MA0005 Algebra 2, 3. seminář

29. 9. 2022

Náplň cvičení

1. Determinant matice
   - Důležitá pravidla pro výpočet determinantu
   - Laplaceův rozvoj determinantu
   - Příklady na výpočet determinantu
2. Soustavy lineárních rovnic
   - Maticový zápis SLR
   - Hodnost matice, elementární řádkové úpravy
   - Schodový tvar matice
   - Soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých
   - Vzájemná poloha tří rovin

Literatura

- Horák, P.: *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I*. 2. vydání. Masarykova univerzita v Brně, 2002. ISBN 80-210-1853-4.

Důležitá pravidla pro výpočet determinantu

Mějme čtvercovou matici M řádu $n \times n$, kde $n \in \mathbb{N}$.

Důležitá pravidla pro výpočet determinantu

Mějme čtvercovou matici M řádu $n \times n$, kde $n \in \mathbb{N}$.

1. $|M| = |M^T|$, kde M^T je transponovaná matice M.
2. Jestliže matice M' vznikne z matice M výměnou dvou řádků, pak $|M| = -|M'|$.
3. Jestliže matice M' vznikne z matice M vynásobením některého řádku nenulovým číslem $k \in \mathbb{R} - \{0\}$, pak $|M| = \frac{1}{k} \cdot |M'|$.
4. Determinant matice M se nezmění, přičteme-li k některému řádku nenulový k-násobek jiného řádku ($k \in \mathbb{R} - \{0\}$).

Důležitá pravidla pro výpočet determinantu

Mějme čtvercovou matici M řádu $n \times n$, kde $n \in \mathbb{N}$.

1. $|M| = |M^T|$, kde M^T je transponovaná matice M.
2. Jestliže matice M' vznikne z matice M výměnou dvou řádků, pak $|M| = -|M'|$.
3. Jestliže matice M' vznikne z matice M vynásobením některého řádku nenulovým číslem $k \in \mathbb{R} - \{0\}$, pak $|M| = \frac{1}{k} \cdot |M'|$.
4. Determinant matice M se nezmění, přičteme-li k některému řádku nenulový k-násobek jiného řádku ($k \in \mathbb{R} - \{0\}$).

Důležité důsledky:

- Determinant matice M se dvěma stejnými řádky je roven 0.
- Determinant matice M obsahující nulový řádek je roven 0.
- Je-li některý řádek matice M lineární kombinací ostatních, pak $|M| = 0$.

Laplaceův rozvoj determinantu

Mějme čtvercovou matici M řádu $n \times n$, kde $n \in \mathbb{N}$.

Laplaceův rozvoj determinantu

Mějme čtvercovou matici M řádu $n \times n$, kde $n \in \mathbb{N}$.

Rozvoj podle k-tého řádku:

$$|M| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \cdot a_{kj} \cdot |M_{kj}|,$$

kde M_{kj} jsou matice vzniklé z M vypuštěním k-tého řádku a j-tého sloupce.

Laplaceův rozvoj determinantu

Mějme čtvercovou matici M řádu $n \times n$, kde $n \in \mathbb{N}$.

Rozvoj podle k-tého řádku:

$$|M| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} \cdot a_{kj} \cdot |M_{kj}|,$$

kde M_{kj} jsou matice vzniklé z M vypuštěním k-tého řádku a j-tého sloupce.

Rozvoj podle l-tého sloupce:

$$|M| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l} \cdot a_{il} \cdot |M_{il}|,$$

kde M_{il} jsou matice vzniklé z M vypuštěním i-tého řádku a l-tého sloupce.

Příklad 4.2.B11

Spočtěte determinant

(a)

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$$

Příklad 4.2.B11

Spočtěte determinant

(a)

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$$

Výsledky: (a) -195,

Příklad 4.2.B11

Spočtěte determinant

(a)

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$$

Výsledky: (a) -195, (b) 18.

Příklad 4.2.B11

Spočtěte determinant

(c)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

(d)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Příklad 4.2.B11

Spočtěte determinant

(c)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

(d)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Výsledky: (a) -28,

Příklad 4.2.B11

Spočtěte determinant

(c)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

(d)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Výsledky: (a) -28, (b) 30.

Příklad 4.2.B12

Pouze užitím Laplaceova rozvoje a definice determinantu spočtěte:

(a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 7 & 0 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

Příklad 4.2.B12

Pouze užitím Laplaceova rozvoje a definice determinantu spočtěte:

(a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 7 & 0 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

Výsledky: (a) -105,

Příklad 4.2.B12

Pouze užitím Laplaceova rozvoje a definice determinantu spočtěte:

(a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 7 & 0 & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

Výsledky: (a) -105, (b) -18.

