Geometrie 2

Obsah

Poslední aktualizace 3. listopadu 2022
`https://is.muni.cz/auth/el/ped/podzim2022/MA0009/index.qwarp`

CÍLE (STÁLE STEJNÉ)

- NĚCO UDĚLAT, ... něco NOVÉHO
- a to POŘÁDNĚ! .... tj. SROZUMITELNĚ

PROCES (STÁLE STEJNÝ)

↑ přetvářet a vytvářet

rozlišovat a vysvětlovat

pochopit a použít

zapamatovat a zopakovat

KULISY (GEOMETRIE ...)

- vloni konstrukční / elementární
- nyní počítačová / vektorová

ROZLOŽENÍ

- Afinní geom. — podzim '22
- Eukleidovská geom. — podzim '22
- projektivní rozšíření — jaro '23
- zobrazení blíže ji — jaro '23

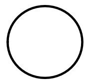
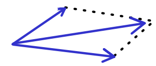
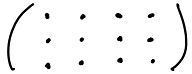
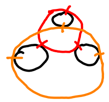
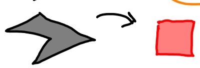
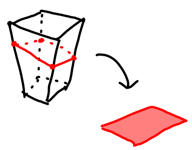
VÝUKA

- předseznámení .... doma
- vyjasnění .... přednáška
- užití .... cvičení

ZAKONČENÍ

- samost. práce .... aspoň 1/2 + spolupráce
- písemka .... aspoň 1/2
- ústní zkouška .... nad VLASTNÍMI výtvory

SHODY & ROZDÍLY

	MINULÝ SEMESTR	TENTO SEMESTR
PŘEDMĚT	geometrie	totéž
CÍLE	opakování, rozšíření a **organizace** poznatků	totéž
NÁSTROJE	pravítko a kružítko  	lineární algebra  
PŘEDPOKLADY	zvídavost	totéž + **lineární algebra!**
VÝHODY	jednoduchost, představitelnost apod.	jednotný popis, žádná představivost apod.
TYPICKÉ ÚLOHY	sestrojte … - dotykové úlohy  - kvadratura  - obecný průmět hranolu - řez hranolu - řez ve skutečné velikosti 	spočítejte … × - - - - totéž (resp. něco velmi podobného)

SHODY & ROZDÍLY

	MINULÝ SEMESTR	TENTO SEMESTR
ZÁKLADNÍ POJMY	bod, přímka, rovina	vektor
ZÁKLADNÍ VZTAHY	incidentnost, spojitost, rovnoběžnost, uspořádání, shodnost	lineární (ne)závislost, (multi) linearnost apod.
ZÁKLADNÍ ÚLOHY	sestrojitelné veličiny průniky přímek, rovin vzdálenosti bodů obsahy, kvadratury apod.	× soustavy lin. rovnic velikosti vektorů determinanty apod.

VZPOMÍNKY (NA MATURITU)

Př. 13

Dokaž, že přímky $p = \leftrightarrow AB$ a $q = \leftrightarrow CD$, kde $A[1,2,0]$, $B[4,3,-2]$, $C[2,0,1]$, $D[5,3,-2]$, jsou mimoběžné, a urči jejich odchylku φ.

$\overrightarrow{AB}(3,1,-2)$; $\overrightarrow{CD}(3,3,-3) \parallel \vec{v}(1,1,-1)$

$\frac{3}{3} \neq \frac{1}{3} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{CD} \Rightarrow p \nparallel q.$

Určíme směrové vektory přímek p, q a ověříme, že $p \nparallel q$. (Vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ mají stejnou první souřadnici; kdyby platilo $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, muselo by být $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.)

$$p: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + t \\ z = -2t \end{cases}, t \in \mathbf{R} \qquad q: \begin{cases} x = 2 + r \\ y = r \\ z = 1 - r \end{cases}, r \in \mathbf{R}$$

Napíšeme parametrické rovnice přímek p a q.

$$p \cap q: \left.\begin{array}{l} 1 + 3t = 2 + r \\ 2 + t = r \\ -2t = 1 - r \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} 3t - r = 1 & ① \\ t - r = -2 & ② \\ 2t - r = -1 \quad |\cdot(-1) & ③ \end{array}$$

$$t = 2$$

$$t - r = -2 \Rightarrow r = 4$$

Připustíme, že přímky p, q mají společný bod.

Sečtením rovnic ① a ③ vychází $t = 2$, z rovnice ② pak $r = 4$.

③: $2 \cdot 2 - 4 \neq -1$; $p \cap q = \emptyset \wedge p \nparallel q \Rightarrow$ přímky p a q jsou mimoběžné.

Hodnoty $t = 2$ a $r = 4$ nevyhovují rovnici ③.

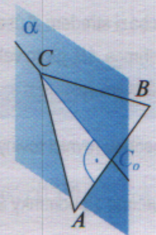
$$\cos\varphi = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1)|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{42}}{7}$$

$\varphi \doteq 22° 12'$

Odchylku přímek p, q určíme pomocí jejich směrových vektorů $\overrightarrow{AB}$ a $\vec{v}$.

Př. 19

Vypočítej obsah trojúhelníku ABC, kde $A[-3,-4,1]$, $B[3,-1,-2]$, $C[2,-2,1]$.



$S = \frac{1}{2} \cdot z \cdot v$;

kde $z = |\overrightarrow{AB}|$, $v = |C, \leftrightarrow AB|$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (6, 3, -3)$

Obsah ΔABC určíme např. pomocí délky strany AB a výšky v z vrcholu C.

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + (-3)^2}\ \mathrm{j} = \sqrt{54}\ \mathrm{j} = 3 \cdot \sqrt{6}\ \mathrm{j}$

Vypočítáme délku strany AB.

$|C, \leftrightarrow AB| = |CC_0|$, kde C_0 je pravoúhlý průmět bodu C na $\leftrightarrow AB$

Bod C_0 určíme jako průsečík roviny α, kolmé k přímce AB jdoucí bodem C, a přímky AB.

$\vec{n}_\alpha \parallel \overrightarrow{AB} \Rightarrow \vec{n}_\alpha(2,1,-1)$

α: $2x + y - z + d = 0$; $d = ?$

$C \in \alpha$: $2 \cdot 2 + (-2) - 1 + d = 0 \Rightarrow d = -1$

α: $2x + y - z - 1 = 0$

Najdeme obecnou rovnici roviny α.

$$\leftrightarrow AB: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -4 + t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbf{R}$$

Napíšeme parametrické rovnice přímky AB.

$C_0 \in \alpha \cap \leftrightarrow AB$: $2 \cdot (-3 + 2t) + (-4 + t) - (1 - t) - 1 = 0$

$6t - 12 = 0 \Rightarrow t = 2$

$C_0[-3 + 2 \cdot 2, -4 + 2, 1 - 2] \Rightarrow C_0[1, -2, -1]$

Určíme průsečík roviny α a přímky AB.

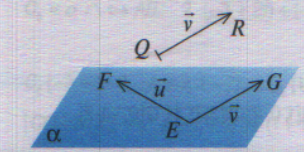
$|CC_0| = \sqrt{(2-1)^2 + (-2+2)^2 + (1+1)^2}\ \mathrm{j} = \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2}\ \mathrm{j} = \sqrt{5}\ \mathrm{j}$

Určíme vzdálenost bodů C a C_0.

$S = \frac{1}{2} \cdot z \cdot v = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{5}\ \mathrm{j}^2 = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{30}\ \mathrm{j}^2$

Př. 16

Napiš obecnou rovnici roviny α, v níž leží body $E[3,1,1]$, $F[1,2,-1]$ a která je rovnoběžná s přímkou QR, kde $Q[-1,4,-2]$ a $R[2,-2,3]$.



$\leftrightarrow QR \parallel \alpha \Leftrightarrow \vec{v} = \overrightarrow{QR} \parallel \alpha$

Rovin
bod E a vektory $\vec{u} = \overrightarrow{EF}$ a $\vec{v} = \overrightarrow{QR}$.

$\vec{u} = \overrightarrow{EF} = F - E = (-2, 1, -2)$

$\vec{v} = \overrightarrow{QR} = R - Q = (3, -6, 5)$

$u \nparallel v \quad \left(-\frac{2}{3} \neq -\frac{1}{6}\right)$

Určíme vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ a přesvědčíme se, že $u \nparallel v$.

$\vec{n}(a,b,c)$ … normálový vektor α; $\vec{n} \perp \vec{u}$; $\vec{n} \perp \vec{v}$

Najdeme normálový vektor $\vec{n}$ roviny α, který je kolmý k vektorům $\vec{u}$ a $\vec{v}$, tzn. $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ a $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$.

$$\begin{array}{ll} \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow & -2a + b - 2c = 0 \quad |\cdot 3 \\ \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow & 3a - 6b + 5c = 0 \quad |\cdot 2 \end{array}$$

$-9b + 4c = 0,\ b = 4 \Rightarrow c = 9$

$2a = b - 2c = 4 - 18 = -14 \Rightarrow a = -7$

Dostaneme soustavu 2 rovnic o 3 neznámých. Najdeme její libovolné nenulové řešení. Zvolíme např. $b = 4$.

α: $-7x + 4y + 9z + d = 0$; $d = ?$

$E \in \alpha$: $-7 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 9 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow -8 + d = 0 \Rightarrow d = 8$

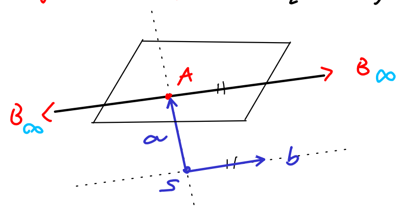
α: $-7x + 4y + 9z + 8 = 0 \quad |\cdot(-1)$

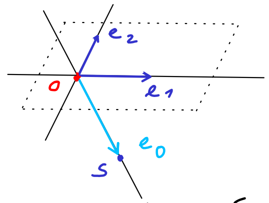
α: $7x - 4y - 9z - 8 = 0$

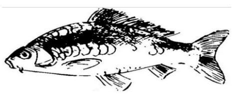
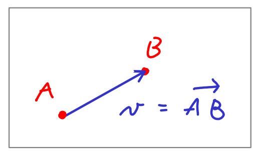
Souřadnice normálového vektoru $\vec{n}$ jsou koeficienty a, b, c v obecné rovnici $ax + by + cz + d = 0$ roviny α. Koeficient d určíme z podmínky $E \in \alpha$.

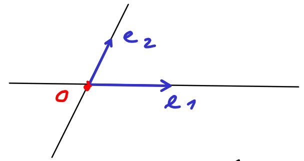
Rovnici roviny zapisujeme zpravidla tak, že koeficient a není záporný.

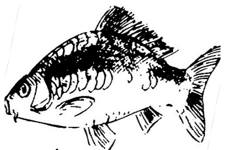
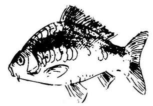
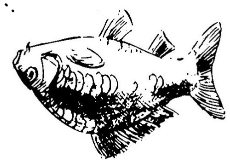
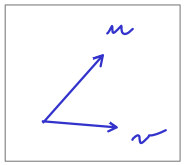
PŘEHLED / VÝHLED

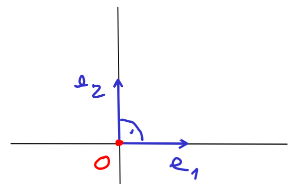
<table>
<tr><th>ZOBRAZENÍ</th><th>ÚLOHY</th><th>PROSTORY</th><th>ALG. VYMEZENÍ</th><th>POČÍTÁNÍ</th></tr>
<tr><td>
projektivní</td><td rowspan="2">polohové</td><td>projektivní</td><td>$\mathcal{P} = \mathcal{A} \cup \{\infty\}$


pomocí $W \supset V$</td><td>homogenní souř.


= rozšířené</td></tr>
<tr><td>
afinní</td><td>afinní</td><td>$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$


body ...... vektor</td><td>afinní souř.


= libovolné</td></tr>
<tr><td>
ekvi-afinní

podobná

shodná</td><td>metrické</td><td>eukleidovské</td><td>$\mathcal{E} = \mathcal{A}$ + skalární součin


...... $u \cdot v$
vektory ...... číslo</td><td>kartézské souř.


= orto-normální</td></tr>
</table>

TŘÍDĚNÍ

EUKLEIDOVSKÁ G.

AFINNÍ G.

PROJEKTIVNÍ G.

bod

přímka

rovina

příčky

incidence

dvojpoměry

uspořádání A<B<C

úsečky

poměry

těžiště

konvexní množiny

rovnoběžnost

shodnost

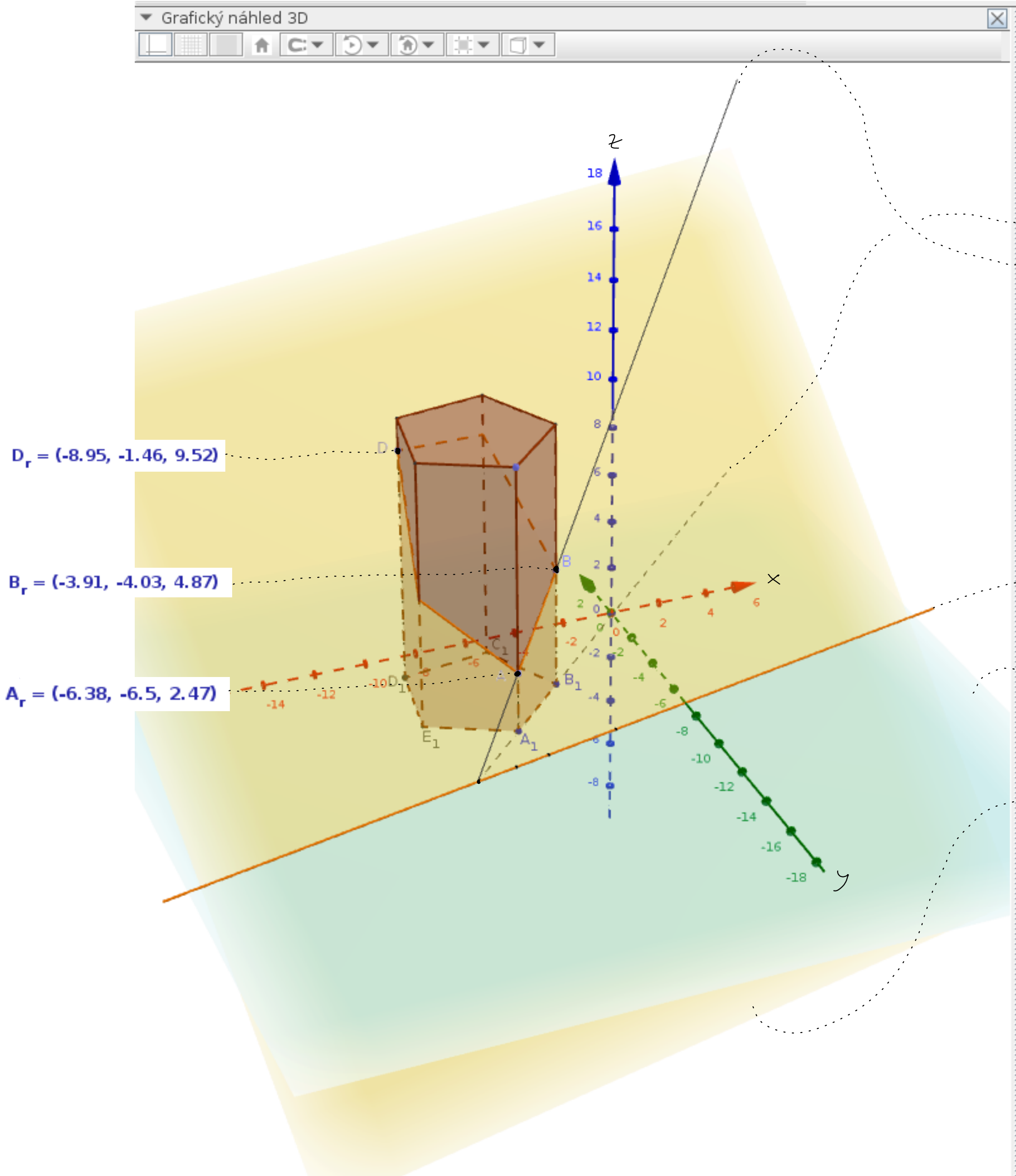
vzdálenost

podobnost

odchylka

obsah / objem

UKÁZKA



Algebraické okno

$k_D = 0$

Mnohoúhelník
- podstava = 21.04
- rez = 34.25 ········ obsah
- rez' = 34.25

Polopřímka
- AB_1: X = (-8.92, -9.05, 0) + λ (5.02, 5.02, 0)
- AB_2: -2.47x + 2.54y = 22.03
- AB_r: X = (-8.92, -9.05, 0) + λ (2.54, 2.54, 2.47)
- AD_0: X = (-5.48, -8.27, 0) + λ (-0.9, 1.77, 2.47)
- AD_1: X = (-5.48, -8.27, 0) + λ (-0.9, 1.77, 0)
- AD_2: -2.47x - 0.9y = 13.53
- AD_r: X = (-5.48, -8.27, 0) + λ (-0.9, 1.77, 2.47)
- BD_0: X = (1.37, -6.72, 0) + λ (-5.28, 2.69, 4.87)
- BD_1: X = (1.37, -6.72, 0) + λ (-5.28, 2.69, 0)
- BD_2: X = (1.37, 0) + λ (-5.28, 4.87)
- BD_r: X = (1.37, -6.72, 0) + λ (-5.28, 2.69, 4.87)

Pětiúhelník
- nadstava' = 21.04
- podstava' = 21.04

Přímka
- $stopa_1$: X = (1.51, -6.69, 0) + λ (23.58, 5.33, 0) ········ $\rho \cap \Pi_1$
- $stopa_2$: X = (2.31, 0, 8.16) + λ (18.81, 0, -5.33)
- $stpa_2$: -2.78x - 9.82y = -86.56

Rovina
- Π_1: z = 0 ········ rovina podstavy
- Π_2: y = 0
- κ_A: 23.58x + 5.33y = -185.1
- κ_B: 23.58x + 5.33y = -113.61
- κ_D: 23.58x + 5.33y = -218.82
- ρ: -5.33x + 23.58y - 18.81z = -165.87 ········ rovina ABD
- ρ': -5.33x + 23.58y - 18.81z = -165.87

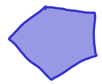
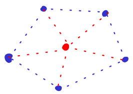
Trojúhelník
- mnohoúhelník1 = 11.79
- trojuhelnik = 15.32
- trojuhelnik' = 15.32
- $trojuhelnik_1$ = 9.41

Úhel
- alef = 127.89°
- bet = 0°
- max = 127.89°

Úsečka
- U_{D2} = 9.52
- U_{Dr} = 9.52
- U_{OD0} = 12.06
- U_{OD1} = 7.4
- a = 3.5
- a'_0 = 7.32

AFINNÍ GEOMETRIE

TYPICKÉ AF. POJMY

- bod, přímka, rovina
- rovnoběžnost, poměry
- příčky a příčkové plochy 
- uspořádání $A<B<C$, úsečky, konvexní množiny 
- těžiště 

TYPICKÉ PROVEDENÍ

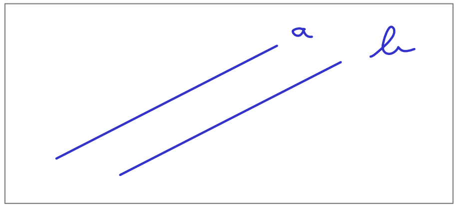
- obecný af. prostor, pod-prostor
- obecná af. zobrazení, af. souřadnice, přechody
- rovnoběžnost a další polohy, příčky podpr.
- polo-prostory, barycentrické souř. apod.

OPAKOVÁNÍ / MOTIVACE

ROVNOBĚŽNOST POMOCÍ ...

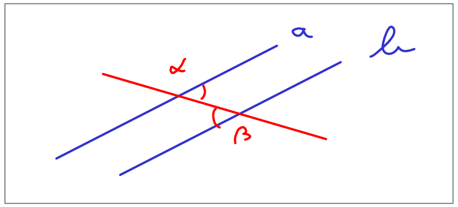
← v jedné rovině

- INCIDENCE



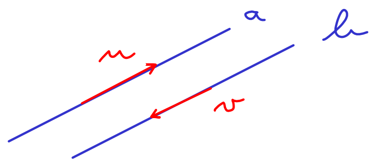
$$a \parallel b \iff a \cap b = \emptyset$$

- SHODNOSTI



$$a \parallel b \iff \alpha = \beta$$

- VEKTORŮ

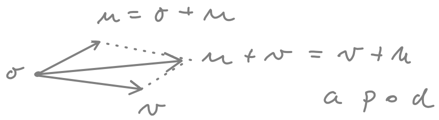


$$a \parallel b \iff u = k \cdot v$$

lineárně závislé

VEKTORY

$+ : V \times V \to V$

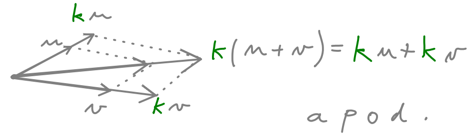


apod.

