$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}$$ funkční řada

obor konvergence = {x : řada konverguje}

$= x^0 + x^1 + \dots =$
$= 1 + x + x^2 + \dots$

$q^n = 1 + q + q^2 + \dots$ řada geometrická

řada geom. konverguje $|q|<1$
$|q|>1$

$S_n = \underbrace{\boxed{1+q+\dots+q^{n-1}}}_{S_{n-1}} + q^n$

$S_{n-1} = 1+q+\dots+q^{n-1}$

$S_n - S_{n-1} = q^n$ atd.

$S_n = 1 + q(1+\dots+q^{n-1}) = 1 + qS_{n-1}$ ...

Cauchyho odmocninové krit.

$\sum a_n \quad a_n \geq 0$

$\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = c$

$c<1$ – konv.
$c>1$ – div.

$1 + 2 + 2^2 + 2^n \dots = +\infty$

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots$

$a_n = |q^n| = |q|^n$ (vyšetřujeme absolutní konvergenci)

$|q| = 1$:

$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{|q|^n} = |q|$ – $|q|<1$ konv.
$|q|>1$ div.

$q=1$: $1+1+1+\dots = +\infty$

$q=-1$: $1-1+1-1+\dots$ – osciluje (limita část. součtů neexistuje)

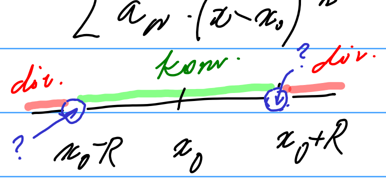
$S_{2m} = 0$ (sudá)

$S_{2m+1} = 1$ (lichá)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^{2n}}$$ obor konvergence?

→ řada mocninná

$\sum a_n \cdot (x-x_0)^n$



$|x-x_0|<R \Rightarrow$ řada konverguje absolutně

$[a,b] \subset (x_0-R, x_0+R)$: konv. stejnoměrně

$|x-x_0|>R \Rightarrow$ řada diverguje

($|x-x_0|=R$: jsou různé možnosti)

$\sum u_n$ a konverguje řada $\sum |u_n|$:

$\sum u_n$ konverguje absolutně ; konv. $\sum |u_n| \to$ pak konv. i $\sum u_n$

$R=0$: obor konvergence je $\{x_0\}$ (tj. triviální případ)

$R>0$ viz. obrázek

$R=+\infty$: obor konvergence je $(-\infty,\infty)$

R se nazývá poloměr konvergence mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{3^{2n}} \quad \text{mocninná} \quad \sum_{n=0}^{+\infty}a_n(x-x_0)^n \quad a_n=\frac{1}{3^{2n}}$$

$x_0=2$

$$\frac{(x-2)^n}{3^{2n}}=\frac{(x-2)^n}{(3^2)^n}=\frac{(x-2)^n}{9^n}=\left(\frac{x-2}{9}\right)^n$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x-2}{9}\right)^n \rightsquigarrow \text{řada geometrická} \quad q=\frac{x-2}{9}$$

$\hookrightarrow$ $|q|<1$ – obor konvergence

$|x-2|<9$ $\quad x_0=2$, $\quad R=9$ – poloměr konvergence.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{3^{2(n+1)}}:\frac{1}{3^{2n}}=\frac{3^{2n}}{3^{2(n+1)}}=\frac{\cancel{3^{2n}}}{\cancel{3^{2n}}\,3^2}=\frac{1}{9}.$$

$$\boxed{\frac{1}{R}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}}=\frac{1}{9}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2} \quad \text{obor kon. ?}$$

$\rightsquigarrow$ mocninná : $\sum a_n(x-x_0)^n$, $\quad a_n=\frac{1}{n^2}$

$x_0=0$

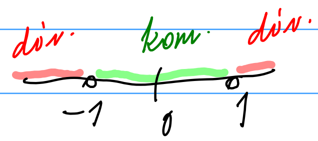
$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{(n+1)^2}\cdot n^2=\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\to 1$$

pro $n\to+\infty$

$$\left[\ \frac{n}{n+1}=\frac{n+1-1}{n+1}=1-\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\to 0}\ ;\quad \frac{n}{n+1}=\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}(1+\frac{1}{n})}=\frac{1}{1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}}\right.$$

$n\to+\infty$

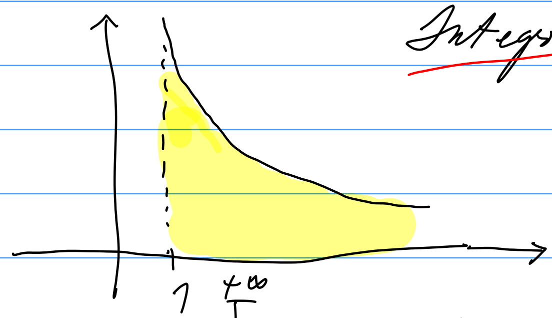
$\frac{1}{R} = 1 \Rightarrow R = 1$ – poloměr konvergence



$x = 1$: $\sum \frac{(1)^n}{n^2} = \underbrace{\sum \frac{1}{n^2}}$ – konv.

Integrální kritérium

$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ – nutná podmínka konvergence čís. řady $\sum u_n$ (nikoliv postačující!)



$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ $\quad u_n = f(n)$

$f \geq 0$, $f \searrow 0$

Pak $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konv./dív. $\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ konv./div.

