MA0005 Algebra 2, 8. seminář

3. 11. 2022

Náplň cvičení

1. Další způsoby řešení SLR
   - Gauss-Jordanova metoda řešení SLR
   - Princip superpozice
2. Lineární zobrazení mezi vektorovými prostory
   - Reprezentace lineárního zobrazení

Literatura

- Horák, P.: *Cvičení z algebry a teoretické aritmetiky I*. 2. vydání. Masarykova univerzita v Brně, 2002. ISBN 80-210-1853-4.
- Kovár, M.: *Maticový a tenzorový počet*. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, Ústav matematiky.

Gauss-Jordanova metoda řešení SLR

SLR $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ (matice A je čtvercová) lze zapsat takto:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Gauss-Jordanova metoda řešení SLR

SLR $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ (matice A je čtvercová) lze zapsat takto:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Je-li matice A regulární, je možné systém $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ vyřešit tzv. **Gauss-Jordanovou metodou** založenou na aplikaci elementárních řádkových úprav a dosažení níže uvedeného tvaru:

$$(A|\vec{b}) \sim \cdots \sim (E|\vec{y}),$$

přičemž E je jednotková matice a $\vec{y}$ je vektor s řešením systému $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.

Gauss-Jordanova metoda řešení SLR

Pomocí Gauss-Jordanovy metody řešte následující systémy lineárních rovnic:

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 9 \\ 2x & - & y & + & z & = & 8 \\ 3x & & & - & z & = & 3 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & y & - & z & = & 3 \\ -x & & & - & 2z & = & 2 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ -3x & - & 6y & - & 6z & = & 0 \\ -3x & - & 4y & - & 5z & = & -2 \end{array}$$

Gauss-Jordanova metoda řešení SLR

Pomocí Gauss-Jordanovy metody řešte následující systémy lineárních rovnic:

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 9 \\ 2x & - & y & + & z & = & 8 \\ 3x & & & - & z & = & 3 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & y & - & z & = & 3 \\ -x & & & - & 2z & = & 2 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ -3x & - & 6y & - & 6z & = & 0 \\ -3x & - & 4y & - & 5z & = & -2 \end{array}$$

Výsledky: a) $(x, y, z) = (2, -1, 3)$,

Gauss-Jordanova metoda řešení SLR

Pomocí Gauss-Jordanovy metody řešte následující systémy lineárních rovnic:

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 9 \\ 2x & - & y & + & z & = & 8 \\ 3x & & & - & z & = & 3 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & y & - & z & = & 3 \\ -x & & & - & 2z & = & 2 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ -3x & - & 6y & - & 6z & = & 0 \\ -3x & - & 4y & - & 5z & = & -2 \end{array}$$

Výsledky: a) $(x, y, z) = (2, -1, 3)$, b) $(x, y, z) = (0, 2, -1)$,

Gauss-Jordanova metoda řešení SLR

Pomocí Gauss-Jordanovy metody řešte následující systémy lineárních rovnic:

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 9 \\ 2x & - & y & + & z & = & 8 \\ 3x & & & - & z & = & 3 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & y & - & z & = & 3 \\ -x & & & - & 2z & = & 2 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ -3x & - & 6y & - & 6z & = & 0 \\ -3x & - & 4y & - & 5z & = & -2 \end{array}$$

Výsledky: a) $(x, y, z) = (2, -1, 3)$, b) $(x, y, z) = (0, 2, -1)$, c) $(x, y, z) = (-2, -3, 4)$.

Homogenní vs. nehomogenní SLR

Motivační příklad: Pomocí Gaussovy eliminační metody vyřešte oba systémy a porovnejte výsledky.

1. Nehomogenní systém:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & & & = & -1 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & - & 3x_4 & = & 5 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 3 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & = & 2 \end{array}$$

2. Homogenní systém:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & & & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & - & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \end{array}$$

Homogenní vs. nehomogenní SLR

Motivační příklad: Pomocí Gaussovy eliminační metody vyřešte oba systémy a porovnejte výsledky.

1. Nehomogenní systém:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & & & = & -1 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & - & 3x_4 & = & 5 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 3 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & = & 2 \end{array}$$

2. Homogenní systém:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & & & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & - & 3x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \end{array}$$

1. $K = \{[\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0] + t \cdot (1, -1, 0, 1), t \in \mathbb{R}\}$,
2. $K = \{[0, 0, 0, 0] + t \cdot (1, -1, 0, 1), t \in \mathbb{R}\}$

Princip superpozice

Definice 18

- **Obecné řešení SLR** = řešení, ve kterém se vyskytují parametry.
- **Partikulární řešení SLR** = řešení, které dostaneme konkrétní volbou parametrů.
- **Fundamentální systém řešení** homogenního SLR = taková množina řešení, která tvoří bázi vektorového podprostoru řešení SLR.