- <u>VEKTOROVÝ PROSTOR</u> V nad tělesem $\mathbb{R}$

  = komutativní grupa, na níž působí $\mathbb{R}$

  tj. akce $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ je v souladu s



apod.

⇝ LINEÁRNÍ KOMBINACE $ku + lv + \dots$

⇝ LIN. ZÁVISLOST $w = ku + lv + \dots$

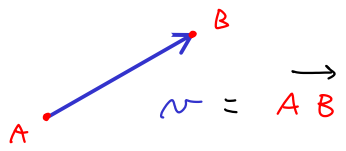
⇝ BÁZE, DIMENZE, ...

- Typické příklady:
  - síly (šipky)
  - řešení soustav HOMOG. LIN. rovnic

- Pozn:
  - v algebře lze místo $\mathbb{R}$ lib. těleso (např. $\mathbb{Q}$)
  - do geometrie potřebujeme $\mathbb{R}$ kvůli <u>SPOJITOSTI</u>

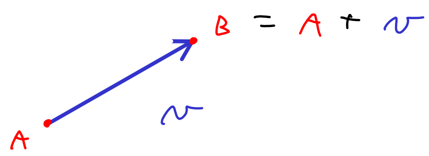
AFINNÍ STRUKTURA

- názorně



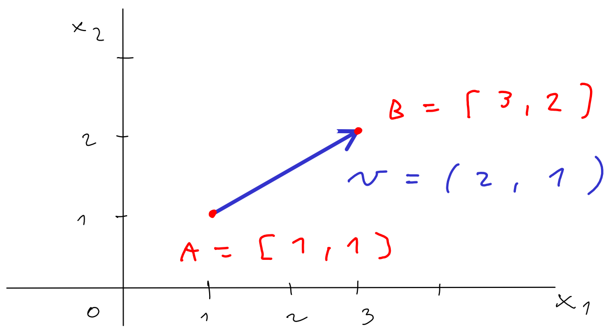
$(\text{bod}, \text{bod}) \longmapsto \text{vektor}$

- aktivně



$(\text{bod}, \text{vektor}) \longmapsto \text{bod}$

- početně



$$v = B - A$$

$$B = A + v$$

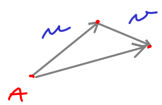
$$A = B - v$$

AFINNÍ STRUKTURA pořádně

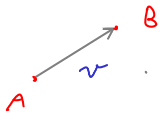
- **AFINNÍ PROSTOR** $\mathcal{A}$ nad vekt. prostorem V

= množina $\mathcal{A}$, na níž působí V
jakožto "grupa posouvání", tj. $V \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$:

1) $A = A + o$ pro lib. $A \in \mathcal{A}$

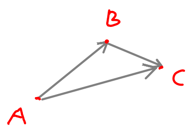
2) 

$(A+u)+v = A+(u+v)$ pro lib. $A \in \mathcal{A}$ a $u, v \in V$

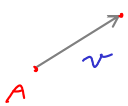
3) 

... $\exists!$ tak, že $B = A + v$ pro lib. $A, B \in \mathcal{A}$

= množina $\mathcal{A}$ s přiřazením $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$,
které je v souladu s vekt. strukturou V :

1) 

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ pro lib. $A, B, C \in \mathcal{A}$

2) 

B ... $\exists!$ tak, že $\overrightarrow{AB} = v$ pro lib. $A \in \mathcal{A}$, $v \in V$

SOUVISEJÍCÍ POJMY

- vekt. prostor V ... **zaměření** $\mathcal{A}$, ozn. $V = \vec{\mathcal{A}}$
- **dimenze** $\mathcal{A}$ = dimenze V

- **afinní podprostor** $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$

  = podmnožina, která je afinním prostorem

  tj. zúžení $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \longrightarrow U \subseteq V$

  vekt. podprostor ve V

- $\dim \mathcal{B} = \dim U$:

0	....	bod
1	....	přímka
2	....	rovina
$\dim V - 1$	..	**nad-rovina**

- Typické příklady:
  - vekt. prostor se ZAPOMENUTÝM neutrálním prvkem
  - řešení soustav (NEHOMOG.) LIN. rovnic

MEZISHRNUTÍ

- ROVNOBĚŽNOST 3× jinak
- opakování VEKTOROVÉ PROSTORY
- obecné AFINNÍ (pod-) PROSTORY
- TYPICKÉ příklady ...

TYPICKÉ PŘÍKLADY

- názorný (geometrický) model
- standardní (aritmetický) model
- kanonický (vektorový) model

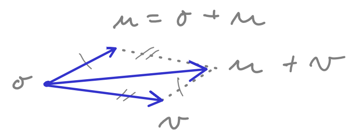
- řešení lineárních alg. rovnic
- řešení lineárních dif. rovnic

- apod.

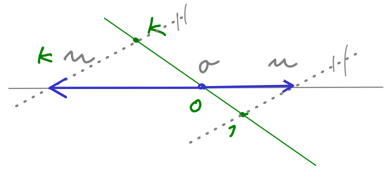
NÁZORNÝ AF. PROSTOR

axiomy I, U, R, Sh, Sp

- body $\mathcal{A}$ … klasický eukleidovský prostor
- vektory V … { orientované úsečky }
  - sčítání … doplnění rovnoběžníku,
    resp. skládání na přímce

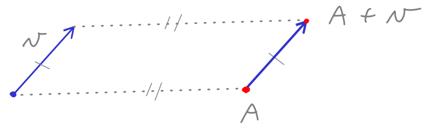


  - natahování … doplnění rovnoběžek,
    resp. skládání na přímce



- akce $V \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$

  … doplnění rovnoběžníku,
  resp. skládání na přímce



- požadavky 1) – 3) … ✓

Pozn … stačí axiomy I, U, R, ~~Sh~~, Sp

STANDARDNÍ AF. PROSTOR ... "ARITMETICKÝ" MODEL

- body $\mathcal{A}$ ... $\mathbb{R}^n$
- vektory V ... $\mathbb{R}^n$

n-tice reálných čísel

  - sčítání ... po složkách
  - natahování ... po složkách

- akce $V \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$

  ... po složkách

- požadavky 1) - 3) ... ✓

<u>**Pozn**</u> ... stačí vlastnosti $+$ a $\cdot$ v $\mathbb{R}$

KANONICKÝ AF. PROSTOR SE ZAMĚŘENÍM V

- vektory V . . . lib. vektorový prostor
- body $\mathcal{A}$ . . . V
- akce $V \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$

  . . . $(v, u) \longmapsto u + v$

- požadavky 1) – 3) . . . ✓

<u>**Pozn**</u> . . . stačí vlastnosti $+$ ve V

. . . zobecnění předchozího příkladu

LINEÁRNÍ ALG. ROVNICE !

pro neznámé $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

- body a … $\left\{ \text{řešení soustavy rovnic } \boxed{\begin{matrix} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 3x_1 - x_3 = 4 \end{matrix}} \right\} =$

$$= \left\{ \begin{matrix} x_1 = t \\ x_2 = 3 - 2t \\ x_3 = -4 + 3t \end{matrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

- vektory V … $\left\{ \text{řešení soustavy rovnic } \boxed{\begin{matrix} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_1 - x_3 = 0 \end{matrix}} \right\} =$

$$= \left\{ \begin{matrix} x_1 = t \\ x_2 = -2t \\ x_3 = 3t \end{matrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

  - sčítání a natahování … po složkách

(x_1, x_2, x_3)

- akce $V \times a \longrightarrow a$ … po složkách

- požadavky 1) – 3) … ✓

Pozn … podprostor stand. af. prostoru $\mathbb{R}^3$

… $a = \left\{ \boxed{\begin{matrix} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 3x_1 - x_3 = 4 \end{matrix}} \right\} \subset \left\{ \boxed{2x_1 + x_2 = 3} \right\} \subset \left\{ \boxed{3 = 3} \right\}$

$$\left\{ \begin{matrix} x_1 = t \\ x_2 = 3 - 2t \\ x_3 = -4 + 3t \end{matrix} \;\middle|\; \underbrace{t \in \mathbb{R}}_{\text{dim } 1} \right\} \subset \left\{ \begin{matrix} x_1 = t \\ x_2 = 3 - 2t \\ x_3 = -4 + 3t + r \end{matrix} \;\middle|\; \underbrace{t, r \in \mathbb{R}}_{\text{dim } 2} \right\} \subset \left\{ \begin{matrix} x_1 = t \\ x_2 = s \\ x_3 = r \end{matrix} \;\middle|\; \underbrace{t, r, s \in \mathbb{R}}_{\text{dim } 3} \right\} = \mathbb{R}^3$$

(each set in the top row $=$ the set directly below it)

LINEÁRNÍ DIF. ROVNICE I.

- body a ... $\{$ primitivní funkce k funkci $\frac{1}{x}$ $\}$ =

  = $\{$ řešení dif. rovnice $\boxed{y' = \frac{1}{x}}$ $\}$ =

  $= \{ y = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + C \mid C \in \mathbb{R} \}$

- vektory V ... $\{$ řešení dif. rovnice $\boxed{y' = 0}$ $\}$ =

  $= \{ y = C \mid C \in \mathbb{R} \}$

  - sčítání a natahování ... funkcí

- akce $V \times a \longrightarrow a$ ... sčítání funkcí

- požadavky 1) – 3) ... ✓

Pozn ... stačí vlastnosti $+$ a $\cdot$ v $\mathbb{R}$

... podprostor v PROSTORU funkcí ...

dim 1

LINEÁRNÍ DIF. ROVNICE II.

- body a ... $\{$ řešení dif. rovnice $\boxed{y'' - 4y' + 5y = 10}\} =$

$$= \{ y = 2 + C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R} \}$$

- vektory V ... $\{$ řešení dif. rovnice $\boxed{y'' - 4y' + 5y = 0}\} =$

$$= \{ y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R} \}$$

  - sčítání a natahování ... funkcí

- akce $V \times a \longrightarrow a$ ... sčítání funkcí

- požadavky 1) - 3) ... ✓

Pozn ... stačí vlastnosti $+$ a $\cdot$ v $\mathbb{R}$

... podprostor v PROSTORU funkcí ...
dim 2

UMĚLÝ PŘÍKLAD

- $\mathcal{a} := \{ [x, \sin x] \mid x \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{R}^2$
- $\mathcal{a} \times \mathcal{a} \to \mathbb{R}^2$:

a) zúžení stand. přiřazení

$A = [a, \sin a]$, $B = [b, \sin b]$ $\rightsquigarrow$ $\overrightarrow{AB} := [b-a, \sin b - \sin a]$

... **NENÍ** af. prostor ("$\vec{a}$" $= \mathbb{R} \times \langle -2, 2 \rangle$ NENÍ vekt. prostor)

b) rozdíl na první složce

$A = [a, \sin a]$, $B = [b, \sin b]$ $\rightsquigarrow$ $\overrightarrow{AB} := [b-a, 0]$

... **JE** af. prostor se zaměřením $\vec{a} \cong \mathbb{R}$

c) rozdíl na druhé složce

$A = [a, \sin a]$, $B = [b, \sin b]$ $\rightsquigarrow$ $\overrightarrow{AB} := [0, \sin b - \sin a]$

... **NENÍ** af. prostor ("$\vec{a}$" $\cong \langle -2, 2 \rangle$ NENÍ vekt. prostor)

SHRNUTÍ

- několik MODELŮ

B .... $[b_1, b_2, \dots]$

$v = \overrightarrow{AB}$ .... $(v_1, v_2, \dots)$

A .... $[a_1, a_2, \dots]$

- několik důležitých PŘÍKLADŮ .... $\boxed{\text{řešení LINEÁRNÍCH rovnic}}$

- af. prostor $\mathcal{A}$ dim k je

$\cong$ stand. af. prostorem $\mathbb{R}^k$

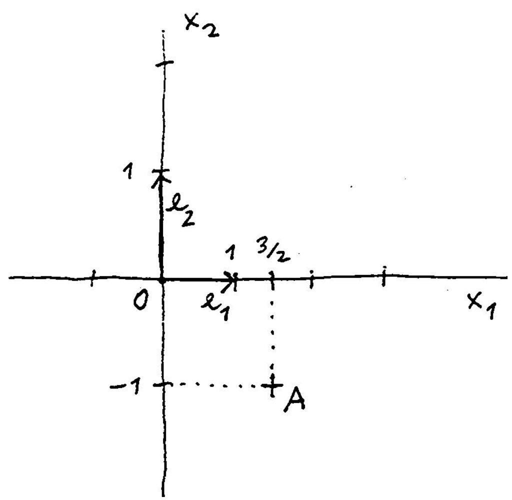
... dáno volbou souř. sostavy ...

$\subseteq$ stand. af. prostoru $\mathbb{R}^n$

... $\boxed{\underbrace{r \text{ lin. NEZÁVISLÝCH rovnic, } n \text{ neznámých}}_{k = n - r}}$

AFINNÍ SOUŘADNICE

- příklady
- obecně
- přechody



NAPŘ.

- $V = \{$ řešení dif. rovnice $\boxed{y'' - 4y' + 5y = 0}\} =$

$$= \{ y = C_1 \underline{e^{2x}\cos x} + C_2 \underline{e^{2x}\sin x} \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R} \}$$

$$\cong$$

$$\{ (C_1, C_2) \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R} \} =$$

$=$ stand. vekt. prostor $\mathbb{R}^2$

- $a = \{$ řešení dif. rovnice $\boxed{y'' - 4y' + 5y = 10}\} =$

$$= \{ y = \underline{2} + C_1 \underline{e^{2x}\cos x} + C_2 \underline{e^{2x}\sin x} \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R} \}$$

$$\cong$$

$$\{ [C_1, C_2] \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R} \} =$$

$=$ stand. af. prostor $\mathbb{R}^2$

- v obou případech "$\cong$"

IZOMORFISMUS

  - znamená BIJEKTIVNÍ přiřazení ZACHOVÁVAJÍCÍ strukturu
  - je dáno VOLBOU báze

resp. báze a "počátku"

part. řešení nehomogenní rovnice

fund. řešení homogenní rovnice

OBECNĚ

- prvky obecného vekt. prostoru V

  ... lineární kombinace $v = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots$

- prvky obecného af. prostoru $\mathcal{A}$

  ... "něco + lineární kombinace" $A = P + c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots$

- $(e_1, e_2, \dots)$ je BÁZE ve V $\Longleftrightarrow$

  $\Longleftrightarrow$ n-tice čísel $(c_1, c_2, \dots)$ určena JEDNOZNAČNĚ!

- AFINNÍ SOUŘ. SOUSTAVA (repér)

  = bod $P \in \mathcal{A}$ + báze $(e_1, e_2, \dots)$ ve V

  (počátek)

- SOUŘADNICE bodu A vzhledem k repéru $(P; e_1, e_2, \dots)$

  = souřadnice vektoru $\overrightarrow{PA}$ vzhledem k bázi $(e_1, e_2, \dots)$.

ZÁVĚRY

- VOLBA souř. soustavy $\rightsquigarrow$ $a \overset{\sim}{=} \mathbb{R}^n$

  bod $A \overset{1:1}{\longmapsto}$ souřadnice A

  rozdíl $a \times a \to V$ odp. stand. rozdílu po složkách

- ZEJMÉNA:

  všechny af. prostory STEJNÉ DIM. jsou navzájem IZOMORFNÍ!

  $$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, dashed, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & a' \arrow[dl, leftrightarrow] \\ & \mathbb{R}^n & \end{tikzcd}$$

- OVŠEM:

  jiné souř. soustavy $\rightsquigarrow$ jiná ztotožnění ...

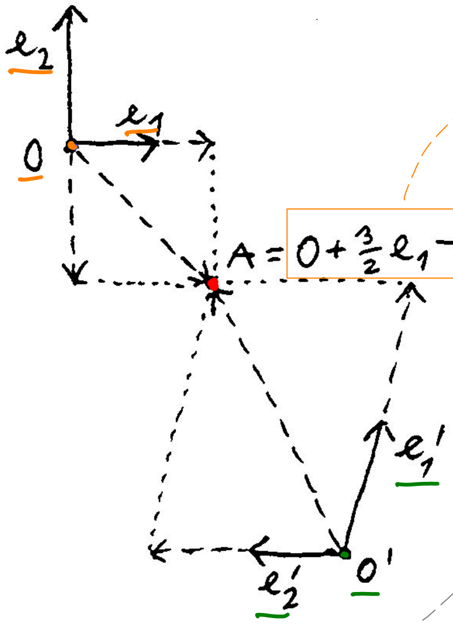
PŘECHODY

- Např.

$O = O' + 3e_1' + 4e_2'$

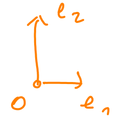
$e_1 = -e_2'$

$e_2 = e_1' + \frac{1}{3}e_2'$



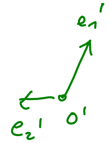
$A = \boxed{O + \frac{3}{2}e_1 - e_2} = \boxed{O' + 2e_1' + \frac{13}{6}e_2'}$

souřadnice A vzhledem k



... $[\frac{3}{2}, -1]$

souřadnice A vzhledem k



... $[2, \frac{13}{6}]$

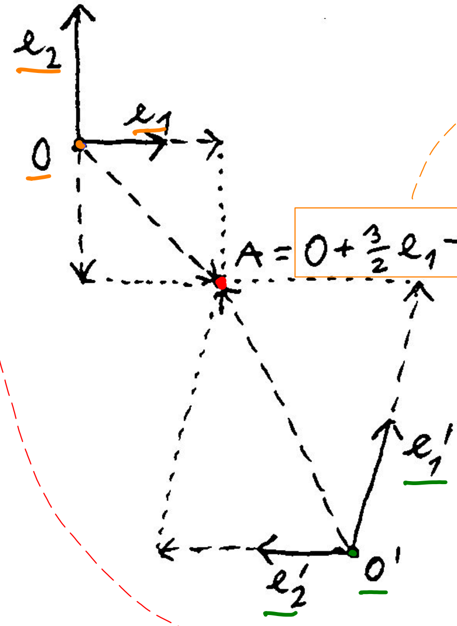
PŘECHODY

- Např.

$O = O' + 3e_1' + 4e_2'$

$e_1 = -e_2'$

$e_2 = e_1' + \frac{1}{3}e_2'$



$A = O + \frac{3}{2}e_1 - e_2 = O' + 2e_1' + \frac{13}{6}e_2'$

souřadnice A vzhledem k … $[\frac{3}{2}, -1]$

souřadnice A vzhledem k … $[2, \frac{13}{6}]$

- OBECNĚ

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{13}{6} \end{pmatrix}$$

souřadnice $\overrightarrow{O'O}$ vzhledem k bázi

matice přechodu od báze k bázi

AFINNÍ ZOBRAZENÍ

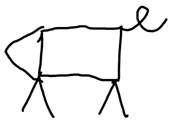
= zobrazení zachovávající AFINNÍ STRUKTURU . . .

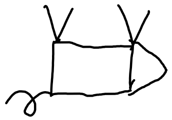
- příklady z dřívějška
- upřesnění
- ZÁKLADNÍ VĚTY
- výhledy

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \times \mathcal{A} \arrow[r, "f \times f"] \arrow[d] & \mathcal{A}' \times \mathcal{A}' \arrow[d] \\
\vec{\mathcal{A}} \arrow[r, dashed, "\vec{f}"'] & \vec{\mathcal{A}}'
\end{tikzcd}$$

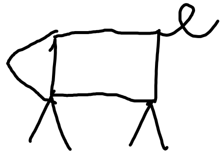
PŘÍKLADY Z LOŇSKA

VZOR | OBRAZ

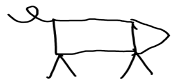




"otočení"



"zvětšení"

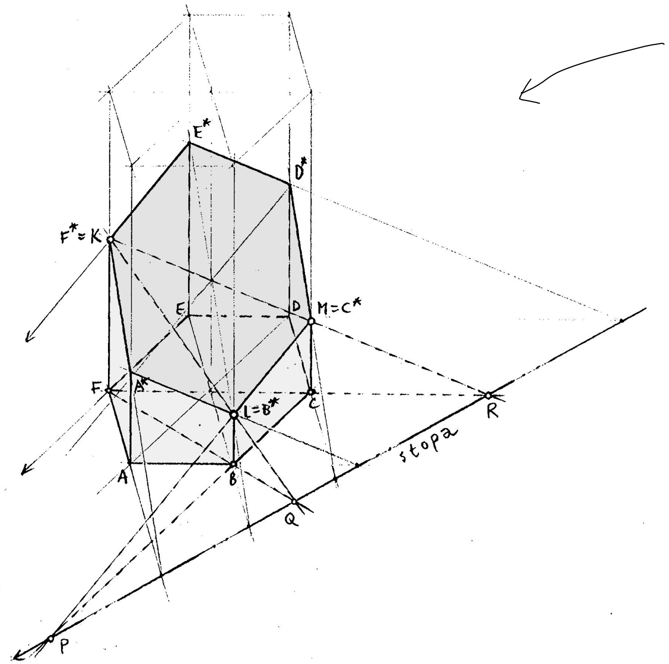


"zmáčknutí"

"naklonění"

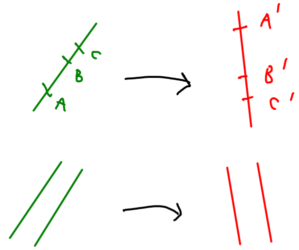
. . .