$\sum \frac{1}{n}$ – řada harmonická diverguje (ale $\lim \frac{1}{n} = 0$)

$\frac{1}{n^2} = f(n)$, $\quad f(x) = \frac{1}{x^2}$ – graf stejného typu

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ – konverguje $\Rightarrow$ konverguje i $\sum \frac{1}{n^2}$

Pro $x = -1$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \dots$

Tato řada konverguje podle Leibniz. krit.:

$\boxed{\sum (-1)^n \cdot b_n}$, $0 < b_n \searrow 0 \Rightarrow \sum (-1)^n b_n$ konverguje.

$b_n = \frac{1}{n^2} \to \sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ konverguje

Navíc konverguje absolutně, neboť řada z absol. hodnot je $\sum \frac{1}{n^2}$ (konverguje)

Pak na $\langle -1, 1 \rangle$ řada konv. absolutně.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+1)3^{2n}} \quad \text{— mocninná} \qquad x_0 = 2$$

$$a_n = \frac{1}{(n+1)3^{2n}}$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} :$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+2)3^{2(n+1)}} \cdot (n+1)3^{2n} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{\cancel{3^{2n}}}{3^{\cancel{2n}+2}} =$$

$$= \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{1}{9} \to \frac{1}{9} \quad \text{pro } n \to +\infty$$

$$\sum \frac{(x-2)^n}{(n+1)3^{2n}} = \sum f_n(x), \qquad f_n(x) = \frac{(x-2)^n}{(n+1)3^{2n}}$$

Vyšetř. absol. konv.:

$$\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \left|\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+2)3^{2(n+1)}} \cdot \frac{(n+1)3^{2n}}{(x-2)^n}\right| =$$

$$= |x-2| \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{1}{9} \to \frac{|x-2|}{9}, \quad n \to \infty$$

Podílové krit.: $\frac{|x-2|}{9} < 1$ — konv. (absolutní)

$\frac{|x-2|}{9} > 1$ — diver.

Int. konv. $|x-2| < 9$

$-9 < x-2 < 9$

$-7 < x < 11$

$$\sum \frac{(x-2)^n}{(n+1)3^{2n}}$$

$$x = 11: \sum \frac{9^n}{(n+1)3^{2n}} = \sum \frac{\cancel{9^n}}{(n+1)\cancel{9^n}} = \sum \frac{1}{n+1} \to \text{diverguje}$$

(řada harmonická $\sum \frac{1}{n}$ diverguje)

$$x = -7: \sum \frac{(-9)^n}{(n+1)3^{2n}} = \sum \frac{(-9)^n}{(n+1)9^n} = \sum \frac{(-1)^n}{n+1}$$ — konverguje dle Leibn. kritéria

(konverguje neabsolutně, neboť $\sum \frac{1}{n+1}$ diverguje.)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\big(\underbrace{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}_{a_n}\big)$$

$a_n \to 0$?

$\infty - \infty$

$$\sqrt{n}-\sqrt{n-1} = \frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{n-(n-1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \to 0 \quad \text{pro } n\to+\infty$$

(nutná podmínka konvergence je splněna)

$\sqrt{n} \sim \sqrt{n+1}$ pro $n\to+\infty$

v tom smyslu, že platí $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1$

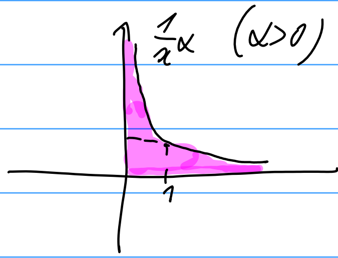
Pomocná řada $\sum \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ zobecněná harm. řada

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$

$\alpha>0$

$\frac{1}{n^\alpha} = f(n)$

$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$



$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-\alpha}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left.\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_1^b =$$

$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

$$= \lim_{b\to+\infty}\frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$$

$1-\alpha>0 \to \lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-\alpha}dx = +\infty$

$\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}}$, $\alpha = \frac{1}{2} < 1$

diverguje a tudíž diverguje i řada (dle integr. krit.)

$\sum\frac{1}{n}$ diverguje (harmon.).

$\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$

$\ln(1+x) =$ Taylor. rozv. $\quad |x| < 1$

$$f(x) \overset{=}{\sim} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

periodic.

podmínky + f v x spojitá: F. ř. $= f(x)$

skok: F. ř. $= \frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \rightarrow a_n$

Srovnávací kritérium – limitní tvar

$\sum a_n$, $\sum b_n$, nezáp.-čl.,

$\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L < +\infty \Rightarrow \sum a_n$ konverguje $\Leftarrow \sum b_n$ konv.

$a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} \underset{\text{(úpravy)}}{= \dots =} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

$b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ – vhodný kand.?

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \sqrt{n}\cdot\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{1}{1+\sqrt{\underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\to 1}}} \to \frac{1}{2} \text{ pro } n\to+\infty$$

$\frac{1}{2} = L < +\infty.$

Potom z divergence řady $\sum b_n = \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ plyne diverg. $\sum(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$. || (srovn. krit. v limit. tvaru)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos(3n)$ – osciluje, neboť $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(3n) \neq 0$ (ani neexist.)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{n+3}{n+8}}$ – diverguje, neboť platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\underbrace{\frac{n+3}{n+8}}_{\to 1}} = 1 \neq 0$$ (není splněná nutná podmínka)