Princip superpozice

Definice 18

- **Obecné řešení SLR** = řešení, ve kterém se vyskytují parametry.
- **Partikulární řešení SLR** = řešení, které dostaneme konkrétní volbou parametrů.
- **Fundamentální systém řešení** homogenního SLR = taková množina řešení, která tvoří bázi vektorového podprostoru řešení SLR.

Z předchozího příkladu: $K = \{[\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0] + t \cdot (1, -1, 0, 1), t \in \mathbb{R}\}$ je obecné řešení nehomogenního SLR. Volbou $t = 1$ dostáváme partikulární řešení $[\frac{10}{3}, -\frac{4}{3}, 1, 1]$. Obecné řešení homogenního SLR (tj. $t \cdot (1, -1, 0, 1), t \in \mathbb{R}$) je zároveň fundamentálním systémem řešení.

Princip superpozice

Definice 18

- **Obecné řešení SLR** = řešení, ve kterém se vyskytují parametry.
- **Partikulární řešení SLR** = řešení, které dostaneme konkrétní volbou parametrů.
- **Fundamentální systém řešení** homogenního SLR = taková množina řešení, která tvoří bázi vektorového podprostoru řešení SLR.

Z předchozího příkladu: $K = \{[\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, 1, 0] + t \cdot (1, -1, 0, 1), t \in \mathbb{R}\}$ je obecné řešení nehomogenního SLR. Volbou $t = 1$ dostáváme partikulární řešení $[\frac{10}{3}, -\frac{4}{3}, 1, 1]$. Obecné řešení homogenního SLR (tj. $t \cdot (1, -1, 0, 1), t \in \mathbb{R}$) je zároveň fundamentálním systémem řešení.

Princip superpozice

Obecné řešení nehomogenního SLR = obecné řešení homogenního SLR + partikulární řešení nehomogenního SLR.

Princip superpozice

Poznámka

- Partikulární řešení hledáme tak, že např. uhodneme neznámé, nebo některé neznámé zvolíme jako nulové a ostatní dopočítáme.
- Princip superpozice je užitečnou metodou v případě, kdy má nehomogenní SLR nekonečně mnoho řešení.

Princip superpozice

Poznámka

- Partikulární řešení hledáme tak, že např. uhodneme neznámé, nebo některé neznámé zvolíme jako nulové a ostatní dopočítáme.
- Princip superpozice je užitečnou metodou v případě, kdy má nehomogenní SLR nekonečně mnoho řešení.

Příklad: Pomocí principu superpozice vyřešte zadaný systém lineárních rovnic.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & 5x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & - & 9x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & -11 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 7x_4 & = & -5 \end{array}$$

Princip superpozice

Poznámka

- Partikulární řešení hledáme tak, že např. uhodneme neznámé, nebo některé neznámé zvolíme jako nulové a ostatní dopočítáme.
- Princip superpozice je užitečnou metodou v případě, kdy má nehomogenní SLR nekonečně mnoho řešení.

Příklad: Pomocí principu superpozice vyřešte zadaný systém lineárních rovnic.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & 5x_4 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & - & 9x_4 & = & -3 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & -11 \\ x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 7x_4 & = & -5 \end{array}$$

Výsledek: obecné řešení homogenního SLR (po volbě $x_4 = t$) je $t \cdot (-2, 3, 2, 1), t \in \mathbb{R}$. Volbou $x_4 = 0$ dostaneme toto obecné řešení zadaného systému: $K = \{[-5, 2, 3, 0] + t \cdot (-2, 3, 2, 1), t \in \mathbb{R}\}$.

Princip superpozice

Příklad: Pomocí principu superpozice vyřešte zadaný systém lineárních rovnic.

(a)

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 5 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & = & 11 \\ x_1 & & & - & x_3 & - & 2x_4 & = & -7 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{ccccccccc} 3x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 3 \\ 9x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & - & 5x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 5 \\ 7x_1 & + & x_2 & + & 6x_3 & - & x_4 & = & 7 \end{array}$$

Výsledky příkladů

(a) obecné řešení homogenního SLR (po volbě $x_3 = t, x_4 = s$) je

$$\{t \cdot (0, -2, 1, 0) + s \cdot (3, -3, 0, 1), t, s \in \mathbb{R}\}.$$

Volbou $x_3 = x_4 = 0$ dostaneme toto obecné řešení zadaného systému:

$$K = \{[-7, 6, 0, 0] + t \cdot (0, -2, 1, 0) + s \cdot (3, -3, 0, 1), t, s \in \mathbb{R}\}.$$

(b) obecné řešení homogenního SLR (po volbě $x_4 = t$) je

$$\{t \cdot (-20, 1, 6, 7), t \in \mathbb{R}\}.$$

Volbou $x_1 = 0$ dostaneme toto obecné řešení zadaného systému:

$$K = \{[0, -\frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}] + t \cdot (-20, 1, 6, 7), t \in \mathbb{R}\}.$$

Lineární zobrazení mezi vektorovými prostory

Lineární zobrazení mezi vektorovými prostory

Jsou dány dva vektorové prostory $(V, +, \cdot)$ dimenze $n \in \mathbb{N}$ a $(V', +, \cdot)$ dimenze $m \in \mathbb{N}$ nad číselným tělesem $(T, +, \cdot)$. Lineárním zobrazením mezi prostory V, V' rozumíme zobrazení $\varphi : V \to V'$ splňující tyto dvě podmínky:

1. $\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$,
2. $\varphi(\alpha \cdot \vec{u}) = \alpha \cdot \varphi(\vec{u})$

pro $\vec{u}, \vec{v} \in V, \alpha \in T$.