"rovnob. průmět hranolu a jeho řezu"



VÍME, ŽE ZACHOVÁVÁ:

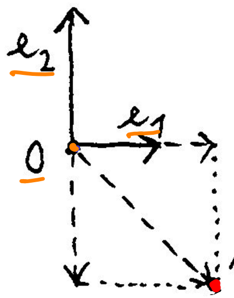
- kolineárnost
- poměry trojic kolin. bodů
- rovnoběžnost

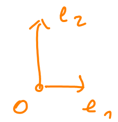


... kdykoli to je možné

(může degenerovat ⟋ → ·)

PŘÍKLADY Z LETOŠKA

-  $A = \boxed{O + \frac{3}{2}e_1 - e_2}$

  souřadnice A vzhledem k  ... $[\frac{3}{2}, -1]$

- a = { řešení dif. rovnice $\boxed{y'' - 4y' + 5y = 10}$ } =

$$= \{ y = 2 + C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R} \}$$

$$\cong$$

$$\{ [C_1, C_2] \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R} \} =$$

= stand. af. prostor $\mathbb{R}^2$

- volba souř. soustavy $\rightsquigarrow$ $a \cong \mathbb{R}^n$

  bod A $\overset{1:1}{\longmapsto}$ souřadnice A

  rozdíl $a \times a \to V$ odp. stand. rozdílu po složkách

  ... AFINNÍ IZOMORFISMUS

LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

= zobrazení zachovávající LINEÁRNÍ STRUKTURU,

tj. strukturu VEKT. PROSTORU,

tj. LINEÁRNÍ KOMBINACE VEKTORŮ,

tj. $f : V \longrightarrow V'$ takové, že

$$f(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots) = c_1 f(v_1) + c_2 f(v_1) + \cdots$$

pro lib. $v_1, v_2, \ldots \in V$ a $c_1, c_2, \ldots \in \mathbb{R}$.

- f je LINEÁRNÍ $\iff$ lze vyjádřit pomocí MATIC takto:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}} \cdot \boxed{\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}} = \boxed{\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}}$$

matice zobrazení ... | souřadnice vzoru ... | souřadnice obrazu ...

vzhledem k nějakým bázím

AFINNÍ ZOBRAZENÍ

$V = \vec{a}$

= zobrazení zachovávající AFINNÍ STRUKTURU,

tj. strukturu AFINNÍHO PROSTORU,

tj. $f : \mathcal{a} \longrightarrow \mathcal{a}'$ takové, že

$$f(A + c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots) = f(A) + c_1 \vec{f}(v_1) + c_2 \vec{f}(v_1) + \dots$$

pro lib. $A \in \mathcal{a}$ a $v_1, v_2, \dots \in V$ a $c_1, c_2, \dots \in \mathbb{R}$,

kde $\vec{f} : V \longrightarrow V'$ je nějaké (LINEÁRNÍ) zobrazení.

- f je AFINNÍ $\iff$ lze vyjádřit pomocí MATIC takto:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}} + \boxed{\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}} \cdot \boxed{\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}} = \boxed{\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}}$$

obraz počátku …

matice lin. zobrazení $\vec{f}$ …

souřadnice vzoru …

souřadnice obrazu …

vzhledem k nějakým af. reperům

AFINNÍ ZOBRAZENÍ $\quad f : a \to a'$

(A) algebraicky

$\iff$ f indukuje $\vec{f} : V \to V'$ LINEÁRNÍ

takové, že $\quad f(A+v) = f(A) + \vec{f}(v)$,

resp. $\quad \vec{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$, $\quad$ pro lib. $A, B \in a$
a $v \in V = \vec{a}$.

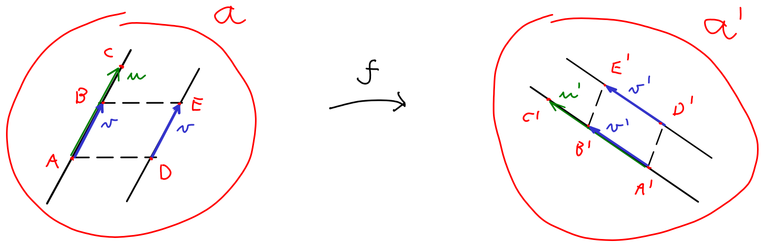
(G) geometricky

$\iff$ f zachovává
(1) kolineárnost
(2) poměry trojic kolin. bodů
(3) rovnoběžnost

... kdykoli to je možné (může degenerovat $\nparallel \to \parallel$)

- SKLOUBENÍ

$$\boxed{(A) \iff (G)}$$



ZÁKLADNÍ VĚTA AFINNÍ GEOMETRIE

- Dosud zmiňované vlastnosti af. zobrazení jsou svázány víc než se zdá:

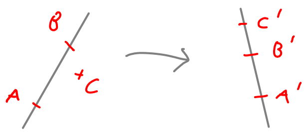
- **ZÁKLADNÍ VĚTA**

> Pro BIJEKTIVNÍ $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ mezi af. prostory $\dim \geq 2$ platí:
>
> f je AFINNÍ $\Longleftrightarrow$ zachovává KOLINEÁRNOST.

- Implikace "$\Rightarrow$" je zřejmá.

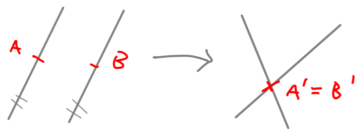
- **Myšlenky důkazu** implikace "$\Leftarrow$" jsou:

a) na přímku se nezobrazuje víc než přímka



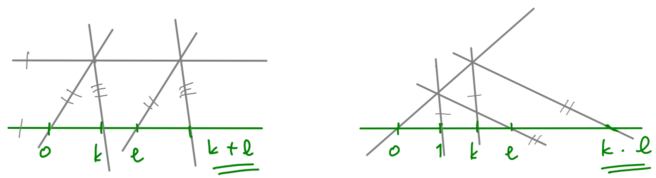
... spor se SURJEKTIVNOSTÍ

b) zachovává se rovnoběžnost



... spor s INJEKTIVNOSTÍ

c) zachovávají se poměry ...



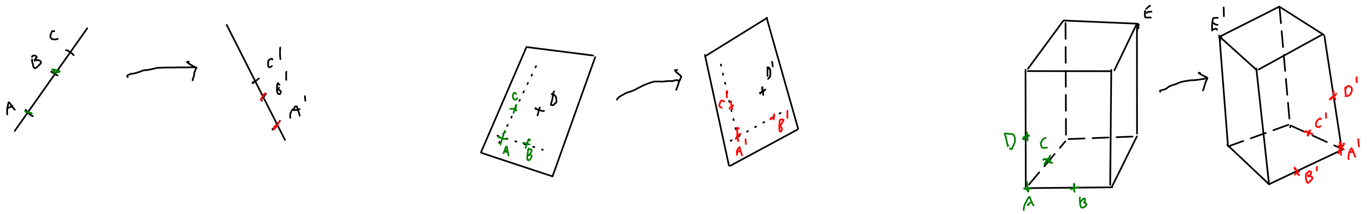
... pomocí // lze realizovat + a · v $\mathbb{R}$

VĚTA O URČENOSTI

- z minulého semestru víme, že

> PROSTÉ (resp. ne příliš degenerované)
> AFINNÍ zobrazení z prostoru dim n je určeno
> obrazy $n+1$ bodů v obecné poloze.

- Dokazovali jsme konstruktivně a induktivně pro $n = 1, 2, 3 \dots$



- Nyní víme, že

> Libovolné
> AFINNÍ zobrazení z prostoru dim n je určeno
> obrazy $n+1$ bodů v obecné poloze.

- **Důkaz:**

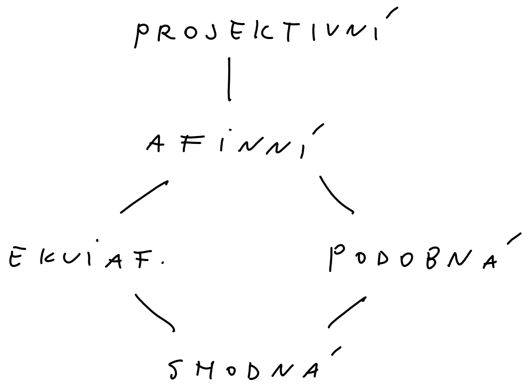
AFINNÍ $f : a \longrightarrow a'$ je určeno obrazem 1 bodu a LINEÁRNÍM $\vec{f} : \vec{a} \longrightarrow \vec{a}'$,

LINEÁRNÍ $\vec{f} : \vec{a} \longrightarrow \vec{a}'$ je určeno obrazem BÁZE,

BÁZE má n prvků.

SHRNUTÍ / VÝHLEDY

- Máme několik **ekvivalentních** vymezení AFINNÍCH zobr.
- Některé vlastnosti plynou z jiných, **další** budeme přidávat..
- Diskuzi o zobrazeních budeme **zjemňovat / rozšiřovat** podle vzoru . . .



- Základní věta AFINNÍ geom. se bude rýmovat se **základní větou PROJEKTIVNÍ geometrie**,
- což v důsledku bude znamenat, že

„VŠECHNO SE VLEZE DO NĚJAKÉ **MATICE**!“

POZNÁMKY K VYJÁDŘENÍ AF. PODPR.

- rovnicově (implicitně)
- parametricky (explicitně)
- jinak (...)

- přechod od jednoho ke druhému
- přechod od druhého k prvnímu
- apod.

PŘÍKLAD

pro neznámé $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$, tj. $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \left\{ \text{řešení soustavy rovnic } \boxed{\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 - 5x_2 - 4x_3 &= 1 \\ -x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}} \right\} =$$

$$= \left\{ \text{řešení soustavy rovnic } \boxed{\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 3 \\ 3x_1 - x_3 &= 4 \end{aligned}} \right\} =$$

$$= \ldots$$

ekvivalentní SOUSTAVY ROVNIC

$$= \left\{ \begin{aligned} x_1 &= t \\ x_2 &= 3 - 2t \\ x_3 &= -4 + 3t \end{aligned} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{aligned} x_1 &= 3/2 - s \\ x_2 &= s \\ x_3 &= 1/2 - 3s \end{aligned} \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \ldots$$

ekvivalentní PARAMETRIZACE

2 lin. NEZÁVISLÉ rovnice 3 neznámé $\dim \mathcal{B} = 3 - 2 = 1$

OBECNĚ

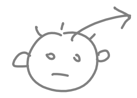
Pro lib. af. prostor $\mathcal{A}$:

- volba souř. soustavy ZTOTOŽŇUJE $\mathcal{A} \cong \mathbb{R}^n$, kde $n = \dim \mathcal{A}$

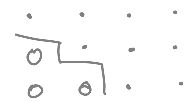
  ⇝ všechny výpočty ve stand. prostoru $\mathbb{R}^n$ . . .

Pro lib. af. podprostor $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \cong \mathbb{R}^n$:

- od rovnicového vyjádření k parametrickému
  - stačí **vyřešit** soustavu,
  - pro MÁLO rovnic umíme z hlavy,
  - OBECNĚ umíme **eliminovat** neznámé . . .



- od parametrického vyjádření k rovnicovému
  - stačí **najít** soustavu,
  - pro MÁLO parametrů umíme z hlavy,
  - OBECNĚ umíme **eliminovat** parametry . . .



- všudypřítomné POČTY ⇝

$$\boxed{\begin{array}{l} \underbrace{r \text{ lin. NEZÁVISLÝCH rovnic} \quad n \text{ neznámých}} \\ \dim \mathcal{B} = n - r \end{array}}$$

MŮŽE SE HODIT

- $\mathcal{B} = \{ P + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots \mid t_1, t_2, \dots \in \mathbb{R} \}$ $\longleftarrow$ $\dim \mathcal{B} = k$

- $X \in \mathcal{B} \iff X = P + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots$

  $\iff X - P = t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots$

  $\iff$ hodnost matice $(\vec{PX}, v_1, v_2, \dots) = k$

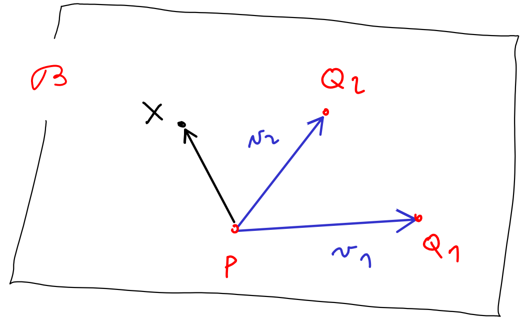
  $\iff$ všechny subdeterminanty řádu $> k$ z matice $(\vec{PX}, v_1, v_2, \dots)$ jsou 0

- Např. $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ ... dim 2

  $$\text{hodnost} \left(\begin{array}{c:c:c} x_1 & 1 & -1 \\ x_2 - 1 & 2 & 1 \\ x_3 - 2 & 0 & 3 \end{array} \right) = 2 \iff \det \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = 0$$

  $$\iff \boxed{2x_1 - x_2 + x_3 - 1 = 0}$$

JINÁ VYJÁDŘENÍ



- $X \in \mathcal{B} \iff X = P + t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots$

  $\iff X = P + t_1 (Q_1 - P) + t_2 (Q_2 - P) + \dots$

  $\iff$ "$X = (1 - t_1 - t_2 - \dots) P + t_1 Q_1 + t_2 Q_2 + \dots$"

  $\iff$ "$X = t_0 P + t_1 Q_1 + t_2 Q_2 + \dots$",

  kde $\boxed{t_0 + t_1 + t_2 + \dots = 1}$!

  "AFINNÍ KOMBINACE BODŮ"

  $t_0, t_1, t_2, \dots$ BARYCENTRICKÉ souřadnice ...

  (viz dále: těžiště, konvexní obaly, ...)

- Ve spec. případech se užívají další výhodná vyjádření ...

  (např. nadroviny, přímky)

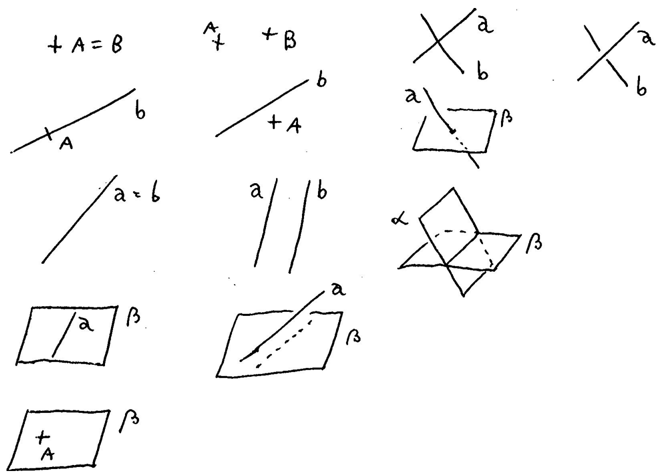
  (např. úsekové rovnice, Plückerovy souřadnice, ...)

VZÁJEMNÉ POLOHY AF. PODPR.

- průniky, součty a af. obaly

- vzájemné polohy

- postřehy, dodatky



PRŮNIK A SOUČET

- $\mathcal{B}, \mathcal{C} \leq \mathcal{A}$ ... af. podprostory, $\vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{C}} \leq \vec{\mathcal{A}}$ ... zaměření

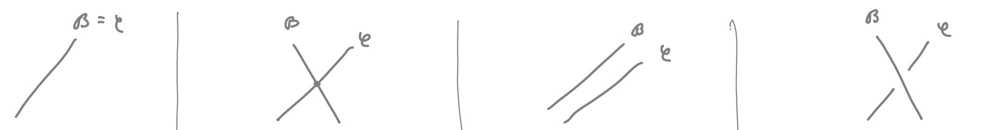
- PRŮNIK $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ je buď $\emptyset$,
  nebo af. podprostor
  se zaměřením $\overrightarrow{\mathcal{B} \cap \mathcal{C}} = \vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}$.

- SJEDNOCENÍ $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$ může a nemusí být af. podprostor.

- SOUČET $\mathcal{B} + \mathcal{C}$ = AFINNÍ OBAL $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$
  = nejmenší AFINNÍ podprostor obsahující $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$.

- ZAMĚŘENÍ $\overrightarrow{\mathcal{B} + \mathcal{C}}$ může a nemusí být rovno $\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}$ ...

všechno to NĚJAK souvisí se vzájemnými polohami podpr...



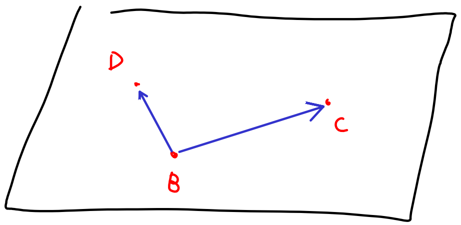
dim $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$	1	0	–	–
dim $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}$	1	0	1	0
dim $\mathcal{B} + \mathcal{C}$	1	2	2	3
dim $\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}$	1	2	1	2

POZNÁMKA

- Body $\overbrace{B, C, D, \dots}^{k}$ jsou v OBECNÉ POLOZE

$\iff$ vektory $\overbrace{\vec{BC}, \vec{BD}, \dots}^{k-1}$ jsou lin. NEZÁVISLÉ

$\iff$ dim součtu $B + C + D + \dots$ je MAX. možná. $k-1$



součet $B+C+D = \{ B + r\vec{BC} + s\vec{BD} \mid r, s \in \mathbb{R} \}$

$= \{ \text{"}t_0 B + t_1 C + t_2 D\text{"} \mid t_0 + t_1 + t_2 = 1 \}$

B, C, D v OBECNÉ POLOZE $\iff$ parametry určeny JEDNOZNAČNĚ.

OBECNÁ SOUVISLOST

- $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ ... af. podprostory, $\vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{C}} \subseteq \vec{\mathcal{A}}$ ... zaměření

- Platí

$$\boxed{\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset \overset{!}{\iff} \overrightarrow{\mathcal{B}+\mathcal{C}} = \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}} \iff \overrightarrow{BC} \in \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}} \text{ pro lib. } B \in \mathcal{B} \text{ a } C \in \mathcal{C}.}$$

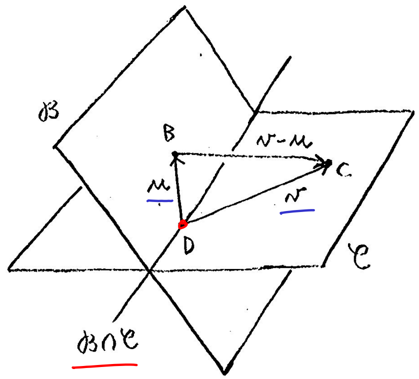
- Důkaz:

(a) $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$

$\implies$ ex. D : $D \in \mathcal{B}$ a $D \in \mathcal{C}$

$\implies$ $\overrightarrow{DB} \in \vec{\mathcal{B}}$ a $\overrightarrow{DC} \in \vec{\mathcal{C}}$ ...

$\implies$ $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} \in \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}$ ...



(b) $\overrightarrow{BC} \in \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}$ ...

$\implies$ $\overrightarrow{BC} = C - B = u + v$, kde $u \in \vec{\mathcal{B}}$ a $v \in \vec{\mathcal{C}}$

$\implies$ $\underbrace{C - v}_{\mathcal{C}} = \underbrace{B + u}_{\mathcal{B}}$

$\implies$ $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$.

POČETNÍ SOUVISLOST

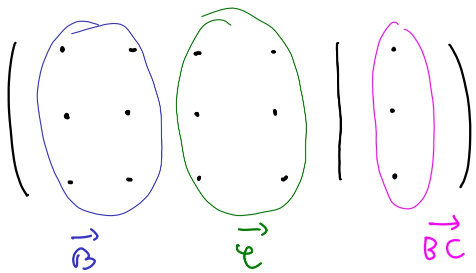
- $\mathcal{B} = \{ B + t_1 u_1 + \dots \}$, $\mathcal{C} = \{ C + s_1 v_1 + \dots \}$

- $D \in \mathcal{B} \cap \mathcal{C} \iff D = B + t_1 u_1 + \dots = C + s_1 v_1 + \dots$

$$\Updownarrow$$

$$t_1 u_1 + \dots - s_1 v_1 - \dots = C - B$$

$$\Updownarrow$$



- $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset \iff$ soustava má řešení $\iff$

$\iff \overrightarrow{BC}$ = lin. kombinace $u_1, \dots, v_1, \dots \iff$

$\iff \overrightarrow{BC} \in \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}$

VZÁJEMNÉ POLOHY

- $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ ... af. podprostory, $\vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{C}} \subseteq \vec{\mathcal{A}}$ ... zaměření

- Obecné definice:

  předp. $\dim \mathcal{B} \leq \dim \mathcal{C}$

  - INCIDENTNÍ $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ ... tj. $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \mathcal{B}$ = max. možný
  - RŮZNOBĚŽNÉ $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$ ... pokud $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$, ale NE max. možný
  - ROVNOBĚŽNÉ $\mathcal{B} \parallel \mathcal{C}$ ... pokud $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$ a $\boxed{\vec{\mathcal{B}} \subseteq \vec{\mathcal{C}}}$
  - MIMOBĚŽNÉ $\mathcal{B} \not\times \mathcal{C}$ ... jinak (tj. $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$ a $\vec{\mathcal{B}} \not\subseteq \vec{\mathcal{C}}$)

- Poznámka:
  - $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C} \iff \mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \mathcal{B}$ = max.
  - $\vec{\mathcal{B}} \subseteq \vec{\mathcal{C}} \iff \vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} = \vec{\mathcal{B}}$ = max.

