# MA0005 Algebra 2, 5. seminář

13. 10. 2022

# Náplň cvičení



## Literatura

- Horák, P.: *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I*. 2. vydání. Masarykova univerzita v Brně, 2002. ISBN 80-210-1853-4.

# Podprostor vektorového prostoru

**Příklad z písemky:** Rozhodněte, zda rovina $\varrho$ je vektorovým podprostorem aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$, je-li:

(a) $\varrho : 2x + y - 3z + 6 = 0$

(b) $\varrho : 2x + y - z = 0$

(c) $\varrho : x - 2y + 3z - 6 = 0$

(d) $\varrho : x + 4y - 2z = 0$

# Podprostor vektorového prostoru

**Příklad z písemky:** Rozhodněte, zda rovina $\varrho$ je vektorovým podprostorem aritmetického vektorového prostoru $\mathbb{R}^3$, je-li:

(a) $\varrho : 2x + y - 3z + 6 = 0$

(b) $\varrho : 2x + y - z = 0$

(c) $\varrho : x - 2y + 3z - 6 = 0$

(d) $\varrho : x + 4y - 2z = 0$

Příklad z písemky: (a) ne, (b) ano, (c) ne, (d) ano.

Vysvětlení: roviny jsou podprostorem $\mathbb{R}^3$, právě když v nich leží počátek. Stejně tak to platí i pro přímky ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$, případně $\mathbb{R}^2$.

## Součet a průnik vektorových podprostorů

**Součtem** $W_1 + W_2$ vektorových **podprostorů** $W_1, W_2$ prostoru $V$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$ rozumíme lineární obal jejich sjednocení, tj.

$$W_1 + W_2 = L(W_1 \cup W_2) = \{\alpha \cdot \vec{u} + \beta \cdot \vec{v} \mid \alpha, \beta \in T, \vec{u} \in W_1, \vec{v} \in W_2\}$$

**Průnikem** $W_1 \cap W_2$ vektorových **podprostorů** $W_1, W_2$ prostoru $V$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$ rozumíme množinu vektorů, které leží ve $W_1$ i $W_2$ zároveň, tj.

$$W_1 \cap W_2 = \{\vec{u} \in V \mid \vec{u} \in W_1 \wedge \vec{u} \in W_2\}$$

**Věta:** Jsou-li $W_1, W_2$ podprostory s konečnou dimenzí, pak platí

$$\dim (W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim (W_1 \cap W_2).$$

**Příklad 3.4.B17:** Ve vektorovém prostoru $V$ jsou zadány podprostory $W_1, W_2$. Určete dimenzi a bázi podprostorů $W_1 + W_2, W_1 \cap W_2$, je-li:

(a) $V = \mathbb{R}^3, W_1 = L(\vec{u_1}, \vec{u_2}), W_2 = L(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}),$
$\vec{u_1} = (1; 1; -3), \vec{u_2} = (1; 2; 2),$
$\vec{v_1} = (1; 1; -1), \vec{v_2} = (1; 2; 1), \vec{v_3} = (1; 3; 3);$

(b) $V = \mathbb{R}^4, W_1 = \langle\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}\rangle, W_2 = \langle\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}\rangle,$
$\vec{u_1} = (1; 2; 0; 2), \vec{u_2} = (1; 2; 1; 2), \vec{u_3} = (3; 1; 3; 1),$
$\vec{v_1} = (1; 1; 1; 1), \vec{v_2} = (1; -1; 1; -1), \vec{v_3} = (1; 3; 1; 3);$

(c) $V = \mathbb{R}^4, W_1 = L(\vec{u_1}, \vec{u_2}), W_2 = L(\vec{v_1}, \vec{v_2}),$
$\vec{u_1} = (1; 1; 1; 1), \vec{u_2} = (1; 0; 1; 0), \vec{v_1} = (1; 1; 1; 0), \vec{v_2} = (1; 2; 0; 1).$

# Dimenze a báze součtu a průniku podprostorů

**Příklad 3.4.B17:** Ve vektorovém prostoru $V$ jsou zadány podprostory $W_1, W_2$. Určete dimenzi a bázi podprostorů $W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2$, je-li:

(a) $V = \mathbb{R}^3, W_1 = L(\vec{u_1}, \vec{u_2}), W_2 = L(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$,
$\vec{u_1} = (1; 1; -3), \vec{u_2} = (1; 2; 2)$,
$\vec{v_1} = (1; 1; -1), \vec{v_2} = (1; 2; 1), \vec{v_3} = (1; 3; 3)$;

(b) $V = \mathbb{R}^4, W_1 = \langle\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}\rangle, W_2 = \langle\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}\rangle$,
$\vec{u_1} = (1; 2; 0; 2), \vec{u_2} = (1; 2; 1; 2), \vec{u_3} = (3; 1; 3; 1)$,
$\vec{v_1} = (1; 1; 1; 1), \vec{v_2} = (1; -1; 1; -1), \vec{v_3} = (1; 3; 1; 3)$;

(c) $V = \mathbb{R}^4, W_1 = L(\vec{u_1}, \vec{u_2}), W_2 = L(\vec{v_1}, \vec{v_2})$,
$\vec{u_1} = (1; 1; 1; 1), \vec{u_2} = (1; 0; 1; 0), \vec{v_1} = (1; 1; 1; 0), \vec{v_2} = (1; 2; 0; 1)$.