Lineární zobrazení mezi vektorovými prostory

Lineární zobrazení mezi vektorovými prostory

Jsou dány dva vektorové prostory $(V, +, \cdot)$ dimenze $n \in \mathbb{N}$ a $(V', +, \cdot)$ dimenze $m \in \mathbb{N}$ nad číselným tělesem $(T, +, \cdot)$. Lineárním zobrazením mezi prostory V, V' rozumíme zobrazení $\varphi : V \to V'$ splňující tyto dvě podmínky:

1. $\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$,
2. $\varphi(\alpha \cdot \vec{u}) = \alpha \cdot \varphi(\vec{u})$

pro $\vec{u}, \vec{v} \in V, \alpha \in T$.

Poznámka: Lineární zobrazení lze zadat třemi způsoby:

- pomocí předpisu mezi souřadnicemi vektoru $\vec{u} \in V$ a $\varphi(\vec{u}) \in V'$,
- pomocí matice A typu $m \times n$, tj. $\varphi(\vec{u}) = A \cdot \vec{u}$,
- pomocí obrazů $\varphi(\vec{e_1}), \varphi(\vec{e_2}), \ldots, \varphi(\vec{e_n})$ bázových vektorů prostoru V.

Příklad 1

Lineární zobrazení $\varphi : V \to V'$ je zadáno předpisem pro vektor $\vec{x} \in V$.

- Najděte matici A zobrazení φ a obrazy standardní báze prostoru V.
- Najděte $\varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{v})$.

1. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \varphi(x_1, x_2) = (2x_1+x_2, x_2, x_2-x_1), \vec{u} = (2,3), \vec{v} = (-2,1)$.
2. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_1, x_1)$,
   $\vec{u} = (4,-1,0), \vec{v} = (-3,0,5)$.
3. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3)$,
   $\vec{u} = (0,2,-3), \vec{v} = (-1,1,2)$.

Výsledky příkladu 1

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$\varphi(1,0) = (2,0,-1), \varphi(0,1) = (1,1,1),$
$\varphi(2,3) = (7,3,1), \varphi(-2,1) = (-3,1,3).$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$\varphi(1,0,0) = (1,0,1,1), \varphi(0,1,0) = (1,1,0,0), \varphi(0,0,1) = (0,1,1,0),$
$\varphi(4,-1,0) = (3,-1,4,4), \varphi(-3,0,5) = (-3,5,2,-3).$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$\varphi(1,0,0) = (1,0), \varphi(0,1,0) = (1,1), \varphi(0,0,1) = (0,1),$
$\varphi(0,2,-3) = (2,-1), \varphi(-1,1,2) = (0,3).$

Reprezentace lineárního zobrazení

Příklad 2

Lineární zobrazení $\varphi : V \to V'$ je zadáno obrazy bázových vektorů V.

- Najděte matici A zobrazení φ.
- Najděte $\varphi(\vec{u}), \varphi(\vec{v})$.

1. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,
   $\varphi(1,0,2) = (1,3), \varphi(-3,4,-2) = (2,-1), \varphi(0,2,1) = (-3,5)$,
   $\vec{u} = (1,4,2), \vec{v} = (-1,0,4)$.
2. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$,
   $\varphi(1,2,-3) = (-2,1), \varphi(2,1,-2) = (1,1), \varphi(1,-4,5) = (8,-1)$,
   $\vec{u} = (3,6,-1), \vec{v} = (0,3,2)$.
3. $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$,
   $\varphi(1,0,1) = (1,0,1,0), \varphi(1,1,0) = (0,0,0,0), \varphi(0,1,1) = (0,1,0,1)$,
   $\vec{u} = (2,4,6), \vec{v} = (-4,0,2)$.

Výsledky příkladu 2

1. $A = \begin{pmatrix} -10 & -\frac{17}{4} & \frac{11}{2} \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$,

$\varphi(1,4,2) = (-16,15), \varphi(-1,0,4) = (32,-9)$.

2. zadané vektory netvoří bázi prostoru $V = \mathbb{R}^3$.

3. $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$\varphi(2,4,6) = (2,4,2,4), \varphi(-4,0,2) = (-1,3,-1,3)$.