- Přehledně:

$\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ \ $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}$	je max	není max
není $\emptyset$	$\subseteq$	$\times$
je $\emptyset$	$\parallel$	$\not\times$

POČETNÍ SOUVISLOSTI

- $\mathcal{B} = \{ B + t_1 u_1 + \dots \}$; $\mathcal{C} = \{ C + s_1 v_1 + \dots \}$

- $D \in \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$

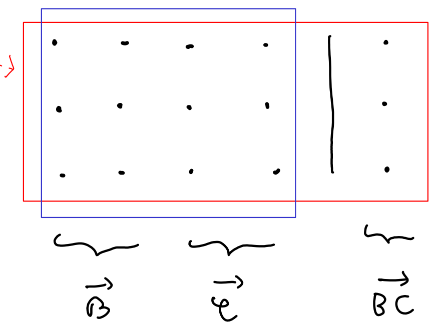
  $D = B + t_1 u_1 + \dots = C + s_1 v_1 + \dots$

  $t_1 u_1 + \dots - s_1 v_1 - \dots = C - B$

- $w \in \vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}$

  $w = t_1 u_1 + \dots = s_1 v_1 + \dots$

  $t_1 u_1 + \dots - s_1 v_1 - \dots = 0$



- ozn:

  $m = \max\{\dim \vec{\mathcal{B}}, \dim \vec{\mathcal{C}}\}$

  $n = \dim(\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}) =$ hodnost

  $\sigma = \dim(\overrightarrow{\mathcal{B} + \mathcal{C}}) =$
  $= \dim(\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}} + \vec{BC}) =$ hodnost

- zřejmě $m \leq n \leq \sigma$

- přičemž $m = n \iff \vec{\mathcal{B}} \subseteq \vec{\mathcal{C}}$ či $\vec{\mathcal{B}} \supseteq \vec{\mathcal{C}}$

  $n = \sigma \iff \mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$

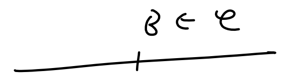
- TEDY:

$\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ \ $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}$	$m = n$	$m < n$
	je max	není max
$n = \sigma$: není $\emptyset$	$\subseteq$	X
$n < \sigma$: je $\emptyset$	//	X

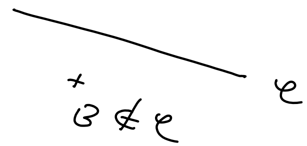
POZNÁMKY

- Předchozí OBECNÉ definice zahrnují jisté TRIVIÁLNÍ případy:

$\mathcal{B}$ = bod, $\mathcal{C}$ = cokoli ... buď INCIDENTNÍ



nebo ROUNOBĚŽNÉ



- Mezi všemi polohami,

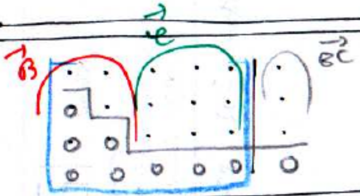
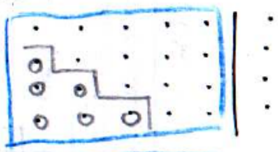
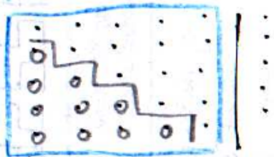
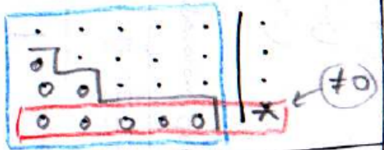
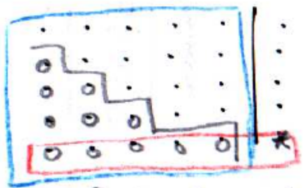
MIMOBĚŽNOST potřebuje "nejvíc místa"...

- Pokud je místa "opravdu hodně", může se stát, že $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}$ je netriv. (ex. společné vektory)

$\rightsquigarrow$ ČÁSTEČNĚ ROUNOBĚŽNÉ

PŘÍKLAD

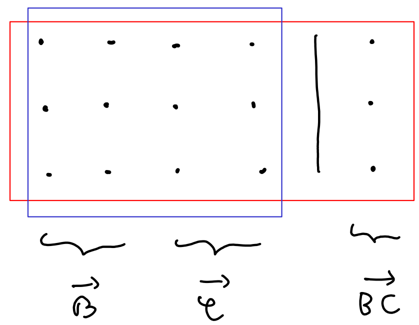
$$\underset{\text{dim } 2}{\mathcal{B}}, \underset{\text{dim } 3}{\mathcal{C}} \subseteq \underset{\text{dim } \underline{N}}{\mathcal{A}}$$

SOUSTAVA (*)	ŘEŠENÍ ($\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$)	VZÁJEMNÁ POLOHA	
	∞^2 (rovina)	$\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$	$N \geq 3$
	∞^1 (přímka)	$\mathcal{B} \times \mathcal{C}$	$N \geq 4$
	1 (bod)	$\mathcal{B} \times \mathcal{C}$	$N \geq 5$
	0	$\mathcal{B} \parallel \mathcal{C}$	$N \geq 4$
	0	$\mathcal{B} \not\times \mathcal{C}$	$\underline{\underline{N \geq 5}}$

↑ hodnost $\square$ nemůže být $< \underline{3} = \dim \mathcal{C}$

„kolik místa potřeba"

OBECNĚ $\quad \mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$



- ozn:

  $m = \max\{\dim \vec{\mathcal{B}}, \dim \vec{\mathcal{C}}\}$

  $n = \dim(\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}})$

  $o = \dim(\overrightarrow{\mathcal{B}+\mathcal{C}}) = \dim(\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}} + \vec{BC})$

  $N = \dim \mathcal{A}$

- zřejmě $\quad m \le n \le o \le N \quad \ldots$

- Platí

  - předp. $\mathcal{B} \nparallel \mathcal{C}$

    $\Longrightarrow \quad m < n < o \le N$

    $\Longrightarrow \quad m \le N - 2$.

  - Zejména NADROVINA nemůže být s ničím mimoběžná.

  - Předp. $\vec{\mathcal{B}}$ a $\vec{\mathcal{C}}$ KOMPLEMENTÁRNÍ

    $\Longrightarrow \quad n = o = N \quad$ a $\quad \overrightarrow{\mathcal{B} \cap \mathcal{C}} = \{0\}$

    $\Longrightarrow \quad \mathcal{B} \cap \mathcal{C} =$ BOD.

  - Apod.

SHRNUTÍ

- VZÁJEMNÉ POLOHY obecně pomocí
  - inkluzí $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$, $\vec{\mathcal{B}} \subseteq \vec{\mathcal{C}}$
  - průniků $\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$, $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}$
  - součtů $\mathcal{B} + \mathcal{C}$, $\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}$

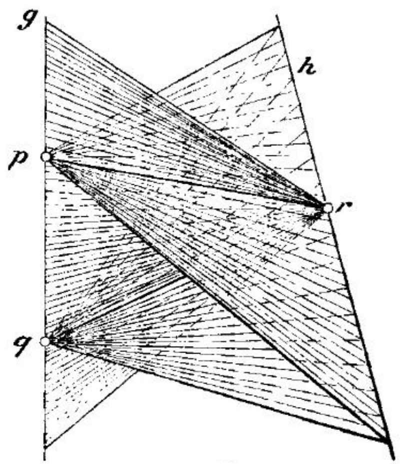
$$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C} \iff \mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \mathcal{B} \iff \mathcal{B} + \mathcal{C} = \mathcal{C}$$

- početně vidíme vše NARÁZ

- některé polohy vyžadují více MÍSTA než jiné

PŘÍČKY

- příčky
- příčky s podmínkou
- příčkové plochy



PŘÍČKY

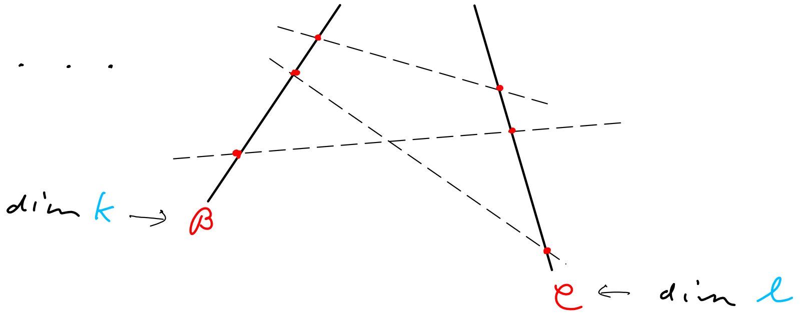
- $\mathcal{B}, \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ ... af. podprostory

  příp. jiné podmnožiny

- PŘÍČKA $\mathcal{B}, \mathcal{E}$ = přímka různoběžná jak s $\mathcal{B}$, tak s $\mathcal{E}$

  příp. úsečka

  ... celkem $k+l$ volných parametrů ...

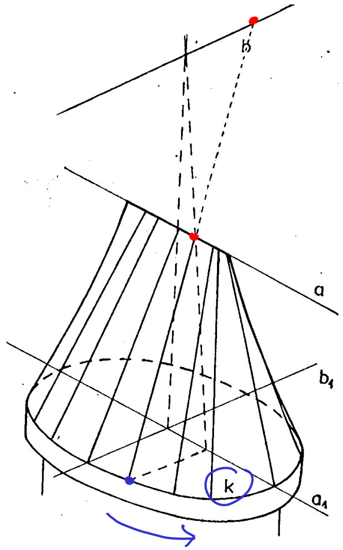


- Typická omezení:
  - příčka procházející daným BODEM
  - příčka rovnoběžná s daným SMĚREM

    } ⇝ genericky JEDNA
  - NEJKRATŠÍ příčka ⇝ VZDÁLENOST

- Typická uplatnění:
  - proměnná omezující podmínka

    ⇝ PŘÍMKOVÉ PLOCHY ...



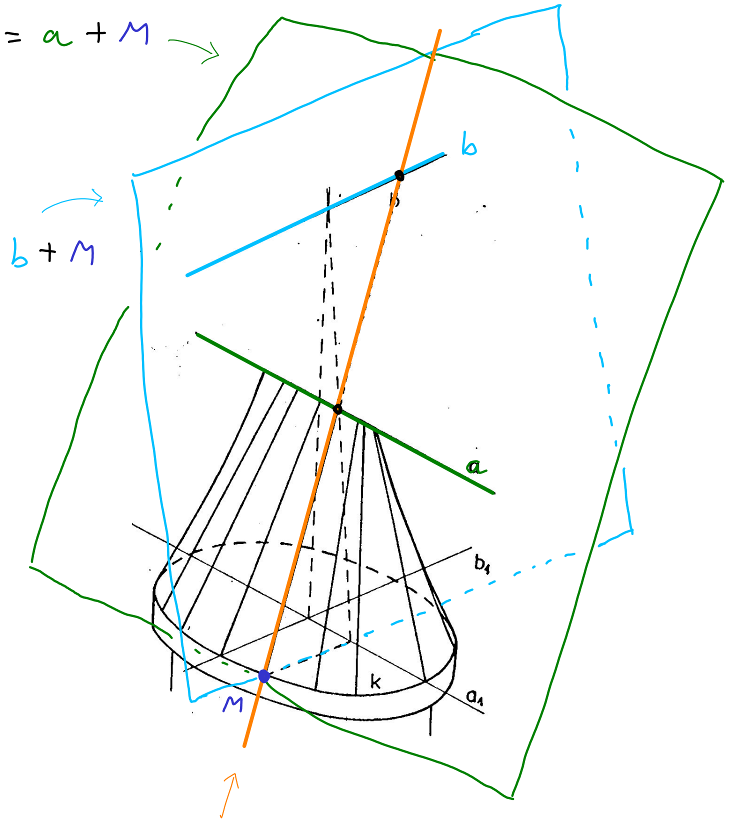
PŘÍČKY

• Typická řešení

(a) průnik NADPROSTORŮ:

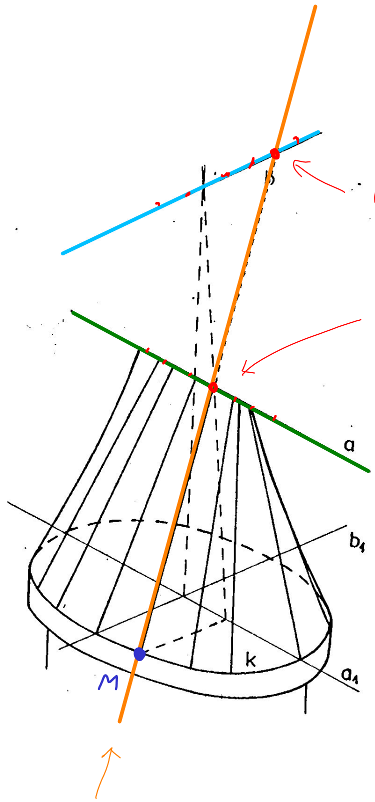
$\alpha = a + M$

$\beta = b + M$



$\boxed{p = \alpha \cap \beta}$

(b) spojnice KONCOVÝCH BODŮ:



$B \in b$

$A \in a$

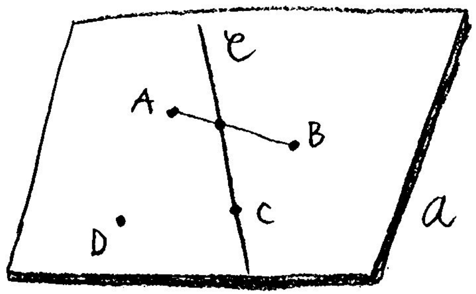
tak, aby A, B, M kolin.

tj. $\boxed{\overrightarrow{MA} = k \cdot \overrightarrow{MB}}$

$p = A + B$

USPOŘÁDÁNÍ A POD.

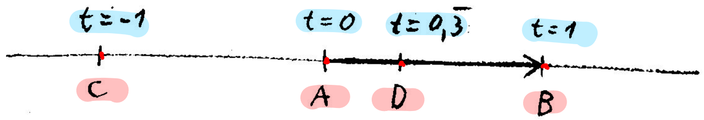
- uspořádání bodů na přímce, ÚSEČKA
- POLOprostory a jejich průniky
- KONVEXNÍ množiny a obaly
- poznámky k vyjádření



USPOŘÁDÁNÍ

- {body na afinní přímce} $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ {reálná čísla}

  viz parametrizaci $\{A + t\overrightarrow{AB} \mid t \in \mathbb{R}\}$ ...



- uspořádání na $\mathbb{R}$ ⇝ **uspořádání na přímce**

  $0 \le \frac{1}{3}$ ⇝ "$A \le D$" apod.

- V závislosti na parametrizaci máme dvě možná uspořádání

  buď "$A \le D \le B$" nebo "$A \ge D \ge B$"

- Nezávisle na parametrizaci máme relaci **MEZI**!

  "D je mezi A a B", pokud "$A \le D \le B$" nebo "$A \ge D \ge B$"

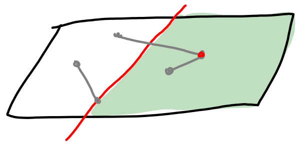
- **ÚSEČKA** AB = {body na přímce AB, které jsou MEZI A a B}

  tj. včetně krajních bodů

POLOPROSTORY

- polopřímka

- polorovina



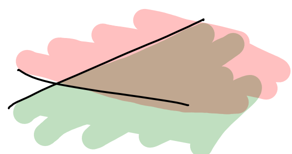
⋮

OBECNĚ

- NADrovina $\mathcal{N}$ af. prostoru $\mathcal{A}$ určuje dva POLOPROSTORY:
- Body A a B v **OPAČNÝCH** poloprostorech vzhledem k $\mathcal{N}$, pokud průnik $AB \cap \mathcal{N}$ je vnitřním bodem ÚSEČKY AB.
- POLOPROSTOR je určen hraniční NADROVINOU $\mathcal{N}$ a BODEM $B \notin \mathcal{N}$,
- hraniční NADrovina patří do obou poloprostorů, ...

ODVOZENÉ VĚCI

- PRŮNIKY poloprostorů ⇝ ÚHEL, TROJÚHELNÍK, ...



KONVEXNÍ MNOŽINY

- ANO : 
- NE : 

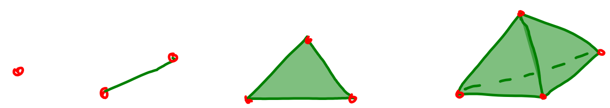
OBECNĚ:

- Podmnožina $K \subseteq \mathcal{A}$ je **KONVEXNÍ**, pokud pro lib. $A, B \in K$ taková celá úsečka AB leží v K.

JAKO OBVYKLE:

- PRŮNIK konvexních množin je buď $\emptyset$, nebo konvexní.
- SJEDNOCENÍ konvexních množin může a nemusí být konvexní.
- **KONVEXNÍ OBAL** množiny $M \subseteq \mathcal{A}$ = nejmenší KONVEXNÍ množina obsahující M.

SIMPLEXY A VYJÁDŘENÍ



SIMPLEXY ≈ nejjednodušší konvexní množiny

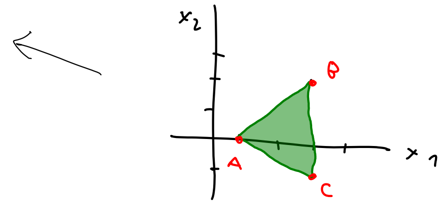
= konvexní obaly BODŮ v obecné poloze

VYJÁDŘENÍ .... pomocí **nerovností** :

- parametricky .... $\triangle ABC = \left\{ A + t\,\vec{AB} + s\,\vec{AC} \;\middle|\; \boxed{\begin{array}{l} 0 \le t \le 1 \\ 0 \le s \le 1 \\ 0 \le t+s \le 1 \end{array}} \right\}$

- afinní kombinace .... $\triangle ABC = \left\{ t_0 A + t_1 B + t_2 C \;\middle|\; \boxed{\begin{array}{c} t_0 + t_1 + t_2 = 1 \\ 0 \le t_0, t_1, t_2 \le 1 \end{array}} \right\}$

- rovnicově .... $\triangle ABC = \left\{ \boxed{\begin{array}{r} x_1 - x_2 \ge 1 \\ x_1 \le 3 \\ x_1 + 2x_2 \ge 1 \end{array}} \right\}$

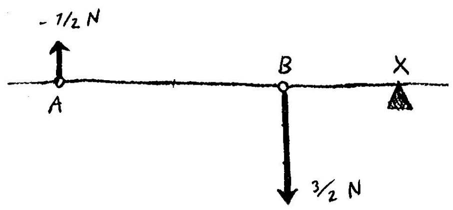


POZNÁMKY :

- SIMPLEX = průnik poloprostorů v rámci af. obalu bodů.
- NEJŠikovnější vyjádření = afinní kombinace ....

TĚŽIŠTĚ A POD.

