Domácí úkol 3 - řešení

1. Lineární zobrazení $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je zadáno předpisem:

$$\varphi(x,y,z) = (y+2z,\ -x+3y-2z,\ x+3z)$$

1. Naleznete matici A zobrazení φ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

v prvním sloupci jsou koeficienty u x, ve druhém sloupci koeficienty u y a ve třetím u z

2. Je dán vektor $\vec{u} = (-1,-1,-1)^T$. Určete jeho obraz v zobrazení φ

$$A \cdot \vec{u} = \varphi(\vec{u})$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\varphi(\vec{u}) = (-3, 0, -4)^T$$

3. Naleznete vektor $\vec{v}$, který se prostřednictvím φ zobrazí na vektor $(-2,1,-2)^T$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} y + 2z &= -2 \\ -x + 3y - 2z &= 1 \\ x + 3z &= -2 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{array}\right)_{+\bar{r}_1} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right)_{-3\bar{r}_2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{array}\right)$$

$-5z = 5$

$z = -1$

$y - 2 = -2$

$y = 0$

$x - 3 = -2$

$x = 1$

$$\vec{v} = (1, 0, -1)^T$$

② Lineární zobrazení $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ je zadáno maticí A_S vzhledem ke standardní bázi:

$$A_S = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Nalezněte jádro lineárního zobrazení φ. Určete jeho dimenzi.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2r_1 \\ -2r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 0 \end{array}$$

$\dim \operatorname{Ker}\varphi = 0$ $\qquad \operatorname{Ker}\varphi = \{(0,0)\}$

2. Vaším dalším úkolem je nalézt bázi α jádra lineárního zobrazení φ. Vyberte vektor či vektory do báze α:

$(1,0)$ $\quad (2,3)$ $\quad (2,1)$ $\quad \operatorname{Ker}\varphi = \{(0,0)\}$ a tudíž nemá bázi

3. Nalezněte obor hodnot lineárního zobrazení φ, určete jeho dimenzi.

$$\dim V = \dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi$$
$$2 = 0 + \dim \operatorname{Im}\varphi$$
$$\dim \operatorname{Im}\varphi = 2$$

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Najděte vektory báze β oboru hodnot lineárního zobrazení φ. Předpokládejme, že vektor $(2,2,1) \in \beta$. Vyberte další vektor či vektory, které patří do báze β.

$(3,1,0)$ $\quad (-4,-4,-2)$ $\quad (-3,-1,0)$ $\quad$ žádný další vektor

3) Lineární zobrazení $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ je zadáno svým jádrem a obrazem takto.

$\operatorname{Ker} \varphi = \langle (-1,1,0)^T, (-2,0,1)^T \rangle$ $\qquad$ $\operatorname{Im} \varphi = \langle (4,-1,2,1)^T \rangle$

Naleznete matici M_φ zobrazení φ částečně zadané níže.

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} 4 & u_1 & v_1 \\ -1 & u_2 & v_2 \\ 2 & u_3 & v_3 \\ 1 & u_4 & v_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & u_1 & v_1 \\ -1 & u_2 & v_2 \\ 2 & u_3 & v_3 \\ 1 & u_4 & v_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-4 + u_1 = 0 \to u_1 = 4$

$1 + u_2 = 0 \to u_2 = -1$

$-2 + u_3 = 0 \to u_3 = 2$

$-1 + u_4 = 0 \to u_4 = 1$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & v_1 \\ -1 & -1 & v_2 \\ 2 & 2 & v_3 \\ 1 & 1 & v_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-8 + v_1 = 0 \to v_1 = 8$

$2 + v_2 = 0 \to v_2 = -2$

$-4 + v_3 = 0 \to v_3 = 4$

$-2 + v_4 = 0 \to v_4 = 2$

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} 4 & 4 & +8 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(4) Jsou dány báze α, β vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$.

$\alpha = ((1,0,1),(1,-1,0),(0,1,-1))$ $\quad\beta = ((2,0,0),(1,1,-2),(0,-3,-1))$

1. Nalezněte matici přechodu $P_{\alpha\to\beta}$ od báze α k bázi β.

$$\beta = \alpha \cdot P_{\alpha\to\beta}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim_{-r_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -3 & -1 \end{array}\right) \sim_{-r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -4 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim_{+r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim^{+r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & +1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underline{\underline{P_{\alpha\to\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}}$$

2. S pomocí matice přechodu $P_{\alpha\to\beta}$ vyjádřete vektor $\vec{u}_\beta = (-2,-1,0)$ v souřadnicích báze α.

$$\vec{u}_\alpha = P_{\alpha\to\beta} \cdot \vec{u}_\beta$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{\vec{u}_\alpha = (-2,-3,-4)}}$$