MA0005 Algebra 2, 4. seminář

6. 10. 2022

Náplň cvičení

1. Linearita při výpočtu determinantu
2. Vzájemná poloha tří rovin
3. Vektorový prostor a jeho podprostory
   - Podprostor vektorového prostoru
   - Lineární obal množiny vektorů
   - Dimenze a báze vektorového prostoru
   - Vyjádření vektoru v jiné bázi
4. Gaussova eliminační metoda, Frobeniova věta

Literatura

- Horák, P.: *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I*. 2. vydání. Masarykova univerzita v Brně, 2002. ISBN 80-210-1853-4.

Determinant jako zobrazení lineární v každé složce

Vlastnost D3 (linearita při výpočtu determinantu)

Determinant $det(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_n})$ je zobrazení $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ($\vec{a_i}$ jsou řádky matice), které je lineární v každé své složce, tj. pokud pokud se na k-tém řádku vyskytuje lineární kombinace dvou vektorů $\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}$, tak determinant lze upravit na lineární kombinaci dvou determinantů:

$$\begin{aligned} det(\vec{a_1}, \dots, \alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v}, \dots, \vec{a_n}) &= \alpha \cdot det(\vec{a_1}, \dots, \vec{u}, \dots, \vec{a_n}) + \\ &+ \beta \cdot det(\vec{a_1}, \dots, \vec{v}, \dots, \vec{a_n}). \end{aligned}$$

Příklad: Proveďte Laplaceův rozvoj matice M podle 5. sloupce a využijte linearity determinantu, abyste redukovali počet determinantů 4. řádu.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Vzájemná poloha tří rovin

Příklad 15.6.40: Vyšetřete vzájemnou polohu tří rovin.

a) $\varrho_1 : 2x - y + z - 5 = 0, \quad \sigma_1 : x + y + 3z - 6 = 0,$
$\tau_1 : 3x + 2y - 4z + 7 = 0$

b) $\varrho_2 : x + y + z - 3 = 0, \quad \sigma_2 : 3x - 2y + z - 8 = 0,$
$\tau_2 : 4x - y + 2z + 1 = 0$

c) $\varrho_3 : x - y + 2z - 1 = 0, \quad \sigma_3 : x + 2y - z + 2 = 0,$
$\tau_3 : x - 2y + 3z - 2 = 0$

d) $\varrho_4 : x + y - z - 1 = 0, \quad \sigma_4 : x + y + z + 2 = 0,$
$\tau_4 : 2x + 2y - 2z + 1 = 0$

Vzájemná poloha tří rovin

Příklad 15.6.40: Vyšetřete vzájemnou polohu tří rovin.

a) $\varrho_1 : 2x - y + z - 5 = 0, \quad \sigma_1 : x + y + 3z - 6 = 0,$
$\tau_1 : 3x + 2y - 4z + 7 = 0$

b) $\varrho_2 : x + y + z - 3 = 0, \quad \sigma_2 : 3x - 2y + z - 8 = 0,$
$\tau_2 : 4x - y + 2z + 1 = 0$

c) $\varrho_3 : x - y + 2z - 1 = 0, \quad \sigma_3 : x + 2y - z + 2 = 0,$
$\tau_3 : x - 2y + 3z - 2 = 0$

d) $\varrho_4 : x + y - z - 1 = 0, \quad \sigma_4 : x + y + z + 2 = 0,$
$\tau_4 : 2x + 2y - 2z + 1 = 0$

Výsledky:

a) tři různoběžné roviny, společný bod $P[1; -1; 2]$,
b) tři různoběžné roviny, žádný společný bod,
c) tři různoběžné roviny, společná přímka $p = \{[t; -1 - t; -t], \ t \in \mathbb{R}\}$,
d) dvě rovnoběžné roviny, třetí je s nimi různoběžná.