- jiný pohled na af. kombinace bodů
- těžiště a těžišťové (= barycentrické) souřadnice
- typické užití a poznámky



AFINNÍ KOMBINACE JINAK

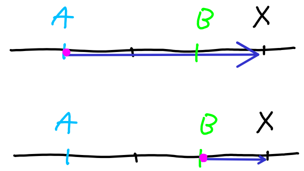
$$\boxed{t_0 + t_1 = 1} \; !$$

- Známe:

$$X = \underbrace{-\tfrac{1}{2}}_{t_0} A + \underbrace{\tfrac{3}{2}}_{t_1} B$$

$$= \left(1 - \tfrac{3}{2}\right) A + \tfrac{3}{2} B = A + \tfrac{3}{2} \overrightarrow{AB}$$

$$= -\tfrac{1}{2} A + \left(1 + \tfrac{1}{2}\right) B = B - \tfrac{1}{2} \overrightarrow{BA}$$



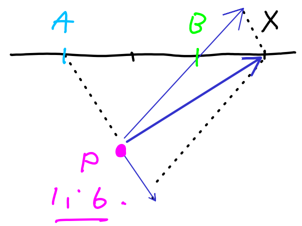
← obvyklé PARAMETRIZACE bodů na přímce

- Obecněji:

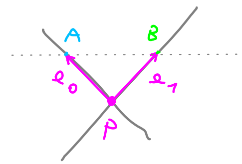
$$X = -\tfrac{1}{2} A + \tfrac{3}{2} B$$

$$= -\tfrac{1}{2}\left(P + \overrightarrow{PA}\right) + \tfrac{3}{2}\left(P + \overrightarrow{PB}\right)$$

$$= \underbrace{\left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}\right)}_{1} P - \tfrac{1}{2} \overrightarrow{PA} + \tfrac{3}{2} \overrightarrow{PB}$$



← přímka $t_0 + t_1 = 1$ v SOUŘADNICÍCH:

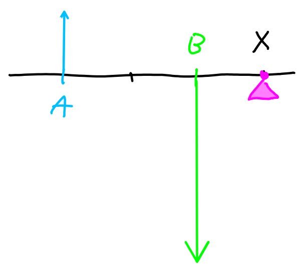


- Rovnováha:

$$X = -\tfrac{1}{2} A + \tfrac{3}{2} B$$

$$\underbrace{\left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}\right)}_{1} X = -\tfrac{1}{2} A + \tfrac{3}{2} B$$

$$0 = -\tfrac{1}{2} \overrightarrow{XA} + \tfrac{3}{2} \overrightarrow{XB}$$



← těžiště HMOTNÉ SOUSTAVY:

PŘEHLEDNĚ

- AFINNÍ KOMBINACE BODŮ:

$t_A A + t_B B$

			A		B				
t_A	…	2	3/2	1	1/2	0	−1/2	−1	−3/2
t_B	…	−1	−1/2	0	1/2	1	3/2	2	5/2

$t_A + t_B = 1$

$$\text{Přímka } AB = \{ t_A A + t_B B \mid t_A + t_B = 1 \}$$

$$\text{Polopřímka } AB = \{ t_A A + t_B B \mid t_A + t_B = 1,\ t_B \geq 0 \}$$

$$\text{Polopřímka } BA = \{ t_A A + t_B B \mid t_A + t_B = 1,\ t_A \geq 0 \}$$

$$\text{Úsečka } AB = \{ t_A A + t_B B \mid t_A + t_B = 1,\ t_A \geq 0,\ t_B \geq 0 \}$$

- BODOVÉ HMOTNÉ SOUSTAVY:

váhy

$m_A + m_B \neq 0$ $\quad A(m_A) \quad B(m_B) \quad T(m_A + m_B)$

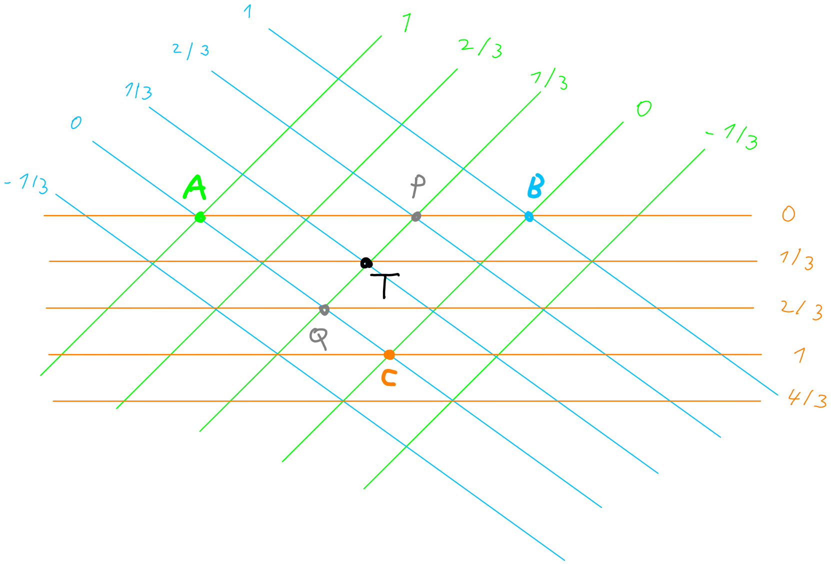
T = těžiště, pokud $m_A \overrightarrow{TA} + m_B \overrightarrow{TB} = 0$,

$$\text{tj. } T = \frac{m_A}{m_A + m_B} A + \frac{m_B}{m_A + m_B} B$$

barycentrické souřadnice

VÍC BODŮ

- AFINNÍ KOMBINACE BODŮ:



$$P = \tfrac{1}{3} A + \tfrac{2}{3} B$$

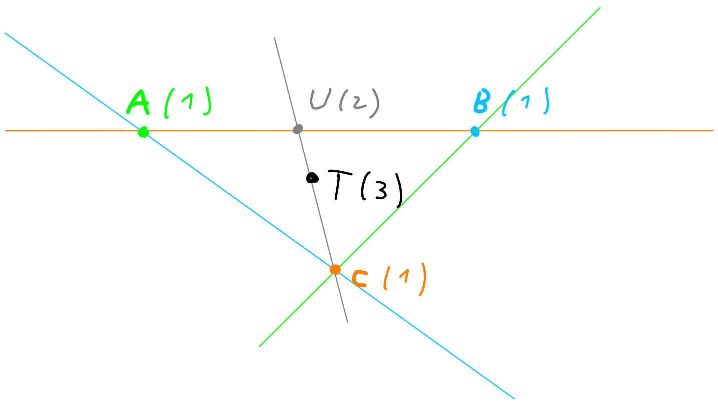
$$Q = \tfrac{1}{3} A + \tfrac{2}{3} C$$

$$T = \tfrac{1}{2} P + \tfrac{1}{2} Q$$

$$= \tfrac{1}{2} \left(\tfrac{1}{3} A + \tfrac{2}{3} B + \tfrac{1}{3} A + \tfrac{2}{3} C \right)$$

$$= \tfrac{1}{3} A + \tfrac{1}{3} B + \tfrac{1}{3} C$$

- BODOVÉ HMOTNÉ SOUSTAVY:



$$U = \frac{1}{1+1} A + \frac{1}{1+1} B \qquad \text{tj.} \quad 1\,\overrightarrow{UA} + 1\,\overrightarrow{UB} = 0$$

$$= \tfrac{1}{2} A + \tfrac{1}{2} B$$

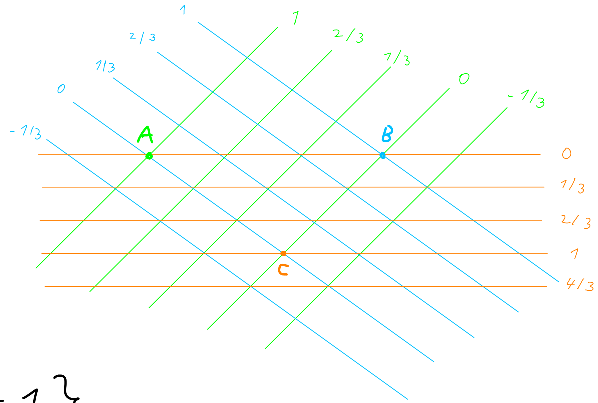
$$T = \frac{2}{1+2} U + \frac{1}{1+2} C \qquad \text{tj.} \quad 2\,\overrightarrow{TU} + 1\,\overrightarrow{TC} = 0$$

$$= \tfrac{2}{3} \left(\tfrac{1}{2} A + \tfrac{1}{2} B \right) + \tfrac{1}{3} C$$

$$= \tfrac{1}{3} A + \tfrac{1}{3} B + \tfrac{1}{3} C \qquad \text{tj.} \quad 1\,\overrightarrow{TA} + 1\,\overrightarrow{TB} + 1\,\overrightarrow{TC} = 0$$

VÍC BODŮ – PŘEHLEDNĚ

- AFINNÍ KOMBINACE BODŮ:



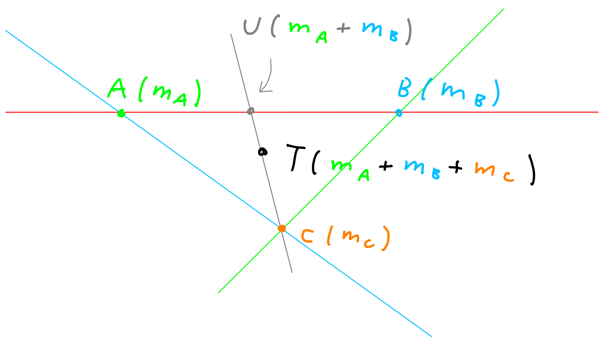
$$\text{Rovina } ABC = \{ t_A A + t_B B + t_C C \mid t_A + t_B + t_C = 1 \}$$

$$\text{Polorovina } AB + C = \{ t_A A + t_B B + t_C C \mid t_A + t_B + t_C = 1,\ t_C \geq 0 \}$$

$$\text{Úhel } ABC = \{ t_A A + t_B B + t_C C \mid t_A + t_B + t_C = 1,\ t_A \geq 0,\ t_C \geq 0 \}$$

$$\text{Trojúhelník } ABC = \{ t_A A + t_B B + t_C C \mid t_A + t_B + t_C = 1,\ t_A \geq 0,\ t_B \geq 0,\ t_C \geq 0 \}$$

- BODOVÉ HMOTNÉ SOUSTAVY:



$$U = \frac{m_A}{m_A + m_B} A + \frac{m_B}{m_A + m_B} B \qquad \text{tj. } m_A \overrightarrow{UA} + m_B \overrightarrow{UB} = 0$$

$$T = \frac{m_A + m_B}{m_A + m_B + m_C} U + \frac{m_C}{m_A + m_B + m_C} C = \dots \qquad \text{tj. } (m_A + m_B)\overrightarrow{TU} + m_C \overrightarrow{TC} = 0$$

$$= \frac{m_A}{m_A + m_B + m_C} A + \frac{m_B}{m_A + m_B + m_C} B + \frac{m_C}{m_A + m_B + m_C} C \qquad \text{tj. } m_A \overrightarrow{TA} + m_B \overrightarrow{TB} + m_C \overrightarrow{TC} = 0$$

OBECNĚ

- $\mathcal{A}$ = afinní prostor, $\mathcal{B}$ = afinní obal $\{A_0, \dots, A_k\}$,
  kde $\{A_0, \dots, A_k\}$ = množina bodů v OBECNÉ poloze.

- **BARYCENTRICKÉ souřadnice** bodu $X \in \mathcal{B}$ vzhledem k $(A_0, \dots, A_k)$
  = souřadnice vektoru $\overrightarrow{PX}$ vzhledem k BÁZI $(\overrightarrow{PA_0}, \dots, \overrightarrow{PA_k})$,
  kde $P \notin \mathcal{B}$ lib...

  ... píšeme "$X = t_0 A_0 + \dots + t_k A_k$", kde NUTNĚ $\boxed{t_0 + \dots + t_k = 1}$!

  viz s. 41, 62

- $\{B_1, \dots, B_\ell\}$ = množina bodů $\subset \mathcal{A}$,
  $\{m_1, \dots, m_k\}$ = množina VAH $\subset \mathbb{R}$, $m_1 + \dots + m_\ell \neq 0$.

- T = **TĚŽIŠTĚ** bodové hmotné soustavy $\{B_1(m_1), \dots, B_\ell(m_\ell)\}$,
  pokud $\boxed{m_1 \overrightarrow{TB_1} + \dots + m_\ell \overrightarrow{TB_\ell} = \vec{o}}$.

  viz s. 63, 65 + INDUKCE

- PLATÍ

$$\boxed{T = \text{těžiště} \text{ —〃— } \iff T = t_1 B_1 + \dots + t_\ell B_\ell, \quad \text{kde } t_i = \frac{m_i}{m_1 + \dots + m_\ell}.}$$

OBECNĚ

- $\mathcal{A}$ = afinní prostor, $\mathcal{B}$ = afinní obal $\{A_0, \dots, A_k\}$, kde $\{A_0, \dots, A_k\}$ = množina bodů v OBECNÉ poloze.

- PLATÍ

$\mathcal{B}$ = af. obal $\{A_0, \dots, A_k\} = \{ t_0 A_0 + \dots + t_k A_k \mid t_0 + \dots + t_k = 1 \}$

Poloprostor $\mathcal{B}$ určený A_0 a hranicí obs. $\{A_1, \dots, A_k\}$ =

$= \mathcal{B} \cap \{ t_0 \geq 0 \}$

konvexní obal $\{A_0, \dots, A_k\} = \mathcal{B} \cap \{ t_0 \geq 0 \} \cap \dots \cap \{ t_k \geq 0 \}$

viz s. 41, 63, 65
+ INDUKCE

- HLAVNĚ

zobrazení $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}'$ je AFINNÍ

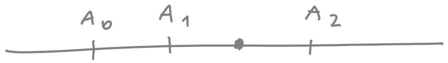
$\iff$ zachovává AFINNÍ KOMBINACE bodů

$\iff$ zachovává BARYCENTRICKÉ souř.

$\iff$ zachovává TĚŽIŠTĚ bodových hmotných soustav.

viz definice s. 32-33, 41, 66

POZNÁMKY

např. 

$X = -A_0 + 2A_1 = \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}A_2 = \dots$

- Pokud $\{A_0, \dots, A_k\}$ NEJSOU v obecné poloze, pak "souřadnice" $X = t_0 A_0 + \dots + t_k A_k \in \mathcal{B}$ NEJSOU určeny **jednoznačně** . . .

  . . . nicméně mnohé z předchozího má stále DOBRÝ VÝZNAM!

Např.:

- Obecně NEPLATÍ

  $X = t_0 A_0 + \dots + t_k A_k \in$ konvexní obalu $\{A_0, \dots, A_k\}$

  $\iff$ všechny $t_i \geq 0$,

- ale stále PLATÍ

  $$\text{konvexní obal } \{A_0, \dots, A_k\} = \left\{ \sum_{i=0}^{k} t_i A_i \;\middle|\; \sum_{i=0}^{k} t_i = 1,\ t_i \geq 0 \right\}.$$

- OBECNĚJI (Carathéodoryho věta)

  $M \subseteq \mathcal{A}$, $\mathcal{B} =$ afinní obal M, $k = \dim \mathcal{B}$:

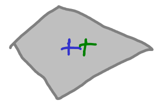
  $$\text{konvexní obal } M = \left\{ \sum_{i=0}^{k} t_i A_i \;\middle|\; A_i \in M,\ \sum_{i=0}^{k} t_i = 1,\ t_i \geq 0 \right\}$$

POZNÁMKY

- TĚŽIŠTĚ bodové hmotné soustavy se STEJNÝMI VAHAMI

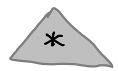
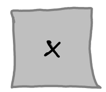
  NENÍ obecně totéž co

  TĚŽIŠTĚ konvexního obalu bodů!

  viz např. obecný čtyřúhelník 

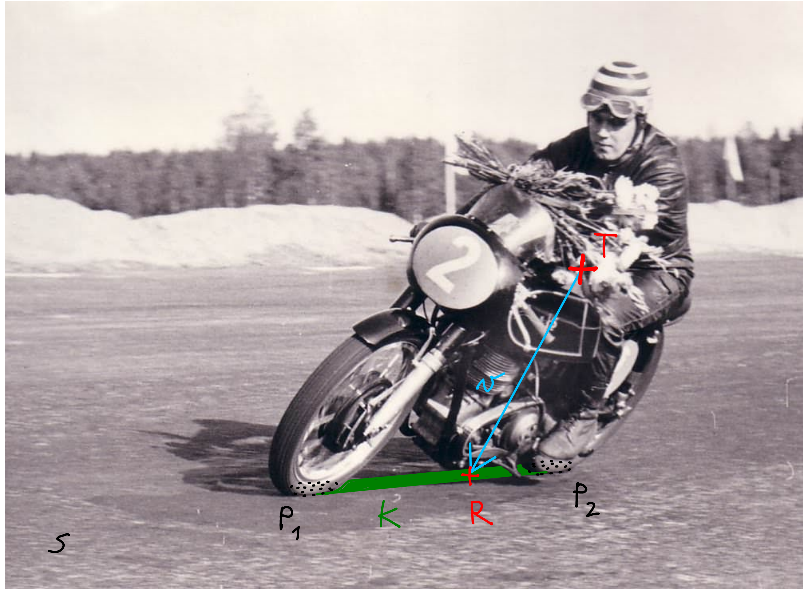
- ... SOUHLASÍ např. pro

  viz s. 63, 65
  + INDUKCE

  - body v OBECNÉ POLOZE (v lib. dimenzi!) SIMPLEXY 
  - SYMETRICKÉ věci např. čtverec 
  - apod.

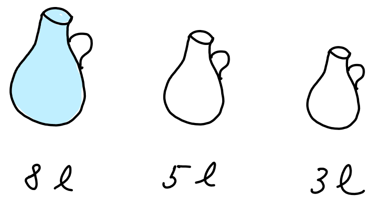
PŘÍKLAD — PROBLÉM STABILITY

• Hmotná soustava je STABILNÍ ...

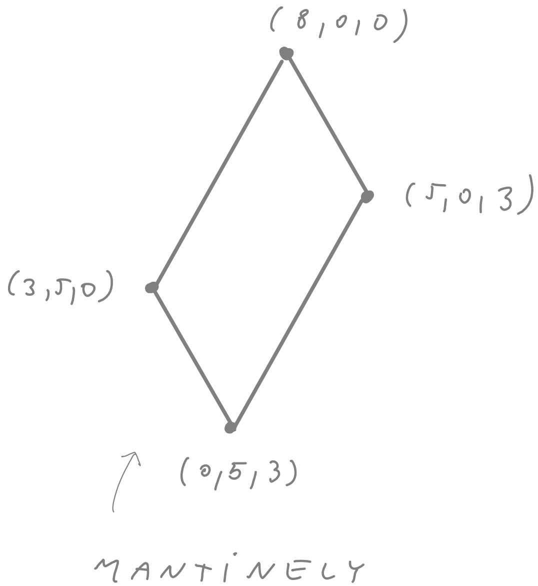


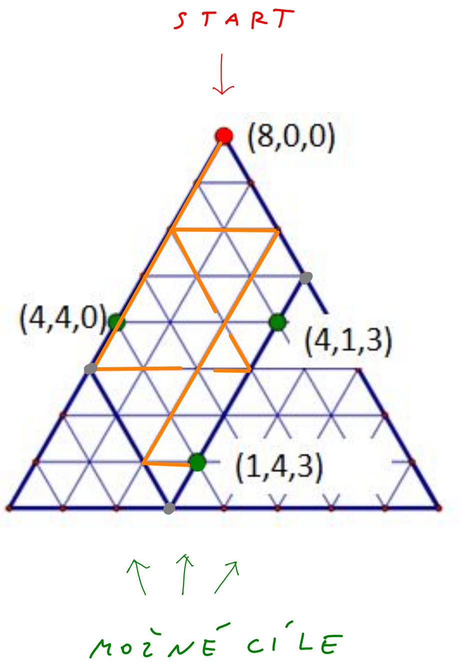
... pokud průmět (R) těžiště (T) hmotné soustavy ve směru výslednice (v) všech působících sil do opěrné roviny (S) leží v konvexním obalu (K) opěrných prvků ($P_1 \cup P_2$).

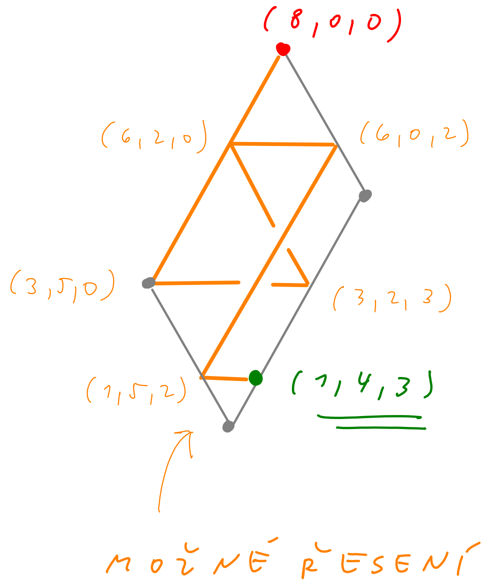
PŘÍKLAD — PROBLÉM TŘÍ DŽBÁNŮ



- UMÍME: přeléváním zcela naplnit (polo)prázdné nádoby.
- CHCEME: přesně 4 l.
- POSTŘEH: součet vody v nádobách je pořád STEJNÝ!
- MOŽNÉ ŘEŠENÍ:







SHRNUTÍ

af. přímka

reálná čísla

- ztotožnění ――――― $\cong \mathbb{R}$

  ⇝ uspořádání, ÚSEČKA, POLO-prostor, KONVEXNÍ množina

- k popisu předchozích omezení se hodí afinní KOMBINACE bodů

- afinní kombinace bodů souvisí s TĚŽIŠTI

- těžiště soustavy HMOTNÝCH BODŮ

  obecně NENÍ totéž co

  těžiště jejich KONVEXNÍHO OBALU

- předchozí věci se zachovávají při AFINNÍCH zobrazeních ...

  ... některé charakterizují af. zobr. ÚPLNĚ

  af. kombinace / baryc. souřadnice

AFINNÍ GEOMETRIE PŘEHLEDNĚ

- Všechno děláme "algebraicky"...

  těleso $\mathbb{R}$ ⇝ vektorový prostor V ⇝ afinní prostor $\mathcal{A}$

  ... v souladu s elem. geom. představami!

