TYPICKÉ PŘÍKLADY

- názorný (geometrický) model
- standardní (aritmetický) model
- kanonický (vektorový) model

- řešení lineárních alg. rovnic
- řešení lineárních dif. rovnic

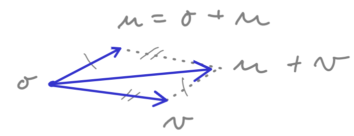
- apod.

NÁZORNÝ AF. PROSTOR

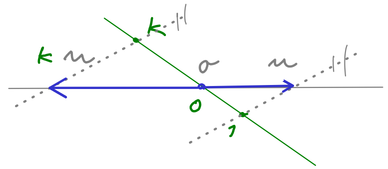
axiomy I, U, R, Sh, Sp

- body $\mathcal{A}$ . . . klasický eukleidovský prostor
- vektory V . . . { orientované úsečky }

  - sčítání . . . . doplnění rovnoběžníku,
    resp. skládání na přímce

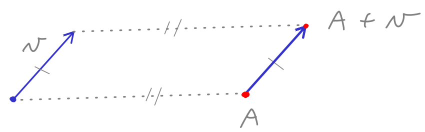


  - natahování . . . doplnění rovnoběžek,
    resp. skládání na přímce



- akce $V \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$

  . . . doplnění rovnoběžníku,
  resp. skládání na přímce



- požadavky 1) – 3) . . . ✓

Pozn . . . stačí axiomy I, U, R, ~~Sh~~, Sp

STANDARDNÍ AF. PROSTOR . . . "ARITMETICKÝ" MODEL

- body a . . . $\mathbb{R}^n$
- vektory V . . . $\mathbb{R}^n$

n-tice reálných čísel

  - sčítání . . . po složkách
  - natahování . . . po složkách

- akce $V \times a \longrightarrow a$

  . . . po složkách

- požadavky 1) – 3) . . . ✓

Pozn . . . stačí vlastnosti $+$ a $\cdot$ v $\mathbb{R}$

KANONICKÝ AF. PROSTOR SE ZAMĚŘENÍM V

- vektory V ... lib. vektorový prostor
- body $\mathcal{A}$ ... V
- akce $V \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$

  ... $(v, u) \longmapsto u + v$

- požadavky 1) – 3) ... ✓

Pozn ... stačí vlastnosti $+$ ve V

... zobecnění předchozího příkladu

LINEÁRNÍ ALG. ROUNICE !

pro neznámé $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

- body a . . . $\left\{ \text{řešení soustavy rovnic } \boxed{\begin{matrix} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 3x_1 - x_3 = 4 \end{matrix}} \right\} =$

$$= \left\{ \begin{matrix} x_1 = t \\ x_2 = 3 - 2t \\ x_3 = -4 + 3t \end{matrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

- vektory V . . . $\left\{ \text{řešení soustavy rovnic } \boxed{\begin{matrix} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_1 - x_3 = 0 \end{matrix}} \right\} =$

$$= \left\{ \begin{matrix} x_1 = t \\ x_2 = -2t \\ x_3 = 3t \end{matrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

  - sčítání a natahování . . . po složkách

(x_1, x_2, x_3)

- akce $V \times a \longrightarrow a$ . . . po složkách

- požadavky 1) - 3) . . . ✓

Pozn . . . podprostor stand. af. prostoru $\mathbb{R}^3$

$$\ldots \quad a = \left\{ \boxed{\begin{matrix} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 3x_1 - x_3 = 4 \end{matrix}} \right\} \subset \left\{ \boxed{2x_1 + x_2 = 3} \right\} \subset \left\{ \boxed{3 = 3} \right\}$$

$$\left\{ \begin{matrix} x_1 = t \\ x_2 = 3 - 2t \\ x_3 = -4 + 3t \end{matrix} \;\middle|\; \underbrace{t}_{\text{dim } 1} \in \mathbb{R} \right\} \subset \left\{ \begin{matrix} x_1 = t \\ x_2 = 3 - 2t \\ x_3 = -4 + 3t + r \end{matrix} \;\middle|\; \underbrace{t, r}_{\text{dim } 2} \in \mathbb{R} \right\} \subset \left\{ \begin{matrix} x_1 = t \\ x_2 = s \\ x_3 = r \end{matrix} \;\middle|\; \underbrace{t, r, s}_{\text{dim } 3} \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^3$$

LINEÁRNÍ DIF. ROUNICE I.