Vektorový prostor

Axiomy pro vektorový prostor

V nazveme vektorovým (lineárním) prostorem nad tělesem T s operacemi $+, \cdot$, jestliže

1. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V : \vec{u} + \vec{v} \in V$ (uzavřenost na operaci $+$)
2. $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V : (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (asociativita operace $+$)
3. $\exists \vec{o}. \ \forall \vec{v} \in V : \vec{u} + \vec{o} = \vec{u} = \vec{o} + \vec{u}$ (neutrální prvek pro operaci $+$)
4. $\forall \vec{u} \in V. \ \exists (-\vec{u}) \in V : \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}$ (inverze vzhledem k operaci $+$)
5. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V : \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (komutativita operace $+$)

"1" $\forall \vec{u} \in V, \forall t \in T : t \cdot \vec{u} \in V$ (uzavřenost na součin skaláru a vektoru)

"2" $\forall \vec{u} \in V, \forall s, t \in T : s \cdot (t \cdot \vec{u}) = (s \cdot t) \cdot \vec{u}$ (asociativita operace $\cdot$)

"3" $\exists 1 \in T. \ \forall \vec{u} \in V : 1 \cdot \vec{u} = \vec{u} = \vec{u} \cdot 1$ (neutrální prvek pro operaci $\cdot$)

"6a" $\forall \vec{u} \in V, \forall s, t \in T : (s + t) \cdot \vec{u} = s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{u}$ (distributivita operací)

"6b" $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V, \forall s \in T : s \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = s \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ (distributivita operací)

Vektorový prostor

Definice vektorového podprostoru

Vektorový podprostor prostoru $(V, +, \cdot)$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$ je taková podmnožina W prostoru V, která je uzavřená vzhledem k operaci $+$ (sčítání vektorů) a $\cdot$ (násobení vektoru skalárem):

1. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in W : \vec{u} + \vec{v} \in W$

"1" $\forall \vec{u} \in W, \forall t \in T : t \cdot \vec{u} \in W$

Poznámka: Vektorový podprostor je tedy uzavřený na lineární kombinaci svých vektorů.

Podprostor vektorového prostoru

Příklad 3.2.B3: Rozhodněte, zda podmnožina $W \subseteq \mathbb{Q}^4$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{Q}^4$, je-li:

(a) $W = \{(0,0,0,0),\ (1,1,1,1),\ (-1,-1,-1,-1)\}$

(b) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 0\}$

(c) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_2 = x_3 = x_4\}$

(d) $W = \{(2s + t, s - t, t, s) \mid t, s \in \mathbb{Q} \text{ libovolné}\}$

Podprostor vektorového prostoru

Příklad 3.2.B3: Rozhodněte, zda podmnožina $W \subseteq \mathbb{Q}^4$ je podprostorem vektorového prostoru $\mathbb{Q}^4$, je-li:

(a) $W = \{(0,0,0,0),\ (1,1,1,1),\ (-1,-1,-1,-1)\}$

(b) $W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 0\}$

(c) $W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid x_2 = x_3 = x_4\}$

(d) $W = \{(2s+t, s-t, t, s) \mid t, s \in \mathbb{Q} \text{ libovolné}\}$

Výsledky: 3.2.B3.(a) ne, (b) ne, (c) ano, (d) ano.

Lineární obal množiny vektorů

Lineární obal množiny vektorů

Lineárním obalem množiny (ne nutně nezávislých) vektorů $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}\}$ z vektorového prostoru V nad tělesem $(T, +, \cdot)$ rozumíme množinu $\{\alpha_1 \cdot \vec{v_1} + \alpha_2 \cdot \vec{v_2} + \cdots + \alpha_k \cdot \vec{v_k} \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k \in T\}$ vzniklou jakoukoli lineární kombinací vektorů $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}\}$.

Značíme jej $L(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k})$ nebo $\langle\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}\}\rangle$.

Alternativně říkáme, že $L(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k})$ je podprostor generovaný vektory $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}$.

