# MA0005 Algebra 2, 13. seminář

8. 12. 2022

# Náplň cvičení

1. Vlastní čísla a vlastní vektory

## Literatura a zdroje


- Horák, P.: *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I*. 2. vydání. Masarykova univerzita v Brně, 2002. ISBN 80-210-1853-4.
- Isibalo.com: *Matematika – Lineární algebra*. Dostupné z: `https://isibalo.com/matematika/linearni-algebra`.
- Fiala, J. a kol. Sbírka úloh z matematiky. Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy, 2008. Dostupné z: `https://kam.mff.cuni.cz/~sbirka`.

# Vlastní čísla a vlastní vektory

## Vlastní čísla a vlastní vektory

Vlastním vektorem lineárního zobrazení $\varphi : V \to V$ s maticí $A$ rozumíme takový nenulový vektor $\vec{u} \in V$, pro který platí

$$\varphi(\vec{u}) = A \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u}.$$

Reálné číslo $\lambda$ z předchozího vztahu se nazývá vlastní číslo odpovídající vlastnímu vektoru $\vec{u}$.

## Vlastní čísla a vlastní vektory

Vlastním vektorem lineárního zobrazení $\varphi : V \to V$ s maticí $A$ rozumíme takový nenulový vektor $\vec{u} \in V$, pro který platí

$$\varphi(\vec{u}) = A \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u}.$$

Reálné číslo $\lambda$ z předchozího vztahu se nazývá vlastní číslo odpovídající vlastnímu vektoru $\vec{u}$.

**Poznámka:**

- Vlastním vektorům se také říká "invariantní směry" či "invariantní vektory".
- Je-li $\vec{u}$ vlastní vektor, pak i vektor $\alpha \cdot \vec{u}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ je vlastní.
- Vlastní vektory odpovídající jedné vlastní hodnotě $\lambda$ tvoří vektorový podprostor.

# Vlastní čísla a vlastní vektory – postup nalezení

Upravíme vztah z definice vlastního vektoru:

$$\begin{aligned} A \cdot \vec{u} &= \lambda \cdot \vec{u} \\ A \cdot \vec{u} &= \lambda \cdot E \cdot \vec{u} \quad \text{(E: jednotková matice)} \\ (A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{u} &= \vec{o} \end{aligned}$$

# Vlastní čísla a vlastní vektory – postup nalezení

Upravíme vztah z definice vlastního vektoru:

$$\begin{aligned} A \cdot \vec{u} &= \lambda \cdot \vec{u} \\ A \cdot \vec{u} &= \lambda \cdot E \cdot \vec{u} \quad \text{(E: jednotková matice)} \\ (A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{u} &= \vec{o} \end{aligned}$$

## Postup nalezení vlastních čísel a vektorů

1. Najdeme determinant matice $A - \lambda \cdot E$, z něhož nám vyjde rovnice s neznámou $\lambda$, kterou vyřešíme.
2. Do systému $(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{u} = \vec{o}$ dosadíme vypočítané hodnoty $\lambda$ a nalezneme vlastní vektory jako množinu řešení systému.

# Vlastní čísla a vlastní vektory – příklady

## Příklad 1

Lineární transformace $\varphi$ vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ je dána maticí $A$ ve standardní bázi. Nalezněte vlastní čísla a jim odpovídající vlastní vektory lineární transformace $\varphi$.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

# Výsledky příkladu 1

a) Pro $\lambda_1 = 6 :\ \vec{n_1} = (3, 2)$, pro $\lambda_2 = -7 :\ \vec{n_2} = (-2, 3)$;

b) pro $\lambda_1 = 6 :\ \vec{n_1} = (1, 1)$, pro $\lambda_2 = -1 :\ \vec{n_2} = (-5, 2)$;

c) pro $\lambda_1 = 9 :\ \vec{n_1} = (5, 2)$, pro $\lambda_2 = -5 :\ \vec{n_2} = (-1, 1)$;

d) pro $\lambda = 2 :\ \vec{n} = (1, 0)$;

e) pro $\lambda_1 = 1 :\ \vec{n_1} = (-1, 1)$, pro $\lambda_2 = -1 :\ \vec{n_2} = (1, 1)$.

## Příklad 2

Lineární transformace $\varphi$ vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$ je dána maticí $A$ ve standardní bázi. Nalezněte vlastní čísla a jim odpovídající vlastní vektory lineární transformace $\varphi$.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

# Vlastní čísla a vektory – pokračování příkladu 2

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

# Vlastní čísla a vektory – pokračování příkladu 2

d) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

**Výsledky:**

a) Pro $\lambda_1 = 1: \ \vec{n_1} = (-1, 0, 1)$, pro $\lambda_2 = 2: \ \vec{n_2} = (-1, -1, 1)$, pro $\lambda_3 = 3: \ \vec{n_3} = (0, -1, 1)$;

b) pro $\lambda = -1: \ \vec{n} = (2, -1, 1)$;

c) pro $\lambda = -1: \ \vec{n} = (-1, -1, 1)$;

d) pro $\lambda_1 = 2: \ \vec{n_1} = (1, 0, 0)$, pro $\lambda_2 = -1: \ \vec{n_2} = (0, -1, 1)$, pro $\lambda_3 = 1: \ \vec{n_3} = (1, 0, 1)$;

e) pro $\lambda_1 = 0: \ \vec{n_1} = (4, 4, 1)$, pro $\lambda_2 = 3: \ \vec{n_2} = (1, -2, 1)$.

# Příklad 3

Viz video "Matice přechodu a zobrazení motivačně" na webové stránce `www.isibalo.com/matematika/linearni-algebra/matice-prechodu-a-zobrazeni-motivacne`.

**Zadání:**
Určete matici $A_S$ zobrazení $\varphi$ (ve standardní bázi), které překlopí vektory prostoru $\mathbb{R}^2$ podle přímky $p : x - 2y = 0$.

**Nápověda:** Zkuste najít jinou bázi $\alpha$, vhodnější než standardní, pro níž bude snadné určit matici zobrazení $A_\alpha$, které překlápí vektory podle zadané přímky. Pomocí matic přechodu a jejich kombinací s $A_\alpha$ potom snadno dostaneme matici $A_S$.

# Příklad 3

Viz video "Matice přechodu a zobrazení motivačně" na webové stránce `www.isibalo.com/matematika/linearni-algebra/matice-prechodu-a-zobrazeni-motivacne`.

**Zadání:**
Určete matici $A_S$ zobrazení $\varphi$ (ve standardní bázi), které překlopí vektory prostoru $\mathbb{R}^2$ podle přímky $p : x - 2y = 0$.

**Nápověda:** Zkuste najít jinou bázi $\alpha$, vhodnější než standardní, pro níž bude snadné určit matici zobrazení $A_\alpha$, které překlápí vektory podle zadané přímky. Pomocí matic přechodu a jejich kombinací s $A_\alpha$ potom snadno dostaneme matici $A_S$.

**Řešení:** při zvolené bázi $\alpha = ((2;1),(-1;2))$ je matice

$$A_S = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

# Příklad 4

Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory lineární transformace $\varphi$ prostoru $\mathbb{R}^2$ zadané maticí

$$A_S = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

ve standardní bázi. Následně ověřte, že body $[x, y]$ jednotkové kružnice (tj. vektory $(x, y)$) se pomocí zobrazení $\varphi$ zobrazí na body elipsy, jejíž délky poloos budou rovny vlastním číslům.