Maticový zápis SLR

Mějme následující soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}y + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

kde $m, n \in \mathbb{N}$.

Maticový zápis SLR

Mějme následující soustavu lineárních rovnic:

$$
\begin{array}{rcl}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\
& \vdots & \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}y + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

kde $m, n \in \mathbb{N}$.

Maticový zápis soustavy

Matici

$$
A = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & & & \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}
\end{pmatrix}
$$

nazýváme maticí systému SLR.

Maticový zápis SLR

Mějme následující soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}y + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

kde $m, n \in \mathbb{N}$.

Rozšířená matice SLR

Matici

$$A|b = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

nazýváme rozšířenou maticí systému SLR.

Hodnost matice

Hodností matice A (typu $m \times n$) rozumíme počet lineárně nezávislých řádků matice A. Píšeme $h(A)$.

Otázka: Kdy jsou dva řádky matice lineárně závislé?

Hodnost matice, elementární řádkové úpravy

Hodnost matice

Hodností matice A (typu $m \times n$) rozumíme počet lineárně nezávislých řádků matice A. Píšeme $h(A)$.

Otázka: Kdy jsou dva řádky matice lineárně závislé?

Elementární řádkové úpravy

Elementárními řádkovými úpravami matice, resp. samotného SLR jsou:

1. vynásobení řádku (rovnice) nenulovým reálným číslem,
2. výměna pořadí dvou řádků (rovnic),
3. přičtení násobku jiného řádku (rovnice) k danému řádku (rovnici).

Hodnost matice, elementární řádkové úpravy

Hodnost matice

Hodností matice A (typu $m \times n$) rozumíme počet lineárně nezávislých řádků matice A. Píšeme $h(A)$.

Otázka: Kdy jsou dva řádky matice lineárně závislé?

Elementární řádkové úpravy

Elementárními řádkovými úpravami matice, resp. samotného SLR jsou:

1. vynásobení řádku (rovnice) nenulovým reálným číslem,
2. výměna pořadí dvou řádků (rovnic),
3. přičtení násobku jiného řádku (rovnice) k danému řádku (rovnici).

Důležitá poznámka: Elementární řádkové úpravy nezmění hodnot matice, resp. nezpůsobí změnu řešení SLR.

Schodový tvar matice

V každém dalším řádku je zleva více nul než v tom předchozím, případně je celý další řádek nulový.

Schodový tvar matice

V každém dalším řádku je zleva více nul než v tom předchozím, případně je celý další řádek nulový.

Poznámka: převodem na schodový tvar pomocí elementárních řádkových úprav zjistíme hodnost zadané matice. Hodnost matice je počet nenulových řádků ve schodovém tvaru, který vznikne ze zadané matice elementárními řádkovými úpravami.

Schodový tvar matice

V každém dalším řádku je zleva více nul než v tom předchozím, případně je celý další řádek nulový.

Poznámka: převodem na schodový tvar pomocí elementárních řádkových úprav zjistíme hodnost zadané matice. Hodnost matice je počet nenulových řádků ve schodovém tvaru, který vznikne ze zadané matice elementárními řádkovými úpravami.

Příklad 1: rozhodněte, zda jsou následující matice ve schodovém tvaru.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 7 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Příklad 4.4.B1

Určete hodnost matice A (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 & 0 & 4 \\ 3 & -6 & 1 & 4 & -3 \\ -4 & 2 & 5 & -1 & 7 \\ 5 & -4 & -12 & 5 & -14 \end{pmatrix}$$

Příklad 4.4.B1

Určete hodnost matice A (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 & 0 & 4 \\ 3 & -6 & 1 & 4 & -3 \\ -4 & 2 & 5 & -1 & 7 \\ 5 & -4 & -12 & 5 & -14 \end{pmatrix}$$

Výsledky: (a) $h(A) = 2$,

Příklad 4.4.B1

Určete hodnost matice A (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 & 0 & 4 \\ 3 & -6 & 1 & 4 & -3 \\ -4 & 2 & 5 & -1 & 7 \\ 5 & -4 & -12 & 5 & -14 \end{pmatrix}$$

Výsledky: (a) $h(A) = 2$, (b) $h(A) = 3$.