Báze a dimenze vektorového prostoru

Posloupnost vektorů $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k})$ nazveme **bází** (množinou generátorů) vektorového prostoru V nad tělesem $(T, +, \cdot)$, jestliže

1. je lineárně nezávislá,
2. každý vektor $\vec{u} \in V$ lze vyjádřit lineární kombinací $\vec{u} = \alpha_1 \cdot \vec{v_1} + \alpha_2 \cdot \vec{v_2} + \cdots + \alpha_k \cdot \vec{v_k}$ pro nějaké $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in T$ (tj. vektory $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k}$ generují celý prostor V).

Dimenzí vektorového prostoru V rozumíme počet vektorů nějaké jeho báze. Značíme $\dim V$.

Čísla $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ z vyjádření vektoru $\vec{u}$ nazýváme **souřadnicemi vektoru $\vec{u}$ v bázi** $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_k})$.

Vektory generující vektorový prostor

Příklad 16: Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány vektory:

$$\vec{u_1} = (1; -2; 3),\ \vec{u_2} = (2; -1; 0),\ \vec{u_3} = (1; 1; -3),\ \vec{u_4} = (1; 0; -1).$$

Rozhodněte, zda tyto vektory generují vektorový prostor $\mathbb{R}^3$.

Vektory generující vektorový prostor

Příklad 16: Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány vektory:

$$\vec{u_1} = (1; -2; 3),\ \vec{u_2} = (2; -1; 0),\ \vec{u_3} = (1; 1; -3),\ \vec{u_4} = (1; 0; -1).$$

Rozhodněte, zda tyto vektory generují vektorový prostor $\mathbb{R}^3$.

Příklad 3.3.B2: Rozhodněte, zda vektory $\vec{u_1}, \dots, \vec{u_5}$ generují vektorový prostor $\mathbb{Q}^4$, je-li:

(a) $\vec{u_1} = (1; 2; 1; 2),\ \vec{u_2} = (2; 1; 2; 1),\ \vec{u_3} = (1; 1; 1; 1),$
$\vec{u_4} = (-2; 0; -1; -3),\ \vec{u_5} = (-1; 1; 0; -2)$

(b) $\vec{u_1} = (-1; 1; 0; -1),\ \vec{u_2} = (2; 0; 1; 3),\ \vec{u_3} = (1; 2; 3; 4),$
$\vec{u_4} = (2; 3; 4; 6),\ \vec{u_5} = (1; -3; 5; -7)$

Vektory generující vektorový prostor

Příklad 16: Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány vektory:

$$\vec{u_1} = (1; -2; 3),\ \vec{u_2} = (2; -1; 0),\ \vec{u_3} = (1; 1; -3),\ \vec{u_4} = (1; 0; -1).$$

Rozhodněte, zda tyto vektory generují vektorový prostor $\mathbb{R}^3$.

Příklad 3.3.B2: Rozhodněte, zda vektory $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_5}$ generují vektorový prostor $\mathbb{Q}^4$, je-li:

(a) $\vec{u_1} = (1; 2; 1; 2),\ \vec{u_2} = (2; 1; 2; 1),\ \vec{u_3} = (1; 1; 1; 1),$
$\vec{u_4} = (-2; 0; -1; -3),\ \vec{u_5} = (-1; 1; 0; -2)$

(b) $\vec{u_1} = (-1; 1; 0; -1),\ \vec{u_2} = (2; 0; 1; 3),\ \vec{u_3} = (1; 2; 3; 4),$
$\vec{u_4} = (2; 3; 4; 6),\ \vec{u_5} = (1; -3; 5; -7)$

Výsledky: 16. ne,

Vektory generující vektorový prostor

Příklad 16: Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány vektory:

$$\vec{u_1} = (1; -2; 3),\ \vec{u_2} = (2; -1; 0),\ \vec{u_3} = (1; 1; -3),\ \vec{u_4} = (1; 0; -1).$$

Rozhodněte, zda tyto vektory generují vektorový prostor $\mathbb{R}^3$.