Úvodní věci

- OBECNÉ af. (pod-)prostory, typické PŘÍKLADY
- af. souřadnice a af. ZOBRAZENÍ

Další věci

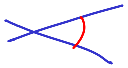
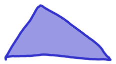
- jeden podpr. .... způsoby VYJÁDŘENÍ
- dva podpr. .... vzájemné POLOHY
- více podpr. .... PŘÍČKY
- omezené podpr. .... úsečky, KONVEXNÍ obaly

Souvislosti

- af. KOMBINACE a BARYCENTRICKÉ souřadnice
- podstatné INVARIANTY af. zobr. a ZÁKLADNÍ věta

EUKLEIDOVSKÁ GEOMETRIE

TYPICKÉ EUKL. POJMY . . .

- SHODNOST, podobnost
- vzdálenost 
- odchylka 
- obsah / objem 

TYPICKÉ PROVEDENÍ

- obecné eukl. prostory, shodná zobrazení
- vzdálenost
- odchylka

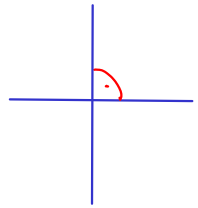
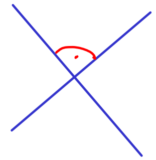
} ob. podprostorů

- objemy rovnoběžnostěnů, simplexů
- algebraické konstrukce a souvislosti

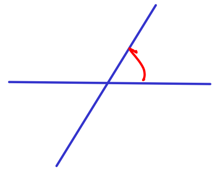
OPAKOVÁNÍ

SHODNOST POMOCÍ ...

- AXIÓMŮ

 $\cong$ 

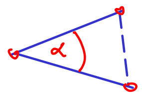
- MĚŘENÍ

 $\longrightarrow \mathbb{R}$

MĚŘENÍ POMOCÍ ...

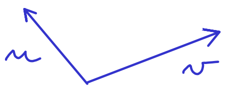
- (správné) METRIKY

$\longrightarrow |AB| \in \mathbb{R}$



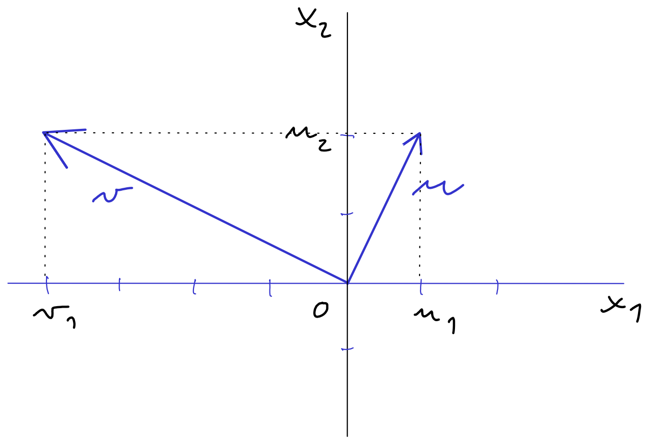
$\longrightarrow \cos\alpha \in \mathbb{R}$

- SKALÁRNÍHO SOUČINU



$\longrightarrow u \cdot v \in \mathbb{R}$

SKALÁRNÍ SOUČIN konzumně



- skalární součin vektorů

$$u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots \in \mathbb{R}$$

pythagorova věta

- NORMA (velikost)

$$\| u \| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots} = \sqrt{u \cdot u}$$

- KOLMOST

$$u \perp v \iff u \cdot v = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \text{podobné } \triangle$$

- ODCHYLKA

$$\sphericalangle(u, v) = \arccos \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} \quad \longleftrightarrow \quad \text{kosinová věta}$$

SKALÁRNÍ SOUČIN pořádně

... na vektorovém prostoru V

= přiřazení $V \times V \to \mathbb{R}$, které je

- SYMETRICKÉ — tj. $u \cdot v = v \cdot u$
- BI-LINEÁRNÍ — tj. lineární v OBOU složkách
- POZITIVNĚ DEFINITNÍ — tj. $u \neq 0 \implies u \cdot u > 0$

- Předchozí souř. vyjádření $\iff$ báze ORTO-NORMÁLNÍ!

  tj. $e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1 & \dots i = j \\ 0 & \dots i \neq j \end{cases}$

- souř. vyjádření OBECNĚ:

$u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \dots, \quad v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots$

$$u \cdot v = u_1 v_1 (e_1 \cdot e_1) + u_1 v_2 (e_1 \cdot e_2) + \dots$$
$$+ u_2 v_1 (e_2 \cdot e_1) + u_2 v_2 (e_2 \cdot e_2) + \dots = (u_1, u_2, \dots) \cdot \begin{pmatrix} e_1 \cdot e_1 & e_1 \cdot e_2 & \dots \\ e_2 \cdot e_1 & e_2 \cdot e_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

ZÁKLADNÍ NEROVNOSTI

- POZ. DEFINITNOST

$\boxed{u \cdot u \geqq 0}$ přičemž $\boxed{=}$, právě když $\boxed{u = 0}$

$\Downarrow$

- CAUCHYHO-SCHWARTZOVA NEROVNOST

$\boxed{|u \cdot v| \leqq \|u\| \cdot \|v\|}$ přičemž $\boxed{=}$, právě když $\boxed{u \propto v}$

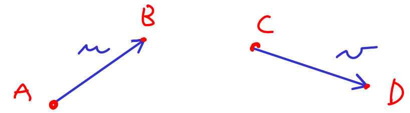
$\Downarrow$

- TROJÚHELNÍKOVÁ NEROVNOST

$\boxed{\|u + v\| \leqq \|u\| + \|v\|}$ přičemž $\boxed{=}$, pouze když $\boxed{u \propto v}$

SHODNOST ÚSEČEK

- $AB \cong CD$, pokud $|AB| = |CD|$, přičemž ...



... $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow V \longrightarrow \mathbb{R}$

$A, B \longmapsto u = \overrightarrow{AB} \longmapsto \boxed{|AB| = \|u\| = \sqrt{u \cdot u}}$ ... **VZDÁLENOST** A, B

- Toto přiřazení = **EUKLEIDOVSKÁ METRIKA**, přičemž ...

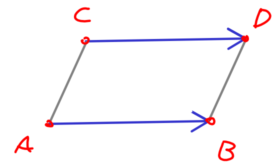
... (obecná) METRIKA:

a) $|AB| \geqq 0$ b) $|AB| = 0 \iff A = B$

c) $|AB| = |BA|$ d) $|AC| \leqq |AB| + |BC|$

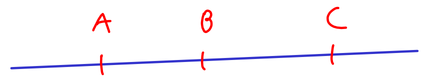
... EUKLEIDOVSKÁ = kompatibilní s AFINNÍ strukturou, tj.

e) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \implies |AB| = |CD|$

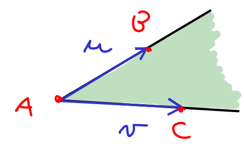


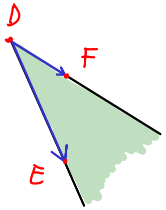
- **KOLINEÁRNOST a USPOŘÁDÁNÍ** bodů na přímce pomocí METRIKY:

B mezi A a C $\iff |AC| = |AB| + |BC|$



SHODNOST ÚHLŮ





- $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle EDF$, pokud $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$, přičemž . . .

  . . . $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow V \times V \longrightarrow [-1, 1] \longrightarrow [180°, 0°]$

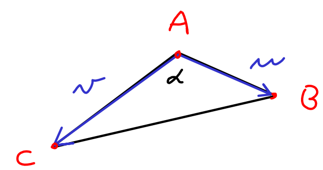
  $$B, A, C \longmapsto u = \overrightarrow{AB},\ v = \overrightarrow{AC} \longmapsto \frac{u \bullet v}{\|u\| \cdot \|v\|} \longmapsto \boxed{\arccos \frac{u \bullet v}{\|u\| \cdot \|v\|} = |\sphericalangle BAC|}$$

  . . . ODCHYLKA $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{AC}$

- Toto přiřazení je vskutku DOBŘE def!

- $\sphericalangle(u, v) = 90° \iff u \bullet v = 0$

- ODCHYLKA pomocí METRIKY a KOSINOVÉ VĚTY:



$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$$

$$\left.\begin{aligned} L &= \|u - v\|^2 = \dots = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\, u \bullet v \\ P &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\, \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \alpha \end{aligned}\right\} \quad \boxed{u \bullet v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \alpha}$$

SHRNUTÍ / PLÁN

- skalární součin stačí na VŠECHNO!

- **EUKLEIDOVSKÝ PROSTOR** $\mathcal{E}$
  = afinní prostor se skalárním součinem na zaměření $V = \vec{\mathcal{E}}$

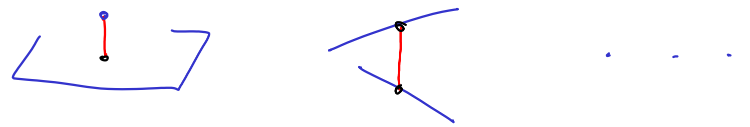
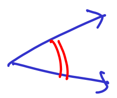
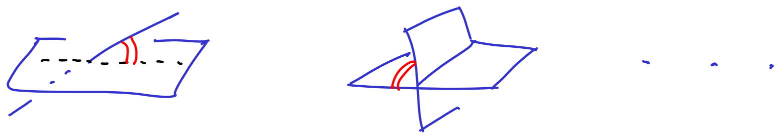
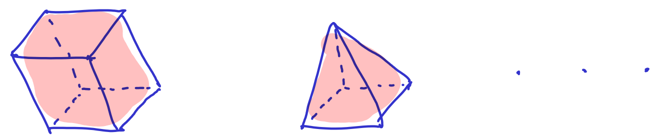
- **Eukleidovský podprostor** $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{E}$
  = podmnožina, která je eukleidovským prostorem ...
  = afinní podprostor se zúženým skal. součinem na $\vec{\mathcal{B}} \leq \vec{\mathcal{E}}$

- **Relevantní zobrazení** $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ v rámci AFINNÍCH:

f je SHODNÉ $\iff$ $\vec{f}$ zachovává SKALÁRNÍ SOUČIN
f je PODOBNÉ $\iff$ $\vec{f}$ — " — až na NÁSOBEK
f je EKVIafinní $\iff$ ... nějaké DETERMINANTY ...

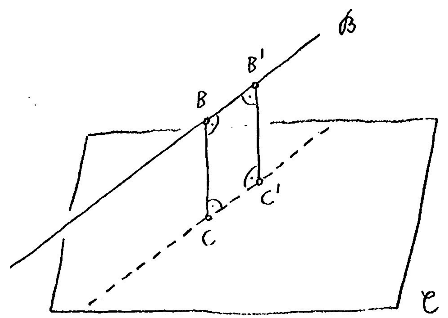
detaily později

SHRNUTÍ / PLÁN

MÁME	CHCEME	POUŽIJEME
vzdálenost bodů 	vzdálenost podprostorů 	KOLMÉ příčky
odchylka vektorů 	odchylka podprostorů 	KOLMÉ průměty
vzdálenost bodů a odchylka vektorů	objem ob. mnohostěnu 	DETERMINANTY a pod.

VZDÁLENOSTI

- obecná definice
- geom. charakterizace
- souvislost se vzáj. polohami



VZDÁLENOSTI

- VZDÁL. lib. PODMNOŽIN v lib. METRICKÉM prostoru:

  $$\nu(\mathcal{B},\mathcal{C}) = \inf\{\,|BC|, \text{ kde } B\in\mathcal{B} \text{ a } C\in\mathcal{C}\,\}$$

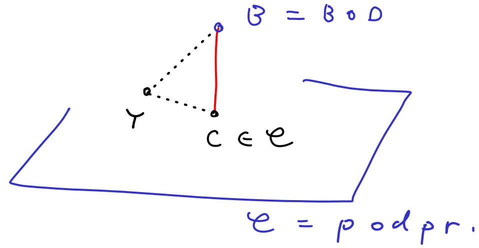
- Pro PODPROSTORY v EUKLEIDOVSKÉM prostoru:

  $$\ldots \inf = \min \ldots$$

- ZŘEJMĚ: $\boxed{\nu(\mathcal{B},\mathcal{C}) = 0 \iff \mathcal{B}\cap\mathcal{C}\neq\emptyset}$

- první GEOM. **charakterizace**:

  $$\boxed{\nu(B,\mathcal{C}) = |BC|, \text{ tj. } |BC| = \min \iff \overrightarrow{BC}\perp\mathcal{C}.}$$



- **Důkaz** (Pythagorova věta):

(a) předp. $\overrightarrow{BC}\perp\mathcal{C}$ a $Y\in\mathcal{C}$ lib $\rightsquigarrow$ $|BY|^2 = |BC|^2 + |CY|^2 > |BC|^2$

(b) předp. $\overrightarrow{BC}\cancel{\perp}\mathcal{C}$ a $Y\in\mathcal{C}$, $\overrightarrow{BY}\perp\mathcal{C}$ $\rightsquigarrow$ $|BC|^2 = |BY|^2 + |CY|^2 \cancel{<} |BY|^2$.

OBECNÁ CHARAKTERIZACE

- $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ ... lib. podprostory, $B \in \mathcal{B}$, $C \in \mathcal{C}$:

(1) $\rho(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = |BC|$, tj. $|BC| = \min$
$\iff \overrightarrow{BC} \perp \mathcal{B}$ a $\overrightarrow{BC} \perp \mathcal{C}$.

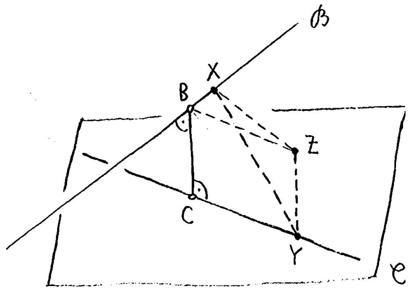
(2) Předchozí dvojice B, C je určena jednoznačně
$\iff \overrightarrow{\mathcal{B}} \cap \overrightarrow{\mathcal{C}} = \{o\}$.

- Důkaz:

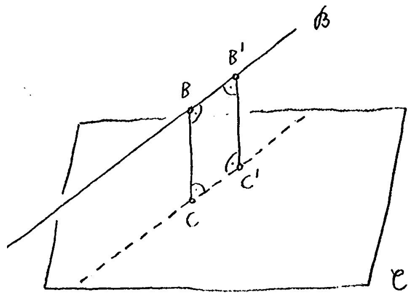
Pro $\rho(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = 0$, tj. $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$, všechno zřejmé...

Pro $\rho(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \neq 0$:

(1) "pravoúhlé $\triangle$" ...



(2) "obdélníčky" ...

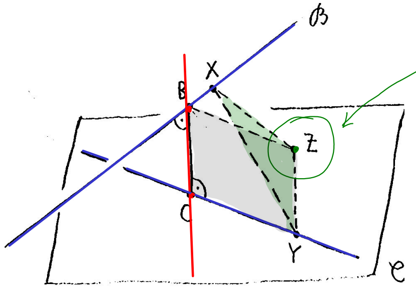


DETAILY K DŮKAZU

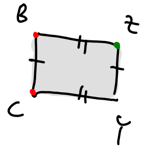
(1)

- předp. $|BC| = \min \rightsquigarrow \overrightarrow{BC} \perp \mathcal{B}$ a $\overrightarrow{BC} \perp \mathcal{C}$. (viz s. 83)

- předp. $\overrightarrow{BC} \perp \mathcal{B}$ a $\overrightarrow{BC} \perp \mathcal{C} \overset{?}{\rightsquigarrow} |XY| \geq |BC|$ pro lib. $X \in \mathcal{B}$, $Y \in \mathcal{C}$



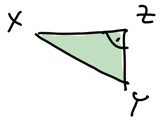
tak, aby



, tj. $\overrightarrow{ZY} = \overrightarrow{BC}$,

$\overrightarrow{BC} \perp \mathcal{B}$ a $\overrightarrow{BC} \perp \mathcal{C} \Rightarrow \overrightarrow{ZY} = \overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{ZB} + \overrightarrow{BX} = \overrightarrow{ZX}$,

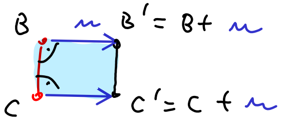
Tedy



$\Rightarrow |XY|^2 = |XZ|^2 + |ZY|^2 \geq |ZY|^2 = |BC|^2$.

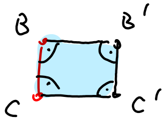
(2)

- předp. $u \in \vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} \Rightarrow$

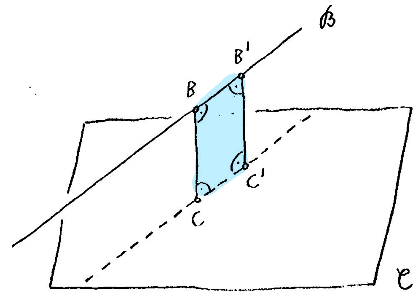


$\Rightarrow |BC| = |B'C'|$.

- předp. $|BC| = |B'C'|$, tj.



$\Rightarrow \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} \in \vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}$.



SOUVISLOST SE VZÁJ. POLOHAMI

- Ozn:

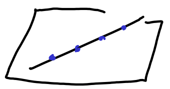
  v = vzdálenost $\mathcal{B}, \mathcal{C}$

  d = dim {řešení odp. soustavy} = dim $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}$

  m = min {dim $\mathcal{B}$, dim $\mathcal{C}$}

- Např:

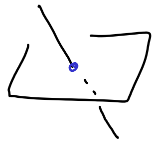
$\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$



$v = 0$

$d = m$

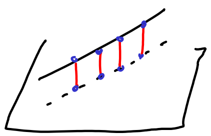
$\mathcal{B} \times \mathcal{C}$



$v = 0$

$d < m$

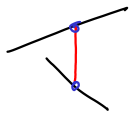
$\mathcal{B} \parallel \mathcal{C}$



$v \neq 0$

$d = m$

$\mathcal{B} \not\times \mathcal{C}$



$v \neq 0$

$d < m$

- OBECNĚ:

$\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ \ $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}$		$d = m$ (je max)	$d < m$ (není max)
$v = 0$	není $\emptyset$	$\subseteq$	$\times$
$v > 0$	je $\emptyset$	$\parallel$	$\not\times$

viz s. 47 – 48

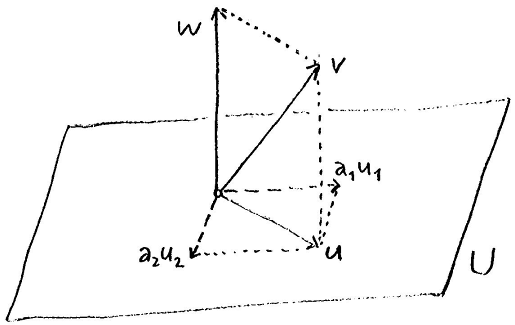
POZNÁMKY KE ⊥ ROZKLADŮM A POČÍTÁNÍ

- kolmý doplněk podprostoru

- kolmé rozklady / průměty

- početní přístupy obecné / speciální

- poznámky a souvislosti



KOLMÝ DOPLNĚK

- $U \subseteq V$ ... vektorový podpr. v prostoru se skal. součinem

- $U^\perp =$ kolmý doplněk U ve V
  $= \{$všechno ve V kolmé ke všemu v $U\}$
  $= \{ v \in V \mid v \perp u \text{ pro } \forall u \in U \}$

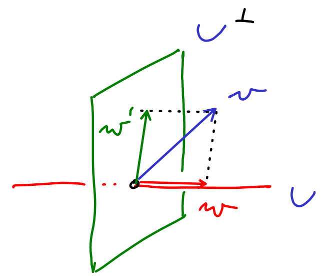
- Pro lib. bázi $(u_1, \dots, u_k)$ podpr. U:
  $$U^\perp = \{ v \in V \mid \boxed{v \cdot u_1 = \dots = v \cdot u_k = 0} \}$$
  soustava lin. homog. rovnic

- Zřejmě platí:
  $U^\perp \subseteq V$ je vektorový podpr.
  $U^\perp \cap U = \{0\}$ a $U^\perp + U = V$

$\rightsquigarrow$ TEDY U a $U^\perp$ jsou vskutku KOMPLEMENTÁRNÍ (= DOPLŇKOVÉ)!

DŮSLEDKY

Kolmý rozklad



- Lib. $v \in V$ lze VYJÁDŘIT JEDNOZNAČNĚ jako

$$v = w + w', \text{ kde } w \in U \text{ a } w' \in U^\perp \text{ !}$$

kolmý průmět v do $U^\perp$ (pro w')

kolmý průmět v do U (pro w)

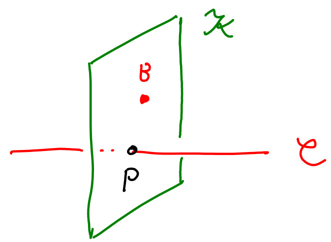
Totální kolmost

- Podpr. $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}$ jsou **totálně kolmé**, pokud $\vec{\mathcal{B}}^\perp = \vec{\mathcal{C}}$.
- Totálně kolmé podpr. se PROTÍNAJÍ V BODĚ!