**Výsledky:**

(a). $\dim(W_1 + W_2) = 3$, příklad báze: $\alpha_{W_1+W_2} = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{v_1})$,
$\dim(W_1 \cap W_2) = 1$, příklad báze: $\alpha_{W_1 \cap W_2} = ((3; 5; 1))$;

**Příklad 3.4.B17:** Ve vektorovém prostoru $V$ jsou zadány podprostory $W_1, W_2$. Určete dimenzi a bázi podprostorů $W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2$, je-li:

(a) $V = \mathbb{R}^3, W_1 = L(\vec{u_1}, \vec{u_2}), W_2 = L(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$,
$\vec{u_1} = (1;1;-3), \vec{u_2} = (1;2;2)$,
$\vec{v_1} = (1;1;-1), \vec{v_2} = (1;2;1), \vec{v_3} = (1;3;3)$;

(b) $V = \mathbb{R}^4, W_1 = \langle\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}\rangle, W_2 = \langle\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}\rangle$,
$\vec{u_1} = (1;2;0;2), \vec{u_2} = (1;2;1;2), \vec{u_3} = (3;1;3;1)$,
$\vec{v_1} = (1;1;1;1), \vec{v_2} = (1;-1;1;-1), \vec{v_3} = (1;3;1;3)$;

(c) $V = \mathbb{R}^4, W_1 = L(\vec{u_1}, \vec{u_2}), W_2 = L(\vec{v_1}, \vec{v_2})$,
$\vec{u_1} = (1;1;1;1), \vec{u_2} = (1;0;1;0), \vec{v_1} = (1;1;1;0), \vec{v_2} = (1;2;0;1)$.

**Výsledky:**

(a). $\dim(W_1 + W_2) = 3$, příklad báze: $\alpha_{W_1+W_2} = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{v_1})$,
$\dim(W_1 \cap W_2) = 1$, příklad báze: $\alpha_{W_1 \cap W_2} = ((3;5;1))$;
(b). $\dim(W_1 + W_2) = 3$, příklad báze: $\alpha_{W_1+W_2} = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{v_1})$,
$\dim(W_1 \cap W_2) = 2$, příklad báze: $\alpha_{W_1 \cap W_2} = (\vec{u_2}; \vec{u_3})$;

# Dimenze a báze součtu a průniku podprostorů

**Příklad 3.4.B17:** Ve vektorovém prostoru $V$ jsou zadány podprostory $W_1, W_2$. Určete dimenzi a bázi podprostorů $W_1 + W_2$, $W_1 \cap W_2$, je-li:

(a) $V = \mathbb{R}^3, W_1 = L(\vec{u_1}, \vec{u_2}), W_2 = L(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}),$
$\vec{u_1} = (1;1;-3), \vec{u_2} = (1;2;2),$
$\vec{v_1} = (1;1;-1), \vec{v_2} = (1;2;1), \vec{v_3} = (1;3;3);$

(b) $V = \mathbb{R}^4, W_1 = \langle\{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}\}\rangle, W_2 = \langle\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}\rangle,$
$\vec{u_1} = (1;2;0;2), \vec{u_2} = (1;2;1;2), \vec{u_3} = (3;1;3;1),$
$\vec{v_1} = (1;1;1;1), \vec{v_2} = (1;-1;1;-1), \vec{v_3} = (1;3;1;3);$

(c) $V = \mathbb{R}^4, W_1 = L(\vec{u_1}, \vec{u_2}), W_2 = L(\vec{v_1}, \vec{v_2}),$
$\vec{u_1} = (1;1;1;1), \vec{u_2} = (1;0;1;0), \vec{v_1} = (1;1;1;0), \vec{v_2} = (1;2;0;1).$

**Výsledky:**

(a). $\dim(W_1 + W_2) = 3$, příklad báze: $\alpha_{W_1+W_2} = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{v_1})$,
$\dim(W_1 \cap W_2) = 1$, příklad báze: $\alpha_{W_1 \cap W_2} = ((3;5;1))$;
(b). $\dim(W_1 + W_2) = 3$, příklad báze: $\alpha_{W_1+W_2} = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{v_1})$,
$\dim(W_1 \cap W_2) = 2$, příklad báze: $\alpha_{W_1 \cap W_2} = (\vec{u_2}; \vec{u_3})$;
(c). $\dim(W_1 + W_2) = 4$, příklad báze: $\alpha_{W_1+W_2} = (\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{v_1}, \vec{v_2})$,
$\dim(W_1 \cap W_2) = 0$, báze tedy neexistuje.