Příklad 3.3.B2: Rozhodněte, zda vektory $\vec{u_1}, \ldots, \vec{u_5}$ generují vektorový prostor $\mathbb{Q}^4$, je-li:

(a) $\vec{u_1} = (1; 2; 1; 2),\ \vec{u_2} = (2; 1; 2; 1),\ \vec{u_3} = (1; 1; 1; 1),$
$\vec{u_4} = (-2; 0; -1; -3),\ \vec{u_5} = (-1; 1; 0; -2)$

(b) $\vec{u_1} = (-1; 1; 0; -1),\ \vec{u_2} = (2; 0; 1; 3),\ \vec{u_3} = (1; 2; 3; 4),$
$\vec{u_4} = (2; 3; 4; 6),\ \vec{u_5} = (1; -3; 5; -7)$

Výsledky: 16. ne,
3.3.B2.(a) ne, (b) ano.

Vektor příslušející vektorovému podprostoru

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány vektory $\vec{u} = (0; 2; 5)$, $\vec{v} = (1; 2; 1)$. Zjistěte, zda vektory $\vec{u}, \vec{v}$ leží ve vektorovém podprostoru W generovaném následující skupinou vektorů.

(a) $\vec{x} = (1; -1; 3), \vec{y} = (-2; 4; -1), \vec{z} = (-1; 3; 2)$;

(b) $\vec{x} = (2; -3; 0), \vec{y} = (-1; 5; -2), \vec{z} = (0; -4; 1)$;

(c) $\vec{x} = (3; 5; -2), \vec{y} = (2; 3; -3)$.

Vektor příslušející vektorovému podprostoru

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány vektory $\vec{u} = (0; 2; 5)$, $\vec{v} = (1; 2; 1)$. Zjistěte, zda vektory $\vec{u}, \vec{v}$ leží ve vektorovém podprostoru W generovaném následující skupinou vektorů.

(a) $\vec{x} = (1; -1; 3), \vec{y} = (-2; 4; -1), \vec{z} = (-1; 3; 2)$;

(b) $\vec{x} = (2; -3; 0), \vec{y} = (-1; 5; -2), \vec{z} = (0; -4; 1)$;

(c) $\vec{x} = (3; 5; -2), \vec{y} = (2; 3; -3)$.

Výsledky:

(a). $\vec{u} \in W$, $\vec{v} \notin W$;

Vektor příslušející vektorovému podprostoru

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány vektory $\vec{u} = (0; 2; 5)$, $\vec{v} = (1; 2; 1)$. Zjistěte, zda vektory $\vec{u}, \vec{v}$ leží ve vektorovém podprostoru W generovaném následující skupinou vektorů.

(a) $\vec{x} = (1; -1; 3), \vec{y} = (-2; 4; -1), \vec{z} = (-1; 3; 2)$;

(b) $\vec{x} = (2; -3; 0), \vec{y} = (-1; 5; -2), \vec{z} = (0; -4; 1)$;

(c) $\vec{x} = (3; 5; -2), \vec{y} = (2; 3; -3)$.

Výsledky:

(a). $\vec{u} \in W$, $\vec{v} \notin W$;

(b) $\vec{u} \in W$, $\vec{v} \in W$;

Vektor příslušející vektorovému podprostoru

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ jsou dány vektory $\vec{u} = (0; 2; 5)$, $\vec{v} = (1; 2; 1)$. Zjistěte, zda vektory $\vec{u}, \vec{v}$ leží ve vektorovém podprostoru W generovaném následující skupinou vektorů.

(a) $\vec{x} = (1; -1; 3), \vec{y} = (-2; 4; -1), \vec{z} = (-1; 3; 2)$;

(b) $\vec{x} = (2; -3; 0), \vec{y} = (-1; 5; -2), \vec{z} = (0; -4; 1)$;

(c) $\vec{x} = (3; 5; -2), \vec{y} = (2; 3; -3)$.

Výsledky:

(a). $\vec{u} \in W$, $\vec{v} \notin W$;
(b) $\vec{u} \in W$, $\vec{v} \in W$;
(c) $\vec{u} \notin W$, $\vec{v} \in W$.