⇝ jednoznačně určená **pata "kolmice"**

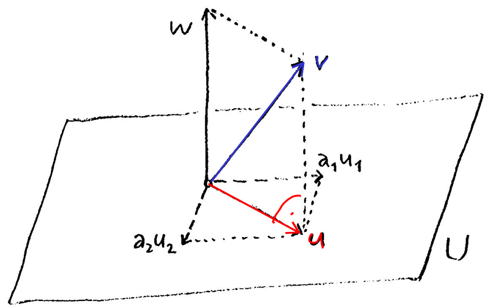
z bodu B k podpr. $\mathcal{C}$ ... $P = \mathcal{X} \cap \mathcal{C}$,

kde $\mathcal{X} = B + \vec{\mathcal{C}}^\perp$



89,5

POČÍTÁNÍ KOLMÉHO PRŮMĚTU



- $U = \langle u_1, \dots, u_k \rangle \subseteq V$
- $v \in V$ lib
- u = kolmý průmět v do U

$\iff$ $u = a_1 u_1 + \dots + a_k u_k$, pro nějaké $a_i \in \mathbb{R}$

a $v - u \perp U$,

tj. $(v - u) \cdot u_i = 0$, pro $i = 1, \dots, k$,

tj. $$\boxed{\begin{array}{c} a_1 (u_1 \cdot u_1) + \dots + a_k (u_k \cdot u_1) = v \cdot u_1 \\ \vdots \\ a_1 (u_1 \cdot u_k) + \dots + a_k (u_k \cdot u_k) = v \cdot u_k \end{array}}$$

"symetrická" soustava
k LIN. rovnic
k neznámých

- spec. $\dim U = 1$:

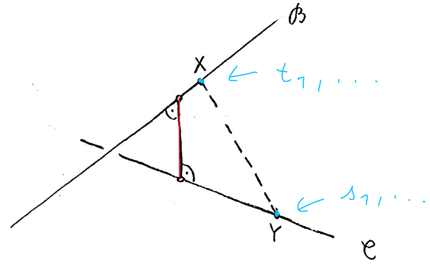
$$\boxed{a_1 (u_1 \cdot u_1) = v \cdot u_1} \rightsquigarrow \boxed{u = \left(\frac{v \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} \right) u_1},$$

zejména $\|u\| = \dfrac{|v \cdot u_1|}{\|u_1\|}$.

POČÍTÁNÍ VZDÁLENOSTÍ

dim $\mathcal{B} = k$, dim $\mathcal{C} = l$

- $\mathcal{B} = \{ B + t_1 u_1 + \dots \}$, $\mathcal{C} = \{ C + s_1 v_1 + \dots \} \subseteq \mathcal{E}$
- $X \in \mathcal{B}$, $Y \in \mathcal{C} \rightsquigarrow \overrightarrow{XY} = \overrightarrow{BC} + s_1 v_1 + \dots - t_1 u_1 - \dots$
- $v(t_1, \dots, s_1, \dots) = |XY| = \sqrt{\overrightarrow{XY} \cdot \overrightarrow{XY}} = \sqrt{f(t_1, \dots, s_1, \dots)}$



nezáp. KVADR. polynom

(A) podle DEFINICE

$$v = \min \iff \frac{\partial v}{\partial t_1} = \dots = \frac{\partial v}{\partial s_1} = \dots = 0$$

$$\iff \boxed{\frac{\partial f}{\partial t_1} = \dots = \frac{\partial f}{\partial s_1} = \dots = 0}$$

$k + l$ LINEÁRNÍCH rovnic

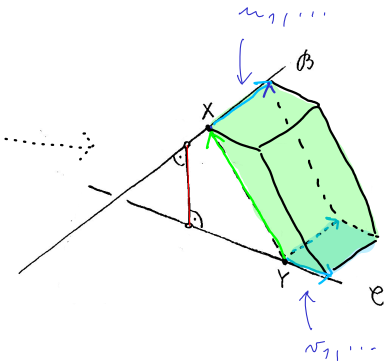
(B) kolmá příčka

$$v = \min \iff \overrightarrow{XY} \perp \mathcal{B} \text{ a } \overrightarrow{XY} \perp \mathcal{C}$$

$$\iff \boxed{\overrightarrow{XY} \cdot u_1 = \dots = \overrightarrow{XY} \cdot v_1 = \dots = 0}$$

(C) výška ROUNOBĚŽNOSTĚNU

$$v = \min \iff v = \text{výška rovnob}$$



$$\iff \boxed{v = \frac{\text{objem}(u_1, \dots, v_1, \dots, \overrightarrow{XY})}{\text{objem}(u_1, \dots, v_1, \dots)}}$$

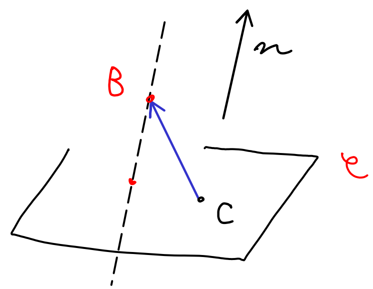
POZNÁMKY A ZKRATKY

- Vyznačené soustavy v (A) a (B) jsou STEJNÉ.
- Příčky (tedy i kolmé) umíme dělat RŮZNĚ!
- $|XY| = \min \iff \overrightarrow{XY} =$ KOLMÝ PRŮMĚT $\overrightarrow{BC}$ do $(\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}})^\perp$ . . .

  . . . obzvlášť snadné zejména pro $\dim(\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}})^\perp = 1$ $\rightsquigarrow$ "VZOREČKY"
- Např. $\mathcal{B}$ = bod, $\mathcal{C}$ = nadrovina :

  $C \in \mathcal{C}$, $n \in \vec{\mathcal{C}}^\perp$ lib.

  $$\rightsquigarrow \boxed{\rho(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \frac{|\overrightarrow{BC} \cdot n|}{\|n\|}}$$

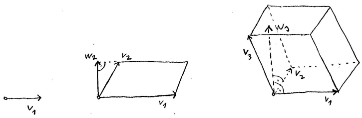


- Další "VZOREČKY" podle (C) . . .

  . . . OBSAHY a OBJEMY řešíme dále . . .

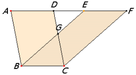
Objemy, determinanty apod.

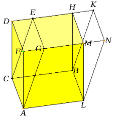
- obsahy rovnoběžníků, objemy rovnovnoběžnostěnů
- vymezení elementárně, vektorově
- determinanty, vnější a vektorové součiny
- poznámky a souvislosti



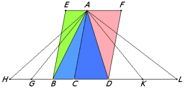
Opakování

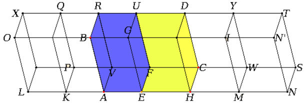
- Rovnoběžníky(-ostěny) se stejnými základnami a stejnými výškami mají stejný obsah.





- Poměr obsahů(-jemů) rovnoběžníků(-ostěnů) se stejnou výškou je stejný jako poměr délek(obsahů) jejich základen.

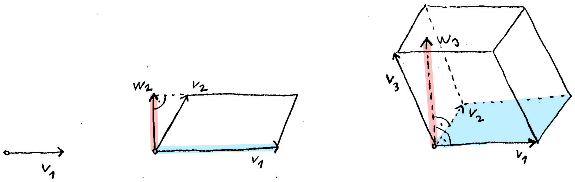




- Odtud poučka

$$\text{„}\mathit{obsah(objem)} = \mathit{z\acute{a}kladna} \times \mathit{v\acute{y}\check{s}ka}\text{“.}$$

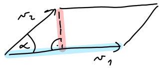
Obecně pomocí vektorů



Objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots$ je nezáporné reálné číslo, ozn. $\mathrm{V}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots)$, takové, že

- $\mathrm{V}(\mathbf{v}_1) := \|\mathbf{v}_1\|$,
- $\mathrm{V}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) := \mathrm{V}(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2) = \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{w}_2\|$,
  kde $\mathbf{w}_2$ = kolmý průmět vektoru $\mathbf{v}_2$ do $\mathbf{v}_1^\perp$,
- $\mathrm{V}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) := \mathrm{V}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_3) = \mathrm{V}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \cdot \|\mathbf{w}_3\|$,
  kde $\mathbf{w}_3$ = kolmý průmět vektoru $\mathbf{v}_3$ do $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle^\perp$,
- atd. . .

Počítání



- Pro $k = 2$ např.:

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\| \cdot \sin\alpha,$$

kde $\alpha = \measuredangle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, ... (umíme)

- Pro obecné k např.: ← soustavy lin. rovnic

– podle definice, tj. pomocí kolmého průmětu, (umíme)

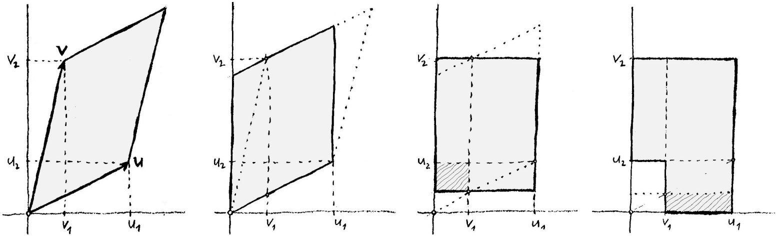
– podle vlastností, tj. pomocí determinantu, vektorového součinu, apod.

(~~na~~učíme)
při-

„vzorečky"

Úvod (naivně)

Obsah rovnoběžníku určeného vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ ...



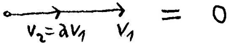
... je roven absolutní hodnotě determinantu $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_1 v_2 - v_1 u_2$.

$\det\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$

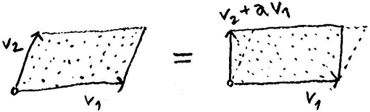
Úvod (koncepčně)

$V \times V \times \ldots \to \mathbb{R}_+$ $V \times V \times \ldots \to \mathbb{R}$

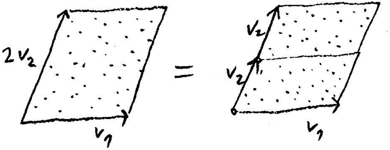
Vlastnosti obsahu/objemu se nápadně podobají vlastnostem determinantu:



$$V(\mathbf{v}_1, a\mathbf{v}_1) = 0$$



$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_1)$$



$$V(\mathbf{v}_1, b\mathbf{v}_2) = |b| \cdot V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$$

abs. hodnota

Determinant

Determinant chápeme

+ znaménka odp. paritě výběru

- buď jako $\mathrm{Mat}(n \times n) \to \mathbb{R}$,

  $=$ součet součinů prvků typu „jeden z každého řádku/sloupce“…,

- nebo jako $\underbrace{V \times \cdots \times V}_{n} \to \mathbb{R}$, kde $V = \mathbb{R}^n$, které je

  a) **anti-symetrické**

  $$\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots) = -\det(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \dots),$$

  b) **multi-lineární**

  tj. ve VŠECH složkách

  $$\det(\mathbf{v}_1, b\mathbf{v}_2, \dots) = b \cdot \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots),$$
  $$\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + \mathbf{w}_2, \dots) = \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots) + \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \dots).$$

Důležité (odvozené) vlastnosti:

$$\boxed{\begin{array}{c} \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_1, \dots) = \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots), \\ \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots) = 0 \iff \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots \text{ jsou lineárně závislé.} \end{array}}$$

Vnější součin

Uvažme dim $V = \boldsymbol{n}$ a přiřazení $\underbrace{V \times \cdots \times V}_{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}$:

$$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \longmapsto \text{souřadnice} \longmapsto \text{determinant}.$$

Závisí na volbě báze...[1]

Vnější součin = předchozí přiřazení vzhledem k nějaké ortonormální bázi;
ozn.

$$[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n] := \det(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n).$$

Vnější součin je anti-symetrické $\boldsymbol{n}$-lineární zobrazení, které až na znaménko souhlasí objemem...

Mezishrnutí:

$$\mathrm{V}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \begin{cases} 0 & \text{pro } k > n \\ \pm[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k] & \text{pro } k = n \\ ? & \text{pro } k < n \end{cases}$$

viz dále...

[1]... viz přechodové matice a Cauchyovu větu o součinu determinantů.

Kouzlo ($k = 2$)

Víme, že

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\| \cdot \sin \alpha,$$

přičemž

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}, \qquad \cos \alpha = \frac{\mathbf{v}_1 \mathbin{.} \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\|}.$$

Odtud

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \cdots = \sqrt{\|\mathbf{v}_1\|^2 \|\mathbf{v}_2\|^2 - (\mathbf{v}_1 \mathbin{.} \mathbf{v}_2)^2} = \sqrt{\begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \mathbin{.} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \mathbin{.} \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_2 \mathbin{.} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \mathbin{.} \mathbf{v}_2 \end{vmatrix}},$$

zase jakýsi determinant, ...

Kouzlo (obecně)

... tzv. *Gramův determinant*, ozn.

$$\mathrm{G}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) := \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \ldots & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_1 & \ldots & \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k \end{vmatrix}.$$

Věta

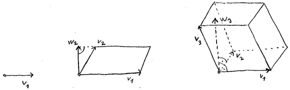
Pro libovolnou k-tici vektorů v eukleidovském prostoru platí

$$\mathrm{V}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \sqrt{\mathrm{G}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)}.$$

Důkaz.

Plyne z vlastností determinantu a skalárního součinu... $\square$

Detaily k důkazu



1) Pro navzájem kolmé vektory (kvádr):

$$G(\mathbf{v}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3)=\begin{vmatrix}\mathbf{v}_1\,.\,\mathbf{v}_1 & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{w}_2\,.\,\mathbf{w}_2 & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{w}_3\,.\,\mathbf{w}_3\end{vmatrix}=$$

$$=\|\mathbf{v}_1\|^2\cdot\|\mathbf{w}_2\|^2\cdot\|\mathbf{w}_3\|^2=V(\mathbf{v}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3)^2. \leftarrow$$ (zejména vždy ≥ 0)

2) Pro lib. našikmené vektory $\mathbf{v}_2=\mathbf{w}_2+a\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_3=\mathbf{w}_3+b\mathbf{v}_1+c\mathbf{v}_2$:

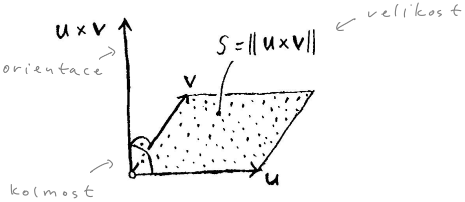
$$G(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)=\begin{vmatrix}\mathbf{v}_1\,.\,\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1\,.\,\mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_1\,.\,\mathbf{v}_3\\ \mathbf{v}_2\,.\,\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2\,.\,\mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2\,.\,\mathbf{v}_3\\ \mathbf{v}_3\,.\,\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_3\,.\,\mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3\,.\,\mathbf{v}_3\end{vmatrix}\overset{!}{=}$$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{v}_1\,.\,\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1\,.\,\mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_1\,.\,\mathbf{v}_3\\ \mathbf{w}_2\,.\,\mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_2\,.\,\mathbf{v}_2 & \mathbf{w}_2\,.\,\mathbf{v}_3\\ \mathbf{w}_3\,.\,\mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_3\,.\,\mathbf{v}_2 & \mathbf{w}_3\,.\,\mathbf{v}_3\end{vmatrix}\overset{!}{=}$$

$$=\begin{vmatrix}\mathbf{v}_1\,.\,\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1\,.\,\mathbf{w}_2 & \mathbf{v}_1\,.\,\mathbf{w}_3\\ \mathbf{w}_2\,.\,\mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_2\,.\,\mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_2\,.\,\mathbf{w}_3\\ \mathbf{w}_3\,.\,\mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_3\,.\,\mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3\,.\,\mathbf{w}_3\end{vmatrix}=G(\mathbf{v}_1,\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_3).\qquad\square$$

Vektorový součin ($n = 3$)

Od maturity známe jako operaci $V \times V \to V$ s několika užitečnými vlastnostmi:



U maturity zpravidla nevíme proč, ale pro $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ počítáme takto:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

souř. vzhledem k ON bázi

Vektorový součin (obecně)

Návod k předchozímu souř. vyjádření — Laplaceův rozvoj determinantu:

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x_1 \\ u_2 & v_2 & x_2 \\ u_3 & v_3 & x_3 \end{vmatrix} = +\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} x_1 - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} x_3 .$$

☞ Důležitá (bezsouřadnicová) interpretace:

vektorový s.

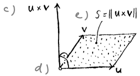
$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}] = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \,.\, \mathbf{x},$$

vnější součin　　　skalární s.

Obecná definice:

> *Vektorovým součinem* $(\boldsymbol{n-1})$-tice vektorů $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1})$ v $\boldsymbol{n}$-rozměrném eukleidovském prostoru je vektor $\mathbf{w} := \mathbf{v}_1 \times \cdots \times \mathbf{v}_{n-1}$ splňující
>
> $$[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{x}] = \mathbf{w} \,.\, \mathbf{x} \qquad (*)$$
>
> pro všechna $\mathbf{x} \in V$.

Vektorový součin (vlastnosti)



Věta

Ozn. $\mathbf{w} := \mathbf{v}_1 \times \cdots \times \mathbf{v}_{n-1}$, $n = \dim V$.

a) *Toto je anti-symetrické multi-lineární zobrazení* $\underbrace{V \times \cdots \times V}_{n-1} \to V$.

b) $\mathbf{w} = \mathbf{o} \iff \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ *jsou lineárně závislé.*

c) $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ *jsou lineárně nezávislé* $\Longrightarrow (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{w})$ *je kladná báze.*

d) $\mathbf{w}$ *je kolmý ke všem vektorům* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$.

e) $\|\mathbf{w}\| = \mathrm{V}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1})$.

Důkaz.

a) Viz def. rovnost $^{(*)}$ a vlastnosti vnějšího $^{(v)}$ a skalárního $^{(s)}$ součinu.

b) $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{x}] = 0 \ \forall \mathbf{x} \in V \overset{(v)}{\iff} \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ lin. závislé;
$\mathbf{w} \,.\, \mathbf{x} = 0 \ \forall \mathbf{x} \in V \overset{(s)}{\iff} \mathbf{w} = \mathbf{o}$.

c) $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ lin. nezávislé $\overset{(b)}{\Longrightarrow} \mathbf{w} \neq \mathbf{o} \Longrightarrow [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{w}] \overset{(*)}{=} \mathbf{w} \,.\, \mathbf{w} \overset{(s)}{>} 0$.

d) $\mathbf{w} \,.\, \mathbf{v}_i \overset{(*)}{=} [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{v}_i] \overset{(v)}{=} 0$.

e) $\|\mathbf{w}\|^2 = \mathbf{w} \,.\, \mathbf{w} \overset{(*)}{=} [\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{w}] \overset{(v)}{=} \mathrm{V}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{w}) \overset{(d)}{=} \mathrm{V}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}) \cdot \|\mathbf{w}\|$. $\square$

Poznámky

K vektorovému součinu pro $n = 3$:

- Binární operace $V \times V \to V$, která **není** asociativní (přesto užitečná).
- Pro velikost platí

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin\alpha, \quad \text{kde } \alpha = \measuredangle(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

K aplikacím:

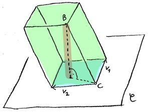
- Orientace a kolmosti vektorů.
- Objemy rovnoběžnostěnů, simplexů atd., přičemž:

indukce
(+ limitní
úvahy)

$$\text{Objem } \boldsymbol{k}\text{-dim simplexu} = \frac{1}{\boldsymbol{k}!} \text{ objemu opsaného rovnoběžnostěnu.}$$

- Vzdálenosti podprostorů **bez** řešení soustav rovnic:

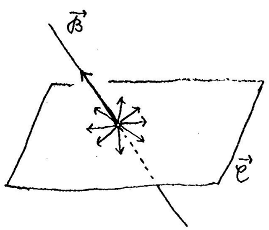
$$v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \frac{\mathrm{V}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \overrightarrow{BC})}{\mathrm{V}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots)},$$

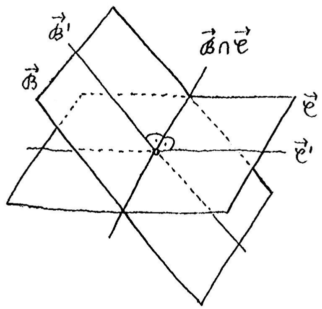


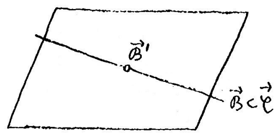
kde $B \in \mathcal{B}$, $C \in \mathcal{C}$ a $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots)$ je báze $\overrightarrow{\mathcal{B}} + \overrightarrow{\mathcal{C}}$.

