Repetitorium SŠ matematiky – 10. cvičení

Komplexní čísla – 2. část

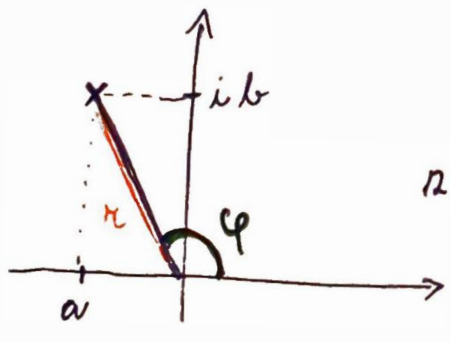
Zápis komplexního čísla v goniometrickém tvaru

Každé komplexní číslo lze zapsat jak v algebraickém tvaru ($a+bi$; $a,b \in \mathbb{R}$), tak ve tvaru goniometrickém

$$\boxed{z = r\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)}$$

r – vzdálenost čísla od počátku soustavy souřadnic, $r = |z|$

φ – argument komplexního čísla



$$z = a + ib = r\cdot(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$$

Vzpomeňte si na jednotkovou kružnici. Každý bod kružnice o poloměru 1 se středem v počátku souřadnic má x-ovou souřadnici $\cos\varphi$ a y-ovou souřadnici $\sin\varphi$, kde φ je úhel, který svírá spojnice bodu na kružnici s počátkem souřadnic a kladná poloosa x. Vydělením vzdálenosti komplexního čísla od počátku získáme v závorce komplexní číslo s absolutní hodnotou 1, tedy ležící na jednotkové kružnici.

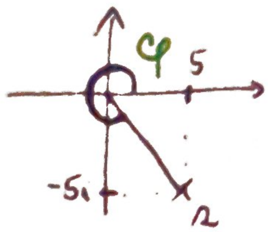
- zapište komplexní číslo v goniometrickém tvaru

$z = 5 - 5i$

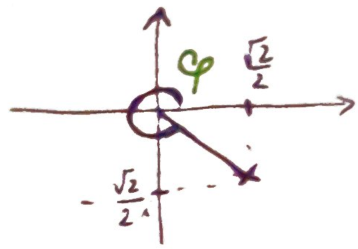
1. určíme absolutní hodnotu
2. nakreslíme číslo do Gaussovy roviny a určíme φ

$$|z| = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$z = 5\sqrt{2}\left(\frac{5}{5\sqrt{2}} - \frac{5}{5\sqrt{2}}i\right) = 5\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$



nebo



$$\varphi = \frac{7}{4}\pi$$

Jak je vidět, nezáleží na tom, zda nakreslíte původní číslo, nebo číslo s upraveným poloměrem, úhel je stejný.

$$z = 5\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

Př. 1. Zapište komplexní čísla v goniometrickém tvaru

a) $z = -1 + \sqrt{3}i$

b) $z = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

c) $z = \pi \cdot i$

Př. 2. Zapište komplexní čísla v algebraickém tvaru

a) $z = 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)$

b) $z = \frac{1}{2}\cdot\left(\cos(193\pi) + i\sin(193\pi)\right)$

Zápis čísel v goniometrickém tvaru má své výhody,
například se velmi zjednoduší násobení, dělení, umocňování...

Platí:
$$z_1 = r_1\,(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$$
$$z_2 = r_2\,(\cos\rho + i\cdot\sin\rho)$$
$\rightarrow$
$$\boxed{\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= r_1 r_2\cdot(\cos(\varphi+\rho) + i\,\sin(\varphi+\rho)) \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}\cdot(\cos(\varphi-\rho) + i\,\sin(\varphi-\rho)) \end{aligned}}$$

Moivreova věta

Pro každé $z \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}$: $z = (\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)^n = \cos(n\cdot\varphi) + i\,\sin(n\cdot\varphi)$

Obecněji tedy

$$z = r\cdot(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$$
$$z^n = r^n\cdot(\cos(n\cdot\varphi) + i\cdot\sin(n\cdot\varphi))$$

Př. 3. Umocněte pomocí Moivreovy věty, výsledek uveďte v algebraickém tvaru

a) $\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right)^{62}$

b) $(1-i)^{100}$

c) $\left(\frac{1}{1+i}\right)^{10}$

Binomické rovnice

Binomickou rovnicí rozumíme rovnici tvaru $\boxed{x^n - a = 0}$, kde $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Výsledkem je právě n komplexních čísel $x_0, x_1, \dots x_{n-1}$, které tvoří v Gaussově rovině pravidelný n-úhelník se středem v počátku souřadnic.

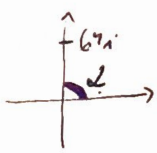
Zapíšeme-li číslo a v goniometrickém tvaru $a = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, získáme výsledky následovně:

$$\boxed{x_k = \sqrt[n]{|a|} \cdot \left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)}$$

$k = 0, 1, \dots, n-1$

- $x^3 - 64i = 0$

$a = 64i \qquad |a| = \sqrt{0^2 + 64^2} = 64$



$a = 64 \cdot (0 + i)$

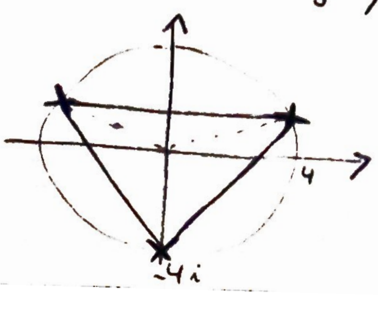
$a = 64 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{2} + i \cdot \sin\frac{\pi}{2}\right)$

$x_k = \sqrt[3]{64} \cdot \left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right)$ obecný tvar výsledku, dosazením k získáme výsledky x_0, x_1, x_2

$x_0 = 4 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i \cdot \sin\frac{\pi}{6}\right)$

$x_1 = 4 \cdot \left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3}\right) = 4 \cdot \left(\cos\frac{5}{6}\pi + i \cdot \sin\frac{5}{6}\pi\right)$

$x_2 = 4 \cdot \left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3}\right) = 4 \cdot \left(\cos\frac{9}{6}\pi + i \cdot \sin\frac{9}{6}\pi\right) = 4 \cdot \left(\cos\frac{3}{2}\pi + i \cdot \sin\frac{3}{2}\pi\right)$



Výsledky tvoří rovnostranný Δ.

Př. 4: Řešte binomické rovnice, výsledky zakreslete do Gaussovy roviny

a) $x^3+27=0$

b) $x^6-1=0$

c) $x^4-i-1=0$