Dimenze a báze podprostoru

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ je podprostor W zadán následující množinou generátorů. Určete dimenzi a bázi α_W podprostoru W.

(a) $\vec{u_1} = (1; -1; 0; 2), \vec{u_2} = (2; 2; -1; 3), \vec{u_3} = (0; 1; 1; 0), \vec{u_4} = (3; 2; 0; 5)$;

(b) $\vec{u_1} = (1; 2; 3; 4), \vec{u_2} = (-2; -3; -4; -5), \vec{u_3} = (3; 4; 5; 6)$,
$\vec{u_4} = (-4; -5; -6; -7), \vec{u_5} = (5; 6; 7; 8)$;

(c) $\vec{u_1} = (1; 2; -1; 0), \vec{u_2} = (0; 1; -1; -7), \vec{u_3} = (-8; 0; 0; -5)$,
$\vec{u_4} = (3; -4; 1; -2), \vec{u_5} = (2; 1; 0; -3)$;

Dimenze a báze podprostoru

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ je podprostor W zadán následující množinou generátorů. Určete dimenzi a bázi α_W podprostoru W.

(a) $\vec{u_1} = (1; -1; 0; 2), \vec{u_2} = (2; 2; -1; 3), \vec{u_3} = (0; 1; 1; 0), \vec{u_4} = (3; 2; 0; 5)$;

(b) $\vec{u_1} = (1; 2; 3; 4), \vec{u_2} = (-2; -3; -4; -5), \vec{u_3} = (3; 4; 5; 6)$, $\vec{u_4} = (-4; -5; -6; -7), \vec{u_5} = (5; 6; 7; 8)$;

(c) $\vec{u_1} = (1; 2; -1; 0), \vec{u_2} = (0; 1; -1; -7), \vec{u_3} = (-8; 0; 0; -5)$, $\vec{u_4} = (3; -4; 1; -2), \vec{u_5} = (2; 1; 0; -3)$;

Výsledky:

(a). dim $W = 3$, např. $\alpha_W = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$;

Dimenze a báze podprostoru

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ je podprostor W zadán následující množinou generátorů. Určete dimenzi a bázi α_W podprostoru W.

(a) $\vec{u_1} = (1; -1; 0; 2), \vec{u_2} = (2; 2; -1; 3), \vec{u_3} = (0; 1; 1; 0), \vec{u_4} = (3; 2; 0; 5);$

(b) $\vec{u_1} = (1; 2; 3; 4), \vec{u_2} = (-2; -3; -4; -5), \vec{u_3} = (3; 4; 5; 6),$
$\vec{u_4} = (-4; -5; -6; -7), \vec{u_5} = (5; 6; 7; 8);$

(c) $\vec{u_1} = (1; 2; -1; 0), \vec{u_2} = (0; 1; -1; -7), \vec{u_3} = (-8; 0; 0; -5),$
$\vec{u_4} = (3; -4; 1; -2), \vec{u_5} = (2; 1; 0; -3);$

Výsledky:

(a). $\dim W = 3$, např. $\alpha_W = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3});$

(b) $\dim W = 2$, např. $\alpha_W = (\vec{u_1}, \vec{u_2});$

Dimenze a báze podprostoru

Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ je podprostor W zadán následující množinou generátorů. Určete dimenzi a bázi α_W podprostoru W.

(a) $\vec{u_1} = (1; -1; 0; 2), \vec{u_2} = (2; 2; -1; 3), \vec{u_3} = (0; 1; 1; 0), \vec{u_4} = (3; 2; 0; 5);$

(b) $\vec{u_1} = (1; 2; 3; 4), \vec{u_2} = (-2; -3; -4; -5), \vec{u_3} = (3; 4; 5; 6),$
$\vec{u_4} = (-4; -5; -6; -7), \vec{u_5} = (5; 6; 7; 8);$

(c) $\vec{u_1} = (1; 2; -1; 0), \vec{u_2} = (0; 1; -1; -7), \vec{u_3} = (-8; 0; 0; -5),$
$\vec{u_4} = (3; -4; 1; -2), \vec{u_5} = (2; 1; 0; -3);$

