

Neurčity integrál; příklady k procvičení. 1.

1

1.1. Vypočtete

$$\int \frac{dx}{x(\ln x)^3} = -\frac{1}{2} (\ln(x))^{-2} + C$$

1.2. Pro $ab \neq 0$ odvoďte

$$\int \frac{dx}{(e^{ax} + b)^2} = -\frac{\ln(e^{ax} + b)}{ab^2} + \frac{1}{ab(e^{ax} + b)} + \frac{\ln(e^{ax})}{ab^2}$$

1.3. Dokažte, že pro $a \neq 0$ platí

$$\int \frac{dx}{\cos(ax)} = \frac{1}{a} \operatorname{tg}(ax) + C$$

1.4. Odvoďte

$$\begin{aligned} \int (\ln(x+1))^2 dx &= (\ln(x+1))^2 (x+1) - 2(x+1) \ln(x+1) + 2x + C \\ \int (x-1)(\ln(x+1))^2 dx &= \frac{1}{2} (x+1)^2 (\ln(x+1))^2 - \frac{1}{2} (x+1)^2 \ln(x+1) + \frac{1}{4} x^2 - \frac{7}{2} x \\ &\quad - 2(\ln(x+1))^2 (x+1) + 4(x+1) \ln(x+1) + C \end{aligned}$$

1.5. Pro libovolné a odvoďte

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

2

2.1. Odvoďte

$$\int \frac{dx}{(x + \sqrt{2})\sqrt{x}} = 2^{\frac{3}{4}} \operatorname{arctg}(2^{-\frac{1}{4}}\sqrt{x}) + C$$

2.2. Pro libovolná a a b s $|a| + |b| \neq 0$ dokažte vzorce

$$\begin{aligned} \int e^{bx} \cos(ax) dx &= \frac{e^{bx}}{a^2 + b^2} (a \sin(ax) + b \cos(ax)) + C \\ \int e^{bx} \sin(ax) dx &= \frac{e^{bx}}{a^2 + b^2} (b \sin(ax) - a \cos(ax)) + C \end{aligned}$$

2.3. Pro libovolné a odvoďte vztah

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

2.4. Pro libovolné a odvoďte

$$\int \frac{x^3}{a-x} dx = -\frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 a - a^2 x - a^3 \ln(x-a) + C$$

Použijte způsob obvyklý pro tento druh funkcí (jaký?) nebo zaveďte substituci (jakou?).

1

2.5. Pro $a \neq 0$ odvoďte

$$\int x \sin(ax) \, dx = \frac{1}{a^2} (\sin(ax) - ax \cos(ax)),$$

$$\int x \cos(ax) \, dx = \frac{1}{a^2} (\cos(ax) + ax \sin(ax))$$

2.6. Pro $a \neq 0$ odvoďte

$$\int x^2 \sin(ax) \, dx = \frac{1}{a^3} \left((2 - a^2 x^2) \cos(ax) + 2ax \sin(ax) \right),$$

$$\int x^2 \cos(ax) \, dx = \frac{1}{a^3} \left((a^2 x^2 - 2) \sin(ax) + 2ax \cos(ax) \right)$$