Příklad 4.4.B1

Určete hodnost matice A (nad $\mathbb{R}$):

(c)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \\ 5 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

(d)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & -2 \\ 7 & 0 & 7 & 5 & 10 \\ -4 & 5 & 1 & 10 & 10 \\ 5 & -1 & 4 & 1 & 4 \\ 8 & -3 & 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Příklad 4.4.B1

Určete hodnost matice A (nad $\mathbb{R}$):

(c)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \\ 5 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

(d)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & -2 \\ 7 & 0 & 7 & 5 & 10 \\ -4 & 5 & 1 & 10 & 10 \\ 5 & -1 & 4 & 1 & 4 \\ 8 & -3 & 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Výsledky: (c) $h(A) = 2$,

Příklad 4.4.B1

Určete hodnost matice A (nad $\mathbb{R}$):

(c)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -3 \\ 5 & 3 & 0 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

(d)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & 1 & -3 & -2 \\ 7 & 0 & 7 & 5 & 10 \\ -4 & 5 & 1 & 10 & 10 \\ 5 & -1 & 4 & 1 & 4 \\ 8 & -3 & 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Výsledky: (c) $h(A) = 2$, (d) $h(A) = 2$.

Soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých

Mějme následující soustavu tří rovnic:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}$$

Rovnice definují tři roviny, u nichž řešením SLR určíme vzájemnou polohu.

Soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých

Mějme následující soustavu tří rovnic:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}$$

Rovnice definují tři roviny, u nichž řešením SLR určíme vzájemnou polohu.

Počet řešení soustavy

Soustava lineárních rovnic (SLR) o 3 neznámých

(a) má právě jedno řešení, je-li $h(A) = h(A|b) = 3$ (roviny se protínají v jednom bodu);

(b) má nekonečně mnoho řešení, je-li $h(A) = h(A|b) < 3$ (roviny se protínají buď v jedné přímce, když $h(A) = h(A|b) = 2$, nebo splývají v jednu rovinu, je-li $h(A) = h(A|b) = 1$);

(c) nemá řešení, je-li $h(A) \neq h(A|b)$ (geometricky to může vyjít různě).

Vzájemná poloha tří rovin

1. všechny tři roviny jsou rovnoběžné a nemají průsečík, ani průsečnici
2. dvě roviny jsou rovnoběžné a třetí je protíná ve dvou rovnoběžných průsečnicích
3. všechny jsou různoběžné a protínají se v jedné průsečnici (svazek rovin)
4. všechny jsou různoběžné a po dvou se protínají v průsečnici (tyto tři průsečnice jsou rovnoběžné)
5. všechny jsou různoběžné a protínají se v jednom bodě (trs rovin)
6. všechny tři roviny splývají v jednu

Ilustrace prvních pěti případů jsou dostupné na [této stránce].

Vzájemná poloha tří rovin

Příklad 15.6.40: Vyšetřete vzájemnou polohu tří rovin.

a) $\varrho_1 : 2x - y + z - 5 = 0, \quad \sigma_1 : x + y + 3z - 6 = 0,$
$\tau_1 : 3x + 2y - 4z + 7 = 0$

b) $\varrho_2 : x + y + z - 3 = 0, \quad \sigma_2 : 3x - 2y + z - 8 = 0,$
$\tau_2 : 4x - y + 2z + 1 = 0$

c) $\varrho_3 : x - y + 2z - 1 = 0, \quad \sigma_3 : x + 2y - z + 2 = 0,$
$\tau_3 : x - 2y + 3z - 2 = 0$

d) $\varrho_4 : x + y - z - 1 = 0, \quad \sigma_4 : x + y + z + 2 = 0,$
$\tau_4 : 2x + 2y - 2z + 1 = 0$

Vzájemná poloha tří rovin

Příklad 15.6.40: Vyšetřete vzájemnou polohu tří rovin.

a) $\varrho_1 : 2x - y + z - 5 = 0, \quad \sigma_1 : x + y + 3z - 6 = 0,$
$\tau_1 : 3x + 2y - 4z + 7 = 0$

b) $\varrho_2 : x + y + z - 3 = 0, \quad \sigma_2 : 3x - 2y + z - 8 = 0,$
$\tau_2 : 4x - y + 2z + 1 = 0$

c) $\varrho_3 : x - y + 2z - 1 = 0, \quad \sigma_3 : x + 2y - z + 2 = 0,$
$\tau_3 : x - 2y + 3z - 2 = 0$

d) $\varrho_4 : x + y - z - 1 = 0, \quad \sigma_4 : x + y + z + 2 = 0,$
$\tau_4 : 2x + 2y - 2z + 1 = 0$

Výsledky:

a) tři různoběžné roviny, společný bod $P[1; -1; 2]$,
b) tři různoběžné roviny, žádný společný bod,
c) tři různoběžné roviny, společná přímka $p = \{[t; -1 - t; -t],\ t \in \mathbb{R}\}$,
d) dvě rovnoběžné roviny, třetí je s nimi různoběžná.