Výsledky:

(a). $\dim W = 3$, např. $\alpha_W = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3});$
(b) $\dim W = 2$, např. $\alpha_W = (\vec{u_1}, \vec{u_2});$
(c) $\dim W = 4$, např. $\alpha_W = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_5}).$

Vyjádření vektoru v jiné bázi

Příklad 3.3.B5: Ověřte, zda zadané vektory tvoří bázi α vekt. prostoru $\mathbb{R}^3$. Pokud ano, najděte souřadnice vektoru $\vec{w} = (0; 1; 2)_S$ v bázi α.

a) $\alpha = ((1; 2; -1), (1; 1; 0), (2; -1; 3))$

b) $\alpha = ((1; 2; -1), (2; -1; 1), (-1; 1; 2))$

c) $\alpha = ((1; 2; -2), (1; 1; -1), (-2; -1; 2))$

Vyjádření vektoru v jiné bázi

Příklad 3.3.B5: Ověřte, zda zadané vektory tvoří bázi α vekt. prostoru $\mathbb{R}^3$. Pokud ano, najděte souřadnice vektoru $\vec{w} = (0;1;2)_S$ v bázi α.

a) $\alpha = ((1;2;-1),(1;1;0),(2;-1;3))$

b) $\alpha = ((1;2;-1),(2;-1;1),(-1;1;2))$

c) $\alpha = ((1;2;-2),(1;1;-1),(-2;-1;2))$

Příklad 3.4.B23: Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ jsou dány lineárně nezávislé vektory
$\vec{u_1} = (1;1;1;1)$, $\vec{u_2} = (0;1;1;1)$, $\vec{u_3} = (0;0;1;1)$, $\vec{u_4} = (0;0;0;1)$.
Vyjádřete souřadnice vektoru $\vec{w} = (2;1;1;4)$

a) v bázi $\alpha = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4})$;

b) v bází $\beta = (\vec{u_3}, \vec{u_2}, \vec{u_4}, \vec{u_1})$.

Výsledky: 3.3.B5.a) vektory netvoří bázi, b) $(\frac{3}{14}; \frac{5}{14}; \frac{13}{14})_\alpha$, c) $(-2;8;3)_\alpha$.

Příklad 3.3.B5: Ověřte, zda zadané vektory tvoří bázi α vekt. prostoru $\mathbb{R}^3$. Pokud ano, najděte souřadnice vektoru $\vec{w} = (0;1;2)_S$ v bázi α.

a) $\alpha = ((1;2;-1),(1;1;0),(2;-1;3))$

b) $\alpha = ((1;2;-1),(2;-1;1),(-1;1;2))$

c) $\alpha = ((1;2;-2),(1;1;-1),(-2;-1;2))$

Příklad 3.4.B23: Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^4$ jsou dány lineárně nezávislé vektory
$\vec{u_1} = (1;1;1;1),\ \vec{u_2} = (0;1;1;1),\ \vec{u_3} = (0;0;1;1),\ \vec{u_4} = (0;0;0;1)$.
Vyjádřete souřadnice vektoru $\vec{w} = (2;1;1;4)$

a) v bázi $\alpha = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}, \vec{u_4})$;

b) v bází $\beta = (\vec{u_3}, \vec{u_2}, \vec{u_4}, \vec{u_1})$.

Výsledky: 3.3.B5.a) vektory netvoří bázi, b) $(\frac{3}{14}; \frac{5}{14}; \frac{13}{14})_\alpha$, c) $(-2;8;3)_\alpha$.
3.4.B23.a) $(2;-1;0;3)_\alpha$, b) $(0;-1;3;2)_\beta$.

Gaussova eliminační metoda

Věta (Frobenius – Kronecker – Capelli): SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení $\iff h(A) = h(A|b)$.

Gaussova eliminační metoda

Při řešení SLR o m řádcích a n $(m, n \in \mathbb{N})$ neznámých postupujeme takto:

Gaussova eliminační metoda

Věta (Frobenius – Kronecker – Capelli): SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení $\Longleftrightarrow h(A) = h(A|b)$.