ODCHYLKY

- obecná definice
- geom. charakterizace
- poznámky a souvislosti s kolmostí

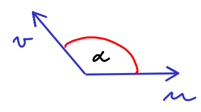




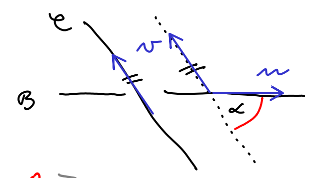


ODCHYLKY

- Rozumíme $\measuredangle$ vektorů ... $\cos\alpha = \dfrac{u \circ v}{\|u\| \cdot \|v\|}$ $\quad \alpha \in [0°, 180°]$



$\rightsquigarrow$ $\measuredangle$ přímek ... $\cos\alpha = \dfrac{|u \circ v|}{\|u\| \cdot \|v\|}$ $\quad \alpha \in [0°, 90°]$



Obecně

- $\measuredangle(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \measuredangle(\vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{C}})$,
- $\measuredangle(\vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{C}})$ ... musíme rozlišovat:

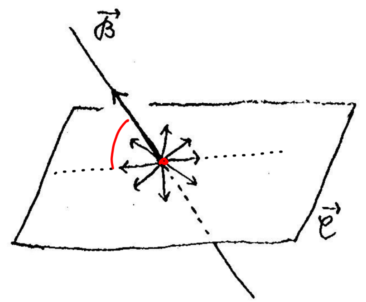
– $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} = \{o\}$ ... $\measuredangle(\vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{C}}) = \min\{\measuredangle(u, v),$ kde $u \in \vec{\mathcal{B}}$ a $v \in \vec{\mathcal{C}}\}$

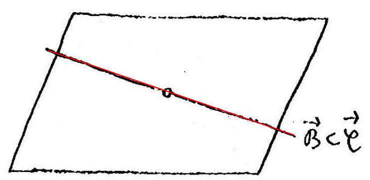
– $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} \neq \{o\}$
  - $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} = \max$ ... $\measuredangle(\vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{C}}) = 0$
  - $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} \neq \max$ ... $\measuredangle(\vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{C}}) = \measuredangle(\vec{\mathcal{B}}', \vec{\mathcal{C}}')$,

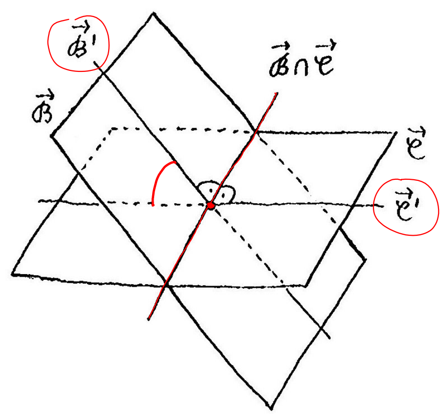
kde $\vec{\mathcal{B}}' \subset \vec{\mathcal{B}}$ a $\vec{\mathcal{B}}' \perp (\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}})$

a $\vec{\mathcal{C}}' \subset \vec{\mathcal{C}}$ a $\vec{\mathcal{C}}' \perp (\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}})$

v skutku $\vec{\mathcal{B}}' \cap \vec{\mathcal{C}}' = \{o\}$



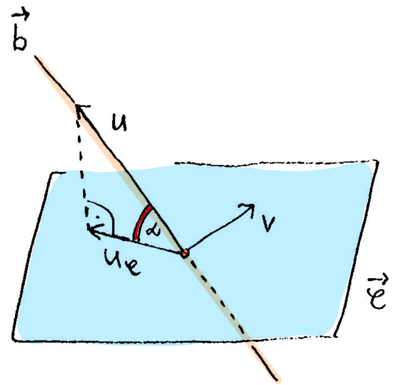




PRVNÍ CHARAKTERIZACE

- b = přímka, $\mathcal{E}$ = ob. netriv. podpr.:

$$\boxed{\begin{array}{l} \measuredangle(b, \mathcal{E}) = \measuredangle(u, u_{\mathcal{E}}), \\ \quad \text{kde } u \in \vec{b} \text{ lib.} \\ \quad\quad \text{a } u_{\mathcal{E}} = \text{kolmý průmět } u \text{ do } \mathcal{E}. \end{array}}$$



- **Důkaz:**

Pro lib. $v \in \vec{\mathcal{E}}$ ukážeme, že $\beta = \measuredangle(u, v) \geq \measuredangle(u, u_{\mathcal{E}}) = \alpha$,

tj. $\cos\beta \leq \cos\alpha$:

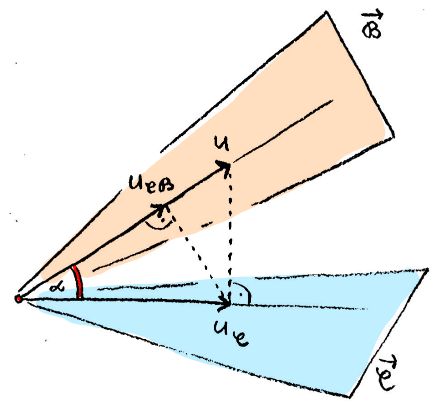
$$\cos\beta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{u_{\mathcal{E}} \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} \leq \frac{\|u_{\mathcal{E}}\| \cdot \|v\|}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{\|u_{\mathcal{E}}\|}{\|u\|} = \cos\alpha .$$

$u - u_{\mathcal{E}} \perp \mathcal{E}$

tj. $(u - u_{\mathcal{E}}) \cdot v = 0$

Cauchy-Schwarz!

OBECNÁ CHARAKTERIZACE



- $\mathcal{B}, \mathcal{C} \ldots$ ob. metriv. podpr., $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} = \{o\}$
- Ozn. $\measuredangle(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \measuredangle(u, v) = \alpha$ pro $u \in \vec{\mathcal{B}}$ a $v \in \vec{\mathcal{C}}$

$\rightsquigarrow$ $\alpha = \measuredangle(u, u_{\mathcal{C}}) = \measuredangle(v_{\mathcal{B}}, v)$,

kde $u_{\mathcal{C}}$ = kolmý průmět u do $\mathcal{C}$

a $v_{\mathcal{B}}$ = kolmý průmět v do $\mathcal{B}$

$\rightsquigarrow$ $u_{\mathcal{C}}$ = násobek v a $v_{\mathcal{B}}$ = násobek u

$\rightsquigarrow$ $u_{\mathcal{CB}}$ = kolmý průmět $u_{\mathcal{C}}$ do $\mathcal{B}$

= násobek u

= CHAR. VEKTOR složeného zobr. $\vec{\mathcal{B}} \underset{p_{\mathcal{B}}}{\overset{p_{\mathcal{C}}}{\rightleftarrows}} \vec{\mathcal{C}}$

- $\underbrace{\text{Přitom}}$ $\cos\alpha = \dfrac{\|u_{\mathcal{C}}\|}{\|u\|} = \dfrac{\|u_{\mathcal{CB}}\|}{\|u_{\mathcal{C}}\|}$, $u_{\mathcal{CB}} = \lambda u$ $\rightsquigarrow$ $\boxed{\lambda = \cos^2\alpha}$.

$$\boxed{\begin{array}{l} \measuredangle(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \measuredangle(u, u_{\mathcal{C}}) = \ldots, \\ \quad \text{kde } u = \text{char. vektor odp. NEJVĚTŠÍMU char. číslu transf. } p_{\mathcal{B}} \circ p_{\mathcal{C}} \\ \quad\quad \text{a } u_{\mathcal{C}} = p_{\mathcal{C}}(u), \quad \ldots \end{array}}$$

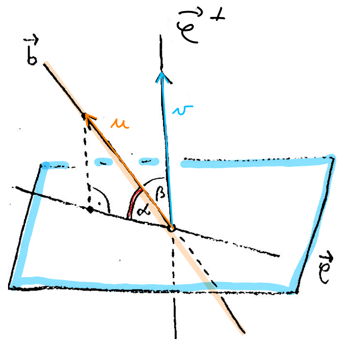
ZKRATKY A POZNÁMKY

- obecně platí $\boxed{\sphericalangle(\vec{\mathcal{B}},\vec{\mathcal{E}}) = \sphericalangle(\vec{\mathcal{B}}^\perp,\vec{\mathcal{E}}^\perp) = 90° - \sphericalangle(\vec{\mathcal{B}},\vec{\mathcal{E}}^\perp)}$ ...
- což se hodí zejména v NADROVIN ... $\sphericalangle(\vec{\mathcal{E}},\vec{\mathcal{E}}^\perp) = 90°$
- Např. b = přímka, $\mathcal{E}$ = nadrovina

  $\rightsquigarrow \quad \alpha = \sphericalangle(b,\mathcal{E}) = 90° - \sphericalangle(u,v),$

  kde $u \in \vec{b}$, $v \in \vec{\mathcal{E}}^\perp$ lib.

  $\rightsquigarrow \quad \boxed{\sin\alpha = \cos(90°-\alpha) = \dfrac{|u \cdot v|}{\|u\| \cdot \|v\|}}$

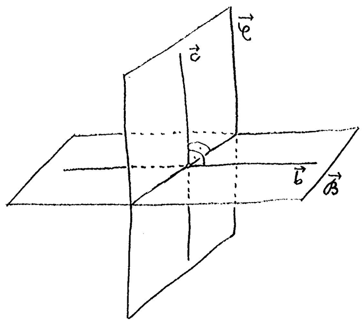


- $\mathcal{B},\mathcal{E}$ totálně kolmé, tj. $\vec{\mathcal{B}}^\perp = \vec{\mathcal{E}} \implies \sphericalangle(\mathcal{B},\mathcal{E}) = 90°$. ← triv.
- $\boxed{\mathcal{B},\mathcal{E} \text{ "kolmé", tj. } \vec{\mathcal{B}}^\perp \subseteq \vec{\mathcal{E}} \text{ či } \vec{\mathcal{B}}^\perp \supseteq \vec{\mathcal{E}} \implies \sphericalangle(\mathcal{B},\mathcal{E}) = 90°.}$ ← obecně

Důvod: $\cancel{\Longleftarrow}$

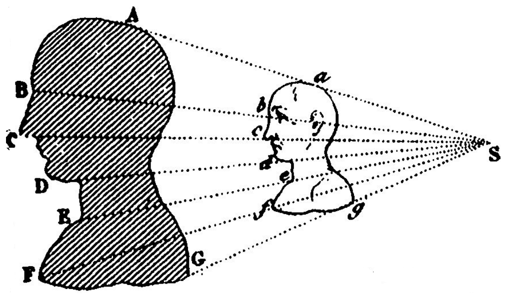
Levá strana ZÁVISÍ na okolním prostoru $\mathcal{E}$, pravá strana NIKOLI!

platí, pokud $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{E}} = \{o\}$!



RELEVANTNÍ ZOBRAZENÍ

- shodná, podobná a ekviafinní zobr.
- alg. vymezení a souř. vyjádření
- výhled k projektivním



PŘEHLED

Umíme

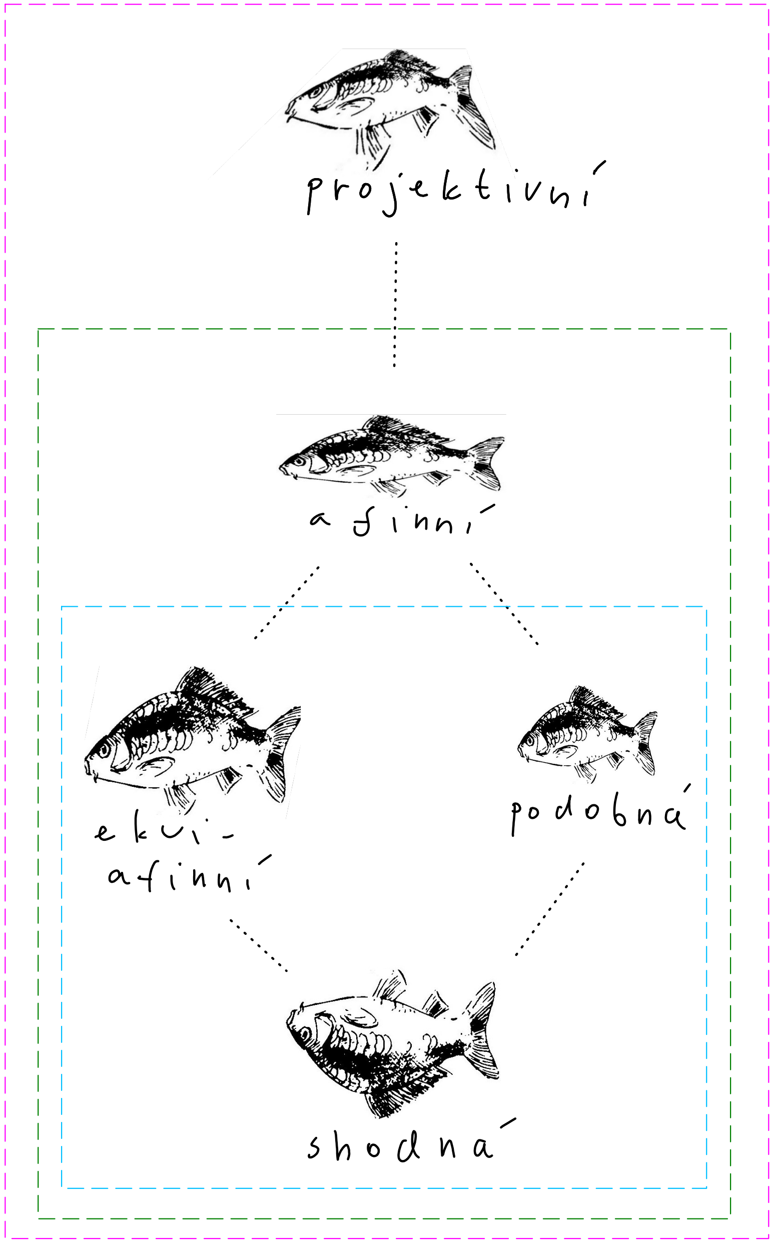
(Geometrie 1)

- VŠECHNY skupiny elementárně
- všechno o AFINNÍCH! (s. 32-35, 67)
- základ o SHODNÝCH a PODOBNÝCH (s. 80)

Doplníme

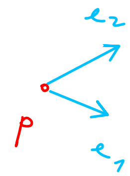
- anal. vyjádření shodných, podobných a ekviafinních v rámci AFINNÍCH (s. 115-116)
- důkladnější rozbor v rámci PROJEKTIVNÍCH

(Geometrie 3)



ANAL. VYJÁDŘENÍ

- a, a' ... afinní prostory + afinní souř. soust. ...



- $f : a \longrightarrow a'$ je AFINNÍ

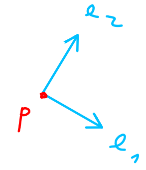
$\iff$ $f(A+v) = f(A) + \vec{f}(v)$, kde $\vec{f} : V \longrightarrow V'$ je LINEÁRNÍ

$$\iff \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}}}_{\text{souřadnice obrazu}} = \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}}}_{\text{obraz počátku}} + \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}}}_{\text{matice lin. zobrazení } \vec{f}} \cdot \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}}}_{\text{souřadnice vzoru}}$$

- zkrácené $\boxed{X'} = \boxed{P'} + \boxed{D} \cdot \boxed{X}$, přičemž $\boxed{D = \left(e_1' \,\vdots\, e_2' \,\vdots\, \cdots \right)}$

ANAL. VYJÁDŘENÍ

- $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ ... eukleid. prostory + KARTÉZSKÉ souř. ...

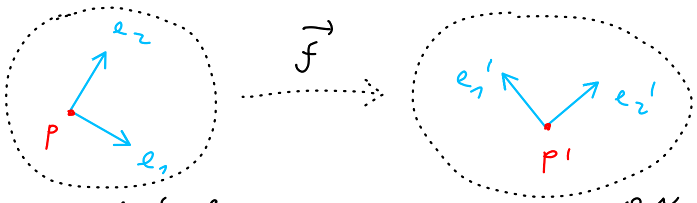


tj: $e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1 & \dots i=j \\ 0 & \dots i\neq j \end{cases}$

- afinní $f: \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ je SHODNÉ

$\iff$ $\vec{f}: V \to V'$ zachovává SKALÁRNÍ SOUČIN

$\iff$



ON báze ON báze

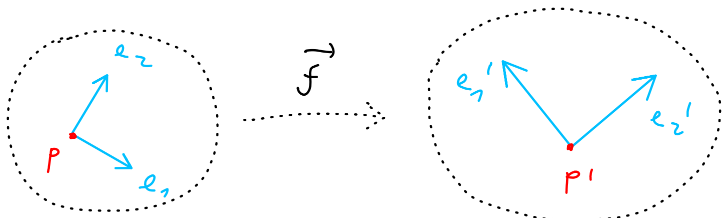
tj: $e_i' \cdot e_j' = \begin{cases} 1 & \dots i=j \\ 0 & \dots i\neq j \end{cases}$

$\iff$ $\boxed{D^T \cdot D = E}$ tj. $\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1' & e_2' & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$

- afinní $f: \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ je PODOBNÉ s koeficientem k

$\iff$ $\vec{f}: V \to V'$ zachovává SKALÁRNÍ SOUČIN až na NÁSOBEK

$\iff$



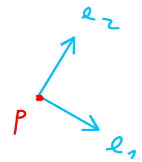
ON báze OG báze $\|e_i'\| = k$

tj: $e_i' \cdot e_j' = \begin{cases} k^2 & \dots i=j \\ 0 & \dots i\neq j \end{cases}$

$\iff$ $\boxed{D^T \cdot D = k^2 E}$ tj. $\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1' & e_2' & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2 & 0 & \dots \\ 0 & k^2 & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$

ANAL. VYJÁDŘENÍ

- $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ ... eukleid. prostory + KARTÉZSKÉ souř. ...

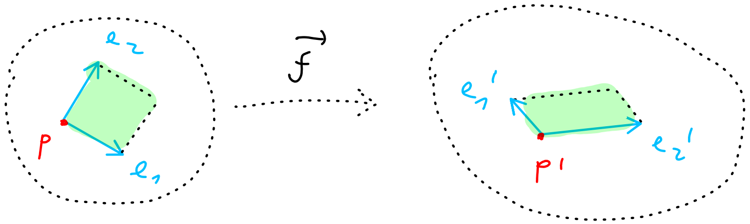


tj: $e_i \cdot e_j = \begin{cases} 1 & \dots i=j \\ 0 & \dots i \neq j \end{cases}$

- afinní $f: \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}'$ je EKVIAFINNÍ

$\iff$ $\vec{f}: V \longrightarrow V'$ zachovává OBJEMY

$\iff$



$\iff$ $\boxed{\det(D^T \cdot D) = 1}$ $\longleftarrow$ $\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1' & e_2' & \cdots \end{pmatrix}$ = GRAMOVA matice ...

- v případě, že $\dim \mathcal{E} = \dim \mathcal{E}'$: $\longleftarrow$ tj. matice D čtvercová

$\iff$ $\boxed{\det D = \pm 1}$

SHRNUTÍ / VÝHLEDY

- SHODNÁ, PODOBNÁ, EKVIAFINNÍ zobr. jsou **PROSTÁ**!

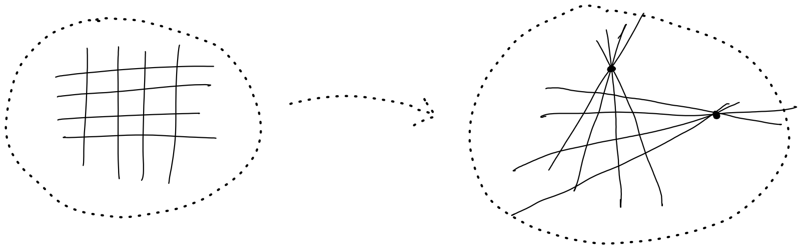
- Obecná AFINNÍ zobr.,

$$\boxed{X'} = \boxed{P'} + \boxed{D} \cdot \boxed{X},$$

  lze psát pomocí jedné **ROZŠÍŘENÉ** matice takto:

$$\begin{pmatrix} \boxed{X'} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{D} & \boxed{P'} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{X} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Do tohoto schématu se vejdou i obecná **PROJEKTIVNÍ** zobr!



- Čeká nás
  - konfrontace geom. a anal. vyjádření
  - rozpoznání ZÁKLADNÍCH zobr.
  - skládání a rozkládání ...

(Geometrie 3)

EUKLEID. GEOMETRIE PŘEHLEDNĚ

- Předchozí věci ...

  těleso $\mathbb{R}$ ⇝ vektorový prostor V ⇝ afinní prostor $\mathcal{A}$

  ... doplňujeme o

  SKALÁRNÍ součin $V \times V \to \mathbb{R}$ ⇝ eukleidovský prostor $\mathcal{E}$

Úvodní věci

- norma, kolmost, odchylka vektorů
- shodnost úseček, úhlů

Další věci

- vzdálenost, odchylka ob. podpr.
- objemy rovnoběžnostěnů, simplexů, ...
- shodná, podobná, ekviafinní zobr.

Souvislosti

- vzdálenost, odchylka a vzájemné polohy podpr.
- objemy a determinanty
- kolmé průměty a rozklady