- body a ... $\{$ primitivní funkce k funkci $\frac{1}{x}$ $\} =$

  $=$ $\{$ řešení dif. rovnice $\boxed{y' = \frac{1}{x}}$ $\} =$

  $= \{ y = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + C \mid C \in \mathbb{R} \}$

- vektory V ... $\{$ řešení dif. rovnice $\boxed{y' = 0}$ $\} =$

  $= \{ y = C \mid C \in \mathbb{R} \}$

  - sčítání a natahování ... funkcí

- akce $V \times a \longrightarrow a$ ... sčítání funkcí

- požadavky 1) – 3) ... ✓

Pozn ... stačí vlastnosti $+$ a $\cdot$ v $\mathbb{R}$

... podprostor v PROSTORU funkcí ...

dim 1

LINEÁRNÍ DIF. ROUNICE II.

- body a ... $\{$ řešení dif. rounice $\boxed{y'' - 4y' + 5y = 10}\}$ =

$$= \{ y = 2 + C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R} \}$$

- vektory V ... $\{$ řešení dif. rounice $\boxed{y'' - 4y' + 5y = 0}\}$ =

$$= \{ y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R} \}$$

  - sčítání a natahování ... funkcí

- akce $V \times a \longrightarrow a$ ... sčítání funkcí

- požadavky 1) - 3) ... ✓

Pozn ... stačí vlastnosti $+$ a $\cdot$ v $\mathbb{R}$

... podprostor v PROSTORU funkcí ...

dim 2

UMĚLÝ PŘÍKLAD

- $\mathcal{a} := \{ [x, \sin x] \mid x \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{R}^2$
- $\mathcal{a} \times \mathcal{a} \to \mathbb{R}^2$:

a) zúžení stand. přiřazení

$A = [a, \sin a]$, $B = [b, \sin b]$ $\rightsquigarrow$ $\overrightarrow{AB} := [b-a, \sin b - \sin a]$

... NENÍ af. prostor ("$\vec{a}$" $= \mathbb{R} \times \langle -2, 2 \rangle$ NENÍ vekt. prostor)

b) rozdíl na první složce

$A = [a, \sin a]$, $B = [b, \sin b]$ $\rightsquigarrow$ $\overrightarrow{AB} := [b-a, 0]$

... JE af. prostor se zaměřením $\vec{a} \cong \mathbb{R}$

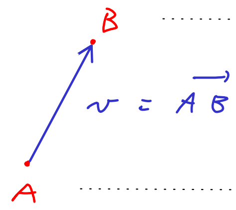
c) rozdíl na druhé složce

$A = [a, \sin a]$, $B = [b, \sin b]$ $\rightsquigarrow$ $\overrightarrow{AB} := [0, \sin b - \sin a]$

... NENÍ af. prostor ("$\vec{a}$" $\cong \langle -2, 2 \rangle$ NENÍ vekt. prostor)

SHRNUTÍ

- několik MODELŮ



$[b_1, b_2, \dots]$

$(v_1, v_2, \dots)$

$[a_1, a_2, \dots]$

- několik důležitých PŘÍKLADŮ .... řešení LINEÁRNÍCH rovnic

- af. prostor $\mathcal{A}$ dim k je

  $\cong$ stand. af. prostorem $\mathbb{R}^k$

  ... dáno volbou souř. sostavy ...

  $\subseteq$ stand. af. prostoru $\mathbb{R}^n$

  ... r lin. NEZÁVISLÝCH rovnic, n neznámých

  $\underbrace{\qquad\qquad}_{k \,=\, n - r}$