Gaussova eliminační metoda

Při řešení SLR o m řádcích a n ($m, n \in \mathbb{N}$) neznámých postupujeme takto:

1. Převedeme SLR na rozšířenou matici systému $A|b$.

Gaussova eliminační metoda

Věta (Frobenius – Kronecker – Capelli): SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení $\iff h(A) = h(A|b)$.

Gaussova eliminační metoda

Při řešení SLR o m řádcích a n ($m, n \in \mathbb{N}$) neznámých postupujeme takto:

1. Převedeme SLR na rozšířenou matici systému $A|b$.
2. Převedeme matici $A|b$ na schodový tvar.

Gaussova eliminační metoda

Věta (Frobenius – Kronecker – Capelli): SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení $\iff h(A) = h(A|b)$.

Gaussova eliminační metoda

Při řešení SLR o m řádcích a n ($m, n \in \mathbb{N}$) neznámých postupujeme takto:

1. Převedeme SLR na rozšířenou matici systému $A|b$.
2. Převedeme matici $A|b$ na schodový tvar.
3. Je-li $h(A) \neq h(A|b)$, nemá SLR řešení.

Gaussova eliminační metoda

Věta (Frobenius – Kronecker – Capelli): SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení $\iff h(A) = h(A|b)$.

Gaussova eliminační metoda

Při řešení SLR o m řádcích a n $(m, n \in \mathbb{N})$ neznámých postupujeme takto:

1. Převedeme SLR na rozšířenou matici systému $A|b$.
2. Převedeme matici $A|b$ na schodový tvar.
3. Je-li $h(A) \neq h(A|b)$, nemá SLR řešení.
4. V opačném případě stanovíme počet parametrů jako $n - h(A|b)$.

Věta (Frobenius – Kronecker – Capelli): SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení $\iff h(A) = h(A|b)$.

Gaussova eliminační metoda

Při řešení SLR o m řádcích a n ($m, n \in \mathbb{N}$) neznámých postupujeme takto:

1. Převedeme SLR na rozšířenou matici systému $A|b$.
2. Převedeme matici $A|b$ na schodový tvar.
3. Je-li $h(A) \neq h(A|b)$, nemá SLR řešení.
4. V opačném případě stanovíme počet parametrů jako $n - h(A|b)$.
   - Je-li $n - h(A|b) = 0$, pak má SLR právě jedno řešení.

Gaussova eliminační metoda

Věta (Frobenius – Kronecker – Capelli): SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení $\iff h(A) = h(A|b)$.

Gaussova eliminační metoda

Při řešení SLR o m řádcích a n ($m, n \in \mathbb{N}$) neznámých postupujeme takto:

1. Převedeme SLR na rozšířenou matici systému $A|b$.
2. Převedeme matici $A|b$ na schodový tvar.
3. Je-li $h(A) \neq h(A|b)$, nemá SLR řešení.
4. V opačném případě stanovíme počet parametrů jako $n - h(A|b)$.
   - Je-li $n - h(A|b) = 0$, pak má SLR právě jedno řešení.
   - Je-li $n - h(A|b) > 0$, pak $n - h(A|b)$ neznámým "uvážlivě" přiřadíme parametr, ostatní neznámé vyjádříme pomocí těchto parametrů ze zbývajících rovnic.

Gaussova eliminační metoda

Věta (Frobenius – Kronecker – Capelli): SLR má nějaké (alespoň jedno) řešení $\iff h(A) = h(A|b)$.

