = (2, -1, -2, -3)$, $\vec{u}_3 = (3, 2, -1, 2)$

$\vec{v}_1 = (1, 2, 3, -2)$, $\vec{v}_2 = (1, -3, -6, -6)$, $\vec{v}_3 = (2, 0, -5, -1)$

1. Určete dimenzi součtu podprostorů W_1, W_2.

Matici upravme tak, abychom nejdříve ověřili, zda jsou dimenze W_1 i W_2 rovny třem. Poté z matice určíme $\dim(W_1 + W_2)$.

$$\begin{array}{c} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \vec{u}_3 \\ \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \end{array}
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & -6 & -6 \\ 2 & 0 & -5 & -1 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ -2\vec{r}_1 \\ -3\vec{r}_1 \\ \\ -\vec{r}_4 \\ -2\vec{r}_4 \end{array}
\sim
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & -10 & -9 \\ 0 & -4 & -13 & -7 \\ \hline 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & -9 & -4 \\ 0 & -4 & -11 & 3 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-5)+4\vec{r}_2 \\ \\ \\ \cdot(-5)+4\vec{r}_5 \end{array}
\sim
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & 25 & -1 \\ \hline 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & -9 & -4 \\ 0 & 0 & 19 & -31 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ \\ -\vec{r}_1 \\ -\vec{r}_2 \\ \\ \end{array}
\sim
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & 25 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 19 & -31 \end{pmatrix} \sim$$

$\rightarrow \dim W_1 = 3$

$\rightarrow \dim W_2 = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 25 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 19 & -31 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ \\ +25\vec{r}_3 \\ +\vec{r}_3 \\ +19\vec{r}_3 \end{array}
\sim
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -126 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -126 \end{pmatrix}
\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ -\vec{r}_4 \end{array}
\sim
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & -10 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -126 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{\dim(W_1 + W_2) = 4}}$$

2. Vaším úkolem je nalézt bázi α_S podprostoru $W_1 + W_2$. Předpokládejme, že $\vec{u}_1, \vec{v}_1 \in \alpha_S$. Vyberte další vektor či vektory, které patří do báze α_S.

Z úprav v 1. vidíme, že do báze α_S je třeba doplnit vektory $\underline{\underline{\vec{u}_2, \vec{u}_3}}$.

3. Určete dimenzi průniku podprostorů W_1, W_2.

Díky postupu v 1. lze využít větu

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$
$$4 = 3 + 3 - \dim(W_1 \cap W_2)$$
$$\underline{\underline{\dim(W_1 \cap W_2) = 2}}$$

4. Najdi vektory báze L_p podprostoru $W_1 \cap W_2$.

Vyjádříme si vektor $\vec{a}$ náležící oběma podprostorům W_1, W_2.

$$\vec{a} = \alpha_1 \cdot \vec{w}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{w}_2 + \alpha_3 \cdot \vec{w}_3 = \beta_1 \vec{v}_1 + \beta_2 \cdot \vec{v}_2 + \beta_3 \vec{v}_3$$

a upravme

$$\alpha_1 \cdot \vec{w}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{w}_2 + \alpha_3 \cdot \vec{w}_3 - \beta_1 \cdot \vec{v}_1 - \beta_2 \vec{v}_2 - \beta_3 \vec{v}_3 = \vec{0}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & -1 & -3 & 6 & 5 & 0 \\ 3 & -3 & 2 & 2 & 6 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2r_1 \\ -4r_1 \\ -3r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -4 & 0 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & -10 & -13 & 1 & 10 & 13 & 0 \\ 0 & -9 & -7 & 5 & 9 & 7 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -2r_2 \\ (-5)+9r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -4 & 0 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -25 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -4 & 0 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -25 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ -5r_3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -4 & 0 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -25 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 126 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$126 \beta_1 = 0$

$\boxed{\beta_1 = 0}$

$-\alpha_3 - 25\beta_1 + \beta_3 = 0$

$\boxed{\alpha_3 = \beta_3}$

$-5\alpha_2 - 4\alpha_3 + 5\beta_2 + 4\beta_3 = 0$

$-5\alpha_2 - 4\beta_3 + 5\beta_2 + 4\beta_3 = 0$

$-5\alpha_2 + 5\beta_2 = 0$

$\boxed{\alpha_2 = \beta_2}$

$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 - \beta_1 - \beta_2 - 2\beta_3 = 0$

$\alpha_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3 - 0 - \beta_2 - 2\beta_3 = 0$

$\boxed{\alpha_1 = -\beta_2 - \beta_3}$

$$\vec{a} = \alpha_1 \cdot \vec{w}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{w}_2 + \alpha_3 \cdot \vec{w}_3 = -\beta_2 \vec{w}_1 - \beta_3 \vec{w}_1 + \beta_2 \vec{w}_2 + \beta_3 \vec{w}_3 = \beta_2 (\vec{w}_2 - \vec{w}_1) + \beta_3 (\vec{w}_3 - \vec{w}_1) =$$

$$= \beta_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} + \beta_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Do báze L_p tedy patří vektory $\underline{(1, -3, -6, -6)}$ a $\underline{(2, 0, -5, -1)}$.

③ Je dán sloupcový vektor $\vec{b}=(3,2,1)^T$ a matice $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\2&1&2\\1&1&0\end{pmatrix}$

1. Naleznete inverzní matici A^{-1} k matici A.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&1&1&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&0&1\\2&1&1&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ -2r_1\\ -2r_1\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&0&1\\0&-1&1&1&0&-2\\0&-1&2&0&1&-2\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ -r_2\end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&0&1\\0&-1&1&1&0&-2\\0&0&1&-1&1&0\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ -r_3\\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&0&1\\0&-1&0&2&-1&-2\\0&0&1&-1&1&0\end{array}\right)\begin{array}{l}+r_2\\ \\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&-1&-1\\0&-1&0&2&-1&-2\\0&0&1&-1&1&0\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&-1&-1\\0&1&0&-2&1&2\\0&0&1&-1&1&0\end{array}\right)$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-2&1&2\\-1&1&0\end{pmatrix}$$

2. S pomocí inverzní matice A^{-1} vyřešte systém $A\cdot\vec{x}=\vec{b}$, je-li $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)^T$.

$$A\cdot\vec{x}=\vec{b} \quad /\cdot A^{-1} \text{ zleva}$$

$$A^{-1}\cdot A\cdot\vec{x}=A^{-1}\cdot\vec{b}$$

$$\vec{x}=A^{-1}\cdot\vec{b}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-2&1&2\\-1&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

④ Jsou dány matice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Pro které dvojice A, B, C je možné provést násobení?

$A \cdot B$	$A \cdot C$	$B \cdot C$	$B \cdot A$	$C \cdot A$	$C \cdot B$
✗	✗	✓	✗	✓	✗

2. Je dána matice $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ naleznete matici $Y = A \cdot X$

a zapište počet všech jejích prvků, jejichž hodnota je větší nebo rovna nule.

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1-2\cdot2-2\cdot0+2(-1) & 1\cdot0-2\cdot(-2)-2\cdot3+2\cdot4 \\ 2\cdot1+3\cdot2+0\cdot0-1\cdot(-1) & 2\cdot0+3\cdot(-2)+0\cdot3-1\cdot4 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 9 & -10 \end{pmatrix}}}$$

Výsledná matice má 2 prvky větší nebo rovny nule.