Gaussova eliminační metoda

Při řešení SLR o m řádcích a n ($m, n \in \mathbb{N}$) neznámých postupujeme takto:

1. Převedeme SLR na rozšířenou matici systému $A|b$.
2. Převedeme matici $A|b$ na schodový tvar.
3. Je-li $h(A) \neq h(A|b)$, nemá SLR řešení.
4. V opačném případě stanovíme počet parametrů jako $n - h(A|b)$.
   - Je-li $n - h(A|b) = 0$, pak má SLR právě jedno řešení.
   - Je-li $n - h(A|b) > 0$, pak $n - h(A|b)$ neznámým "uvážlivě" přiřadíme parametr, ostatní neznámé vyjádříme pomocí těchto parametrů ze zbývajících rovnic.
   - V obou případech postupujeme tzv. zpětným chodem, tj. bereme rovnice zdola a volíme za parametry počet neznámých v dané rovnici MINUS jedna, abychom poslední neznámou v každé rovnici mohli dopočítat pomocí ostatních neznámých – parametrů.

Příklad 5.1.B1

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 11 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & -4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -6 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -4 \end{array}$$

Příklad 5.1.B1

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{ccccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 11 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{ccccccccc} 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & -4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -6 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -4 \end{array}$$

Výsledky: (a) $(2, -2, 3)$,

Příklad 5.1.B1

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 11 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & -4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -6 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & -4 \end{array}$$

Výsledky: (a) $(2, -2, 3)$, (c) $(-1, -1, 0, 1)$.

Příklad 5.1.B2

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{ccccccc} 5x_1 & - & 9x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 8x_2 & + & & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & 9x_2 & + & 8x_3 & + & 3x_4 & = & 7 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & 8x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 7x_2 & + & 7x_3 & + & 2x_4 & = & 12 \\ 5x_1 & + & 7x_2 & + & 9x_3 & + & 2x_4 & = & 20 \end{array}$$

Příklad 5.1.B2

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & - & 9x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 8x_2 & + & & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 9x_2 & + & 8x_3 & + & 3x_4 & = & 7 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & 8x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 7x_2 & + & 7x_3 & + & 2x_4 & = & 12 \\ 5x_1 & + & 7x_2 & + & 9x_3 & + & 2x_4 & = & 20 \end{array}$$

Výsledky: (a) SLR nemá řešení,

Příklad 5.1.B2

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x_1 & - & 9x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 8x_2 & + & & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 9x_2 & + & 8x_3 & + & 3x_4 & = & 7 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & + & 8x_3 & + & 3x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & + & 7x_2 & + & 7x_3 & + & 2x_4 & = & 12 \\ 5x_1 & + & 7x_2 & + & 9x_3 & + & 2x_4 & = & 20 \end{array}$$

Výsledky: (a) SLR nemá řešení, (c) SLR nemá řešení.

Příklad 5.1.B3

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & - & 9x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -2 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & & & - & x_3 & & & = & 1 \end{array}$$

Příklad 5.1.B3

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & - & 9x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -2 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & & & - & x_3 & & & = & 1 \end{array}$$

Výsledky: (a) $\{(2-t, 1, t),\ t \in \mathbb{R}\}$,

Příklad 5.1.B3

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & - & 9x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -2 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ x_1 & & & - & x_3 & & & = & 1 \end{array}$$

Výsledky: (a) $\{(2-t, 1, t),\ t \in \mathbb{R}\}$,
(c) $\{(1+t, \frac{3}{2}, t, -\frac{1}{2}),\ t \in \mathbb{R}\}$.

Dodatečný příklad

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
 & & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\
3x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -2 \\
x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\
3x_1 & + & 7x_2 & + & 7x_3 & + & 2x_4 & = & 12 \\
x_1 & & & - & x_3 & & & = & 1
\end{array}
$$

Dodatečný příklad

Gaussovou metodou řešte soustavu lineárních rovnic (nad $\mathbb{R}$):

$$
\begin{array}{rcrcrcrcr}
 & & x_2 & & & + & x_4 & = & 1 \\
3x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -2 \\
x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\
3x_1 & + & 7x_2 & + & 7x_3 & + & 2x_4 & = & 12 \\
x_1 & & & - & x_3 & & & = & 1
\end{array}
$$

Výsledek: $\left(\frac{5}{2}; \frac{3}{2}; -\frac{1}{20}; -\frac